

# Le phénomène d’adhérence en stéréoscopie dépend du critère de corrélation

Julie DELON<sup>1</sup>, Bernard ROUGÉ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centre de Mathématiques et de Leurs Applications,  
61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan cedex, France

<sup>2</sup>Centre National d’Etudes Spatiales  
18, av Edouard Belin, 31055 Toulouse, France  
Julie.Delon@cmla.ens-cachan.fr, Bernard.Rouge@cnes.fr

**Résumé** – Dans cette contribution, nous nous intéressons au phénomène de dilatation des reliefs, que l’on rencontre lorsque l’on calcule des cartes de disparité par corrélation. C’est ce phénomène que nous appelons “adhérence”. Nous verrons que ce problème est inhérent au principe de corrélation, basée sur la norme  $L^2$ , et nous démontrerons qu’il peut être fortement réduit par un choix adéquat de la norme de comparaison des fenêtres homologues du couple.

**Abstract** – This paper describes a problem which appears when correlation-based stereo algorithms are used for producing disparity maps : edges are shifted. We call that problem “adherence”. We argue that this phenomenon is inherent in the correlation principle, which is based on the  $L^2$  norm, and we will prove that it can be reduced with a good choice of the comparison norm.

## 1 Introduction

L’adhérence, que l’on rencontre au voisinage des discontinuités de relief, désigne le phénomène de dilatation des “sursols” obtenus par corrélation. Elle est due, d’une part au fait que l’on corrèle sur des fenêtres de taille fixe, d’autre part au fait que la corrélation privilégie trop les “edges” par rapport aux textures. Le phénomène d’adhérence a souvent été décrit dans des articles traitant de corrélation. Certains auteurs ont proposé des solutions : [4] propose l’utilisation de fenêtres adaptatives, idée reprise par [5], qui montre que cela ne suffit pas et préconise des fenêtres qui évitent les contours. Nous allons montrer que le phénomène d’adhérence peut être réduit par un choix adéquat de la norme de comparaison des fenêtres homologues du couple. Il a été déjà remarqué [1, 2, 3], que dans certaines situations, la norme  $L^1$  donnait de meilleurs résultats en stéréoscopie. [1] en donne même une démonstration, peu concluante.

Dans cette contribution, nous considérons d’abord un modèle mathématique réaliste d’image de terrain avec discontinuités correspondant à un saut de relief et textures. Nous analysons le comportement des normes et pseudo-normes  $L^p$  ( $0 < p \leq 2$ ) de la différence des deux images stéréoscopiques. Nous montrons que le pic de corrélation est d’autant plus singulier que  $p$  est petit. Par exemple, notons  $C_p(f, g) = \int \left| \frac{g}{\|g\|_p} - \frac{f}{\|f\|_p} \right|^p$ . Alors si  $f$  est régulière, nous prouvons que, génériquement :

$$C_p(f(x), f(x + \epsilon)) = O(|\epsilon|^p) \text{ quand } \epsilon \rightarrow 0$$

Nous vérifions ces résultats expérimentalement. Ensuite, nous utilisons ces résultats pour montrer que la pseudo-

norme  $L^p$ , pour  $0 < p < 1$ , permet en partie d’éviter le phénomène d’adhérence. En effet, pour  $p$  assez petit, les petites oscillations significatives peuvent dominer les bords dans la norme de comparaison.

## 2 Le phénomène d’adhérence

L’adhérence apparaît lorsque l’on corrèle au voisinage de discontinuités de relief. Pour la décrire, prenons l’exemple suivant : un immeuble de hauteur constante et assez texturé repose sur un sol également texturé (fig.1). On fait l’hypothèse que la différence de niveaux de gris entre l’immeuble et le sol est grande devant les différences de teintes observées dans les textures. Dans l’image de gauche, supposons qu’il y ait occlusion : une partie du sol est cachée par l’immeuble. Soit  $P$  un point du sol à une distance de l’immeuble inférieure à la demi-fenêtre de corrélation. Lorsque l’on recherche dans l’image de droite quel est le meilleur correspondant pour  $P$  au sens de la corrélation, il est fort probable que l’on trouve  $Q$ . En effet, si l’on cherche à minimiser la distance  $L^2$  locale, le meilleur recollement est celui qui superpose le bord de l’immeuble sur lui-même, et identifie ainsi le point  $P$  de l’image de gauche au point  $Q$  de celle de droite. La disparité calculée pour  $P$  se trouve donc être la même que celle de l’immeuble. On reconstruit ainsi un immeuble dilaté de l’ordre d’une demi-fenêtre<sup>1</sup>.

1. Cet effet est encore accentué du côté vers lequel le bâtiment se déplace (ici, le côté gauche). En effet, en plus du phénomène d’adhérence pour les points à une distance au bord inférieure à la demi-fenêtre, les points plus éloignés du bord sont “repoussés” par la présence du bord dans l’image de droite. Ils auront donc tendance à se décaler sur la gauche pour corrélérer.

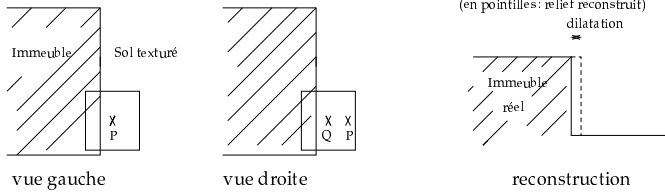


FIG. 1: Le phénomène d'adhérence.

S'il est souvent constaté dans les articles traitant de corrélation, peu d'auteurs essayent d'éviter ce phénomène, et pour cause : il est inhérent au principe même de la corrélation. Néanmoins, c'est entre autres pour éviter ce phénomène qu'ont été développés des algorithmes de corrélation à fenêtre adaptative : la géométrie de la fenêtre peut favoriser ou défavoriser l'edge par rapport à la texture. Nous allons voir que le choix d'une autre norme de comparaison peut être tout aussi déterminant.

### 3 Critères de comparaison

Si l'on minimise la norme  $L^2$  pour trouver les correspondances entre deux images stéréoscopiques, pourquoi ne pas utiliser d'autres critères, et en particulier des comparaisons du type  $\int |f - g|^p$ ?<sup>2</sup> Envisager de mettre les différences à la puissance  $p$  à la place du carré peut avoir deux intérêts. Le premier est que les comparaisons ainsi définies n'atteindront pas forcément leur minimum au même point. Le bon matching peut être trouvé avec une puissance et pas avec une autre. Le deuxième intérêt est que le minimum est atteint plus ou moins "précisément" selon la valeur de  $p$ . Pour mettre en valeur ces deux affirmations, on se donne le modèle suivant : le terrain est décrit par une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on désigne par  $f_\epsilon$  la fonction  $x \mapsto f(x + \epsilon)$ , et on compare  $f$  et  $f_\epsilon$  sur une fenêtre compacte  $K$ . On se restreint à deux cas standards :  $f \in C^2$ , et  $f$  Heavyside. Nous allons évaluer la manière dont le minimum de  $C_p(\epsilon) = \int_K |f - f_\epsilon|^p$  est atteint lorsque l'on fait varier  $p$ .

#### Heavyside (fig.2)

Prenons pour modèle d'image une Heavyside  $f$ , que l'on regarde à travers la fenêtre  $K$ , centrée sur la discontinuité. On a alors :

$$\forall p > 0, \int_K |f_\epsilon - f|^p \stackrel{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} |\epsilon|$$

#### Fonction régulière

On suppose ici que  $f$  est une fonction  $C^1$ . Alors, de façon générale :

$$\int_K |f_\epsilon - f|^p = O(|\epsilon|^p)$$

2. Pour  $0 < p < 1$ ,  $(\int |f - g|^p)^{\frac{1}{p}}$  n'est pas une distance (donc a fortiori pas une norme), mais on notera quand même cette comparaison  $\|f - g\|_p$  par souci de simplicité.

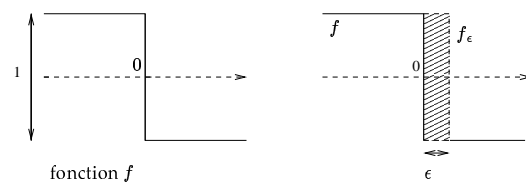


FIG. 2: Comportement pour une Heavyside.

Dans la figure 3, on a représenté les nappes de comparaison obtenues en décalant une image bien régulière (un sinus radial) sur elle-même.

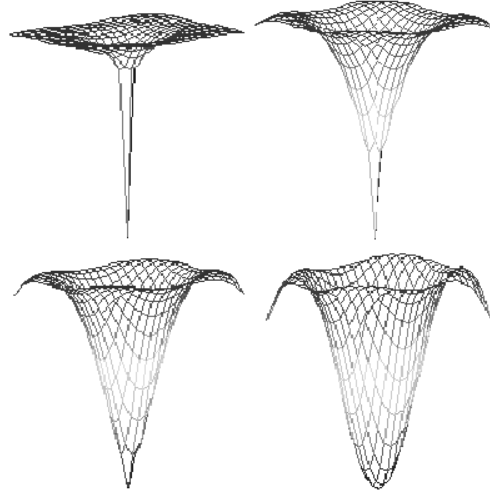


FIG. 3: Exemples de nappes de comparaison pour différentes valeurs de  $p$  (de gauche à droite et de haut en bas,  $p=0.1; 0.5; 1; 2$ ).

Cette propriété peut s'étendre au cas où l'on normalise localement les deux images : si l'on pose

$$\tilde{C}_p(\epsilon) = \int_K \left| \frac{f}{\|f\|_p} - \frac{f_\epsilon}{\|f_\epsilon\|_p} \right|^p$$

on peut montrer que sous des conditions assez peu restrictives<sup>3</sup> sur  $f$ ,

$$\tilde{C}_p(\epsilon) = O(|\epsilon|^p) \text{ lorsque } \epsilon \rightarrow 0$$

### 4 Lien avec l'adhérence

On veut étudier l'influence du critère de comparaison sur le problème de l'adhérence. On a vu que l'adhérence venait du fait que la corrélation privilégiait trop les "edges" par rapport aux textures. Relions les calculs précédents à ce phénomène. Pour la norme  $L^2$  (i.e. pour la corrélation) on a :

- $C_2(\epsilon) = O(|\epsilon|)$  pour une Heavyside.
- $C_2(\epsilon) = O(|\epsilon|^2)$  pour une fonction régulière.

Alors que pour  $p < 1$  :

- $C_p(\epsilon) = O(|\epsilon|)$  pour une Heavyside.
- $C_p(\epsilon) = O(|\epsilon|^p)$  pour une fonction régulière.

Reprenons le modèle qui illustre la description du phénomène d'adhérence (fig.1). On représente ici la coupe en niveaux de gris d'une ligne de l'image (fig.4).

3. Voir calculs en annexe.

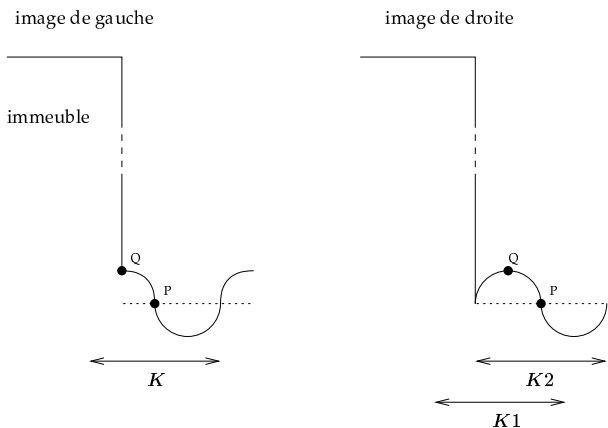


FIG. 4: Coupe en niveaux de gris d'une ligne de l'image.

Voyons, selon le critère de comparaison choisi, quel point de l'image de droite sera choisi comme correspondant de  $P$  pour la fenêtre  $K$ . Les choix extrêmes sont visiblement le recollement de  $K$  sur la fenêtre  $K_1$  (l'"edge" l'emporte,  $Q$  est choisi comme correspondant de  $P$ ), ou sur la fenêtre  $K_2$  (la texture l'emporte, on retrouve  $P$ ). On a vu que la corrélation avait tendance à privilégier le premier recollement. Voyons ce qu'il en est des pseudo-normes  $p$ . Les différences entre les deux images dans chaque configuration sont représentés dans la fig.5.

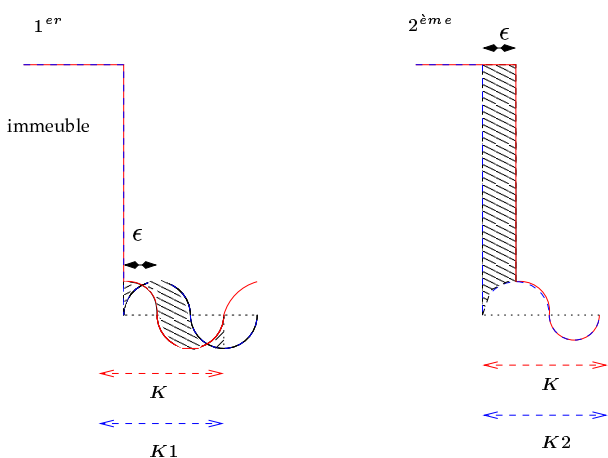


FIG. 5: Recollements extrêmes.

Il est clair que dans la deuxième configuration, quelle que soit la pseudo-norme  $p$  de comparaison choisie, la différence sera de l'ordre de  $H^p \epsilon$  ( $H$  étant la hauteur de l'immeuble). Dans le premier cas, comme la différence n'apparaît que dans la partie "sol texturé" de l'image, qui est bien régulière, la différence est de l'ordre de  $C\epsilon^p$ , où  $C$  est une constante. Les choix de configuration intermédiaires mènent donc à une différence du type  $A\epsilon + B\epsilon^p$ . Par suite, lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , si  $p < 1$ , le recollement privilégié sera le deuxième. Comparer en pseudo-norme  $p$  permettrait donc, dans ce cas idéal, d'éliminer complètement l'adhérence rencontrée avec la corrélation habituelle. Concrètement, cela signifie que l'utilisation d'une pseudo-norme  $p$  n'a de sens que si les deux images sont de bonne qualité et assez proches.

## 5 Expériences

Le couple d'images fig.6 (images 160x160), volontairement simple, représente le modèle précédent. La figure 7 présente les résultats de reconstruction par comparaison en pseudo-norme  $p$  (sans normalisation, fenêtre 20x20). Pour  $p = 2$ , l'immeuble reconstruit est dilaté de l'ordre d'une demi-fenêtre, comme prévu. Lorsque  $p$  passe au dessous de 1 et diminue, la texture prend peu à peu le dessus, et la largeur de l'immeuble reconstruit décroît vers la largeur réelle du bâtiment. En contrepartie, on observe de l'érosion dans les coins du bâtiment : pour les points concernés, l'aire du morceau d'immeuble compris dans la fenêtre de corrélation est plus petite que celle du sol ; quand  $p$  décroît, la texture l'emporte donc sur le bord.

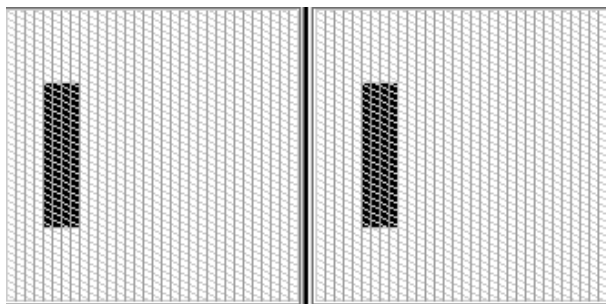


FIG. 6: Couple du modèle (Le bâtiment a une largeur de 20 pixels).



FIG. 7: Carte de disparité pour  $p = 2$  ;  $p = 1$  ;  $p = 0.1$ . La largeur de l'immeuble prend les valeurs successives :  $l=34$  ;  $l=32$  ;  $l=29$ .

L'exemple suivant (fig.8) est une paire stéréo, pour laquelle on a calculé les cartes de disparité (fig.9) pour différentes valeurs de  $p$ . Il s'avère que le choix de  $p < 1$  améliore la localisation du bord par rapport au cas  $p = 2$ , surtout quand la taille de la fenêtre est grande (ici fenêtre 20x20). Ceci s'explique aisément : sur cette image réelle, les bords (de la lampe, par exemple) ont une certaine épaisseur ; or, dans notre modèle, on se sert de la différence de comportement des pseudo-normes  $p$  vis-à-vis d'une discontinuité et d'une fonction régulière. Par suite, pour que l'adhérence puisse être diminuée de manière significative, il faut que le bord de l'objet soit suffisamment mince devant la taille de la fenêtre.

## 6 Conclusion

Nous avons montré que les pseudo-normes  $p$  ( $p < 1$ ), utilisées avec de grandes fenêtres, permettent de réduire significativement l'adhérence. L'utilisation de telles fenêtres, à laquelle on renonce justement avec la norme  $L^2$ , peut

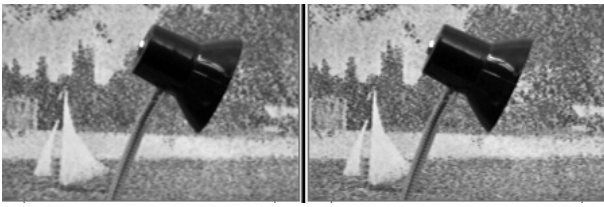


FIG. 8: Paire stéréo.

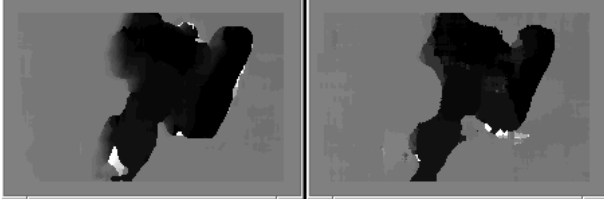


FIG. 9: Cartes de disparité pour  $p = 2$  ;  $p = 0.1$ .

donc être en partie réhabilitée.

Les pseudo-normes  $p$ , lorsque  $p < 1$  ne sont pas forcément indiquées pour calculer toute une carte de disparité. Elles sont moins robustes que la corrélation dans les zones plates. Cependant, elles permettent une localisation plus précise des discontinuités. Cela semble indiquer que le choix d'une norme plus complexe, voire adaptative (sur le modèle des fenêtres adaptatives précédemment citées) peut s'avérer intéressant.

## 7 Annexe

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction  $C^2$ .  $f_\epsilon$  est la fonction  $x \mapsto f(x + \epsilon)$ , et on compare  $f$  et  $f_\epsilon$  sur une fenêtre compacte  $K$ .

### 7.1 Evaluation de $\tilde{C}_2(\epsilon)$

$$\tilde{C}_2(\epsilon) = 2 - 2 \frac{\int_K f f_\epsilon}{\|f\|_2 \|f_\epsilon\|_2}. \text{ Or,}$$

$$\begin{aligned} & \int_K f(x) f_\epsilon(x) dx \\ &= \int_K f(x) \left( f(x) + \nabla f(x) \cdot \epsilon + \frac{1}{2} D^2 f(x + \theta_x \epsilon)(\epsilon, \epsilon) \right) dx \\ &= \|f\|_2^2 \times \left( 1 + \frac{\int f((\nabla f \cdot \epsilon) + \frac{1}{2} D^2 f(\epsilon, \epsilon))}{\|f\|_2^2} + O(|\epsilon|^3) \right) \end{aligned}$$

De même, pour le dénominateur :

$$\begin{aligned} \|f_\epsilon\|_2 &= \left( 1 + \frac{\int (f(\nabla f \cdot \epsilon) + \frac{1}{2} f D^2 f(\epsilon, \epsilon) + \frac{1}{2} (\nabla f \cdot \epsilon)^2)}{\|f\|_2^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\int ((\nabla f \cdot \epsilon) f)^2}{\|f\|_4^2} + O(|\epsilon|^3) \right) \times \|f\|_2 \end{aligned}$$

Les termes en  $\epsilon$  s'annulent, et finalement,

$$C(\epsilon) = \frac{1}{2} \left( \frac{\int (\nabla f \cdot \epsilon)^2}{\|f\|_2^2} - \frac{\int ((\nabla f \cdot \epsilon) f)^2}{(\|f\|_4^2)} \right) + O(|\epsilon|^3)$$

Dans le cas général, le terme en  $|\epsilon|^2$  n'a pas de raison de s'annuler. Donc,

$$C(\epsilon) \sim cte \times |\epsilon|^2$$

### 7.2 Evaluation de $\tilde{C}_1(\epsilon)$

$$\tilde{C}_1(\epsilon) = \int_K \left| \frac{f}{\|f\|_1} - \frac{f_\epsilon}{\|f_\epsilon\|_1} \right|$$

Or,

$$\forall x, \exists \theta \in [0, 1], f_\epsilon(x) = f(x) + \nabla f(x + \theta \epsilon) \cdot \epsilon$$

Par suite :

$$\|f_\epsilon\|_1 = \int_K |f(x) + \nabla f(x + \theta \epsilon) \cdot \epsilon| dx$$

On peut donc encadrer  $\|f_\epsilon\|_1$  entre deux termes :

$$\|f\|_1(1 - C|\epsilon|) \leq \|f_\epsilon\|_1 \leq \|f\|_1(1 + C|\epsilon|)$$

encadrement qui n'a d'intérêt que lorsque  $|\epsilon|$  est assez petit (pour que le terme de gauche soit positif). Par suite, il existe  $A(\epsilon)$ , bornée par la constante  $C$ , telle que

$$\|f_\epsilon\|_1 = \|f\|_1(1 + A(\epsilon)|\epsilon|)$$

On en déduit :

$$\tilde{C}_1(\epsilon) = \frac{1}{\|f\|_1} \int_K \left| \frac{f(x) + \nabla f(x + \theta \epsilon) \cdot \epsilon}{1 + A(\epsilon)|\epsilon|} - f(x) \right| dx$$

Par conséquent :

$$\tilde{C}_1(\epsilon) = \frac{1}{\|f\|_1} \int_K |\nabla f(x) \cdot \epsilon - f(x) A(\epsilon)| \epsilon| + O(|\epsilon|^2)| dx$$

D'où, génériquement :

$$\tilde{C}_1(\epsilon) \sim cte \times |\epsilon|$$

**Rem :** Pour  $p < 1$ , la démonstration est la même que celle qui précède.

## Références

- [1] P.Maragos, *Morphological correlation and mean absolute error criteria*, 1989.
- [2] A.Shemer, D.Mendlovic, G.Shabtay, P.Garcia-Martinez and J.Garcia, *Modified morphological correlation based on bit-map representations*, Applied Optics, Vol. 38, No.5, Feb. 1999.
- [3] S.Zhang and M.A.Karim, *Illumination-invariant pattern recognition with joint -transform-correlator-based morphological correlation*, Applied Optics, Vol.38, No.35, Dec. 1999.
- [4] T.Kanade, M.Okutomi, *A Locally Adaptive Window for Signal Matching*, International Journal of Computer Vision, 1992.
- [5] J-L.Lotti and G.Giraudon, *Adaptative Window Algorithm for Aerial Image Stereo*, in Spatial Information from Digital Photogrammetry and Computer Vision, Munich, Sep. 1994.