

Modèle Markovien de la densité de probabilité des erreurs et application au calcul de la probabilité de propagation d'erreur de l'égaliseur à retour de décision pondérée

Alban GOUPIL, Jacques PALICOT

FT R&D / DMR / DDH
4 rue du Clos Courtel, BP 59, 35512 Cesson-Sévigné Cedex, France
{alban.goupil, jacques.palicot}@rd.francetelecom.com

Résumé – Une méthode de calcul de la probabilité de propagation des erreurs des égaliseurs à retour de décision (ERD) est proposée et provient d'un modèle Markovien de la densité de probabilité des erreurs. Ce nouveau modèle est une généralisation de celui proposé dans [1]. Il est obtenu par l'analyse du mélange de gaussiennes des erreurs dont les proportions suivent un processus de Markov. Cette analyse montre que l'égaliseur à retour de décision pondérée (ERDP) [2–4] est moins sensible que l'ERD classique à la propagation d'erreur.

Abstract – A markovian model of the error probability density for decision feedback equalizer (DFE) is proposed and its application to the error propagation probability computation is derived. The model is a generalization of the Lütkemeyer and Noll model proposed in [1]. It is obtained by the analysis of the gaussian mixture distribution of the errors which follows a Markov Process. The analysis of this process shows that the error propagation probability of the Weighted DFE [2–4] is less than the one of the classical DFE.

1 Introduction

La propagation des erreurs dans les égaliseurs à retour de décision (ERD) qui dégrade l'EQM constitue le frein principal à leur utilisation. Cette propagation des erreurs peut être vue comme la conséquence de deux phénomènes [2] : le retour des erreurs de décision dans le filtre arrière et la divergence de l'algorithme d'adaptation. Nous nous intéresserons ici qu'à l'aspect filtrage et donc au premier phénomène.

Plusieurs auteurs [5–9] ont borné la probabilité d'erreur des ERD en prenant en compte cette propagation. Plus récemment, [1, 10] proposent des modèles de cette propagation. Cependant dans le cas de l'ERDP, il n'est plus possible d'utiliser ces méthodes puisque les valeurs des erreurs ne sont plus à valeur discrète mais continue. Il s'agit donc ici de trouver un modèle pour l'ERDP qui devienne équivalent à celui de [10] dans le cas particulier d'un ERD simple, et d'utiliser ce modèle pour quantifier l'apport de l'ERDP vis-à-vis de l'ERD pour le filtrage.

2 Présentation de l'ERDP

L'ERDP (cf. figure 1) se différencie de l'égaliseur à retour de décision par l'ajout de deux fonctions. La première calcule une confiance symbole par symbole (donc sans mémoire). La seconde utilise cette confiance pour pondérer les décisions retournées dans le filtre arrière et l'erreur de décision utilisée par l'algorithme d'adaptation des coefficients.

Le calcul de la confiance est simplement une fonction

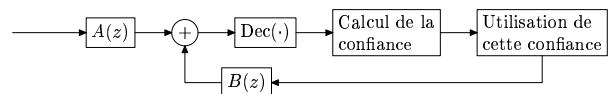


FIG. 1 – Architecture de l'ERDP

non linéaire de l'estimation de l'erreur [2] qui dans le cas d'une modulation en quadrature peut être décomposée par une confiance en phase et une en quadrature [3] afin d'améliorer les performances. Cependant pour alléger les notations, seule les modulations d'amplitudes seront considérées mais l'extension pour la MAQ reste simple.

3 Modèle des erreurs

3.1 Structure équivalente

Pour simplifier l'étude, on peut montrer que l'ensemble canal plus ERD ou ERDP est équivalent à la structure de la figure 2. La différence entre l'ERDP et l'ERD se situe (pour la partie filtrage) dans le choix de la fonction U qui calcule une décision douce. Dans le cas de l'ERD classique, U est la fonction de seuillage FD . Et pour l'égaliseur linéaire récursif (ELR), U est la fonction identité. On trouve donc que l'ERD et l'ELR sont des cas particuliers de l'ERDP. Pour simplifier le modèle, on considère dorénavant que le bruit n_k est un bruit additif gaussien de variance σ_n^2 .

La figure 2 montre qu'il y a trois types d'erreur exactes (*i.e.* basées sur les données) :

- $e_k = d_k - \tilde{d}_k$ l'erreur de sortie ;
- $\hat{e}_k = d_k - \hat{d}_k$ l'erreur de décision ;

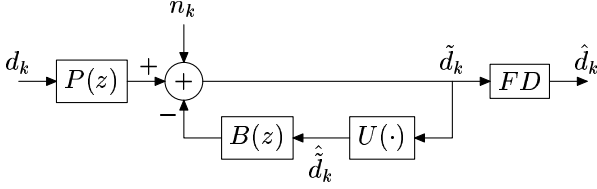


FIG. 2 – Structure équivalente de l'ERDP

– $\tilde{e}_k = d_k - \hat{d}_k$ l'erreur retournée dans le filtre arrière. L'utilisation d'une fonction douce comme fonction de décision introduit donc un nouveau type d'erreur qui n'existait pas dans le cadre de l'ERD puisque dans ce cas on avait $\tilde{e}_k = e_k$. C'est à cause de cette particularité que les résultats de travaux précédents [1, 5–12] doivent être adaptés.

3.2 Équation clef

La sortie douce de l'égaliseur est exprimée, avec les notations de la figure 2, par :

$$\tilde{d}_k = \sum p_i d_{k-i} - \sum b_i \hat{d}_{k-i} + n_k \quad (1)$$

En regroupant les différents termes pour faire apparaître les erreurs, on peut définir un filtre F tel que :

$$\tilde{d}_k - d_k = \sum f_i d_{k-i} + \sum b_i \left[d_{k-i} - U(\hat{d}_{k-i}) \right] + n_k \quad (2)$$

Si l'effet de bord de la constellation est mis de coté, on peut définir une fonction V telle que :

$$d_{k-i} - U(\hat{d}_{k-i}) = V(e_{k-i}) \quad (3)$$

Cette approximation est possible dans le cas de grande constellation ou si le rapport signal à bruit est fort. Elle pourra cependant être levée comme vu dans la suite. Cette approximation est une conséquence de l'hypothèse suivante : les erreurs sont indépendantes des symboles envoyés. En utilisant (3), l'équation (2) devient alors :

$$e_k = - \sum f_i d_{k-i} - \sum b_i V(e_{k-i}) - n_k \quad (4)$$

Cette dernière équation fait ressortir plusieurs phénomènes : l'erreur à l'instant k dépend des erreurs précédentes retournées dans le filtre arrière (deuxième terme), ainsi que de l'IES (premier terme) et du bruit (dernier terme). Nous nous retrouvons donc avec le modèle d'erreur de la figure 3.

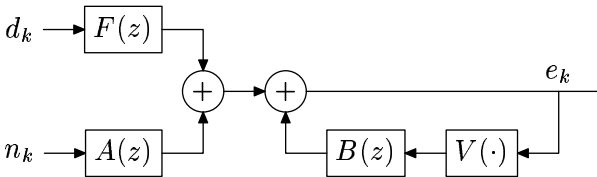


FIG. 3 – Modèle des erreurs

3.3 Modèle markovien

Le modèle développé dans la suite découle de (4). En effet sachant les données et les erreurs précédentes, l'erreur à l'instant k suit un processus gaussien de variance σ_n^2 qui s'exprime par :

$$e_k | E_k, D_k \sim \mathcal{N} \left(- \sum f_i d_{k-i} - \sum b_i V(e_{k-i}), \sigma_n^2 \right) \quad (5)$$

Où D_k représente la « mémoire » de F et E_k celle des L erreurs précédentes $\tilde{e}_{k-1}, \dots, \tilde{e}_{k-L}$ retournées dans le filtre B . Il est possible de s'affranchir du conditionnement sur D_k dans l'équation précédente en utilisant la règle de Bayes. Si les symboles d_k sont i.i.d. alors, en notant N le nombre de vecteurs D_k possibles, (5) devient :

$$\Pr[e_k | E_k] = \frac{1}{N} \sum_{D_k} \Pr[e_k | E_k, D_k] \quad (6)$$

Les relation (5) et (6) définissent une séquence de Markov de longueurs L puisque l'erreur à l'instant k ne dépend que des L erreurs précédentes. Si on note g la densité de probabilité (ddp) d'une variable gaussienne centrée et de variance σ_n^2 , l'expression de la ddp des erreurs est (en notant \otimes la convolution) :

$$f_{e_k}(x) = \sum_{D_k} \int_{\mathbb{R}^L} \frac{g(x + F \otimes D_k + b_i \otimes V(E_k))}{N} f_{E_k}(Y) dY \quad (7)$$

Où $f_{e_k}(x) = \Pr[x < e_k < x + dx]$ la ddp de l'erreur à l'instant k et $f_{E_k}(Y)$ celle du vecteur d'erreurs contenues dans le filtre arrière.

Cette séquence de Markov est difficilement utilisable. Pour en faire une chaîne, il est nécessaire d'approximer la fonction V par une fonction en escalier dont la valeur des paliers est notée v_i et leurs bornes a_i qui peuvent prendre les valeurs $\pm\infty$:

$$V(y) \approx v_i \text{ pour } y \in [a_i; a_{i+1}] \quad (8)$$

L'intérêt de cette « discrétisation » de la fonction V est que l'intégration sur \mathbb{R}^L devient une somme. Il faut voir cependant que les v_i représentent l'ensemble des valeurs des erreurs qui sont retournées dans le filtre arrière. Donc dans le cas d'un ERD classique $v_i \in \{0; \pm 2; \pm 4 \dots\}$. En utilisant (8) dans (7), on trouve :

$$f_{e_k}(x) = \frac{1}{N} \sum_{D_k} \sum_{i_1, \dots, i_L=1}^L g \left(x + \sum_{j=1}^L b_i v_{i_j} + F \otimes D_k \right) \times \int_{a_{i_1}}^{a_{i_1+1}} \dots \int_{a_{i_L}}^{a_{i_L+1}} f_{E_k}(y_1, \dots, y_L) dy_1 \dots dy_L. \quad (9)$$

Ce dernier résultat représente une grande simplification car si on note V_k les L erreurs douces contenues dans le filtre arrière ($V_k = V(E_k)$) et si on définit $\alpha_i^{(k)}$ les valeurs des intégrales multiples, (9) devient :

$$f_{e_k}(x) = \sum_i \alpha_i^{(k)} \left(\sum_{D_k} \frac{g(x + F \otimes D_k + B \otimes V_i)}{N} \right) \quad (10)$$

Donc les erreurs suivent en loi un mélange de gaussiennes. Ce qui est intéressant est que seules les proportions $\alpha^{(k)}$ dépendent du temps k . Il suffit donc de les étudier pour étudier l'ERDP en entier. Il reste maintenant à

trouver la relation temporelle des proportions. Si on réinjecte (10) dans (7), on trouve :

$$\alpha^{(k)} = Q \cdot \alpha^{(k-1)} \quad (11)$$

avec Q une matrice stochastique qui possède certaines symétries (notamment centrale). Cette dernière relation montre le caractère markovien des erreurs.

Physiquement, $\alpha_i^{(k)}$ représente la probabilité d'avoir à l'instant k une certaine distribution des erreurs dans la mémoire du filtre arrière et la matrice de transition Q représente la probabilité d'avoir une distribution des erreurs E_i sachant la distribution E_j précédente $Q_{i,j} = \Pr[E_j \rightarrow E_i]$. On retrouve alors ici le point de départ de l'analyse de l'ERD faite par Willink *et al.* [10].

L'intérêt de cette formulation réside dans la transformation d'un problème d'analyse en un problème matriciel. Par exemple, il est possible d'exprimer la probabilité d'erreur comme un produit scalaire :

$$P_e^{(k)} = 1 - \int_{-1}^1 f_{e_k}(x) dx = T^T \cdot \alpha^{(k)} \quad (12)$$

Une relation similaire existe aussi pour l'EQM. On peut montrer que cette chaîne de Markov est régulière. Donc les proportions tendent vers une limite qui est donnée par le vecteur propre normalisé de valeur propre 1 de Q qui existe toujours puisque Q est une matrice stochastique. On peut donc étudier la chaîne dans l'état stationnaire qui ne dépend pas de la proportion initiale. De plus, les valeurs propres donnent la rapidité de convergence vers l'état sans erreurs sachant qu'il y a eu une erreur à l'instant k .

3.4 Modification du modèle

En modifiant légèrement le modèle précédent, il est possible de supprimer l'hypothèse concernant les effets de bord. En effet pour une modulation d'amplitude à M états (MDA-M), on remarque que l'intégration pour le calcul de P_e se fait sur l'intervalle $[-1; 1]$. Or pour deux symboles, cet intervalle n'est pas correct mais est de la forme $[-\infty; 1]$ ou $[-1; \infty]$. Il est possible en pondérant le vecteur T d'y remédier :

$$T_{\text{modifié}} = \frac{M-1}{M} T \quad (13)$$

Il faut de la même manière modifier Q . En effet, dans le cas d'un ERD avec une MDA-2, l'événement $\tilde{e}_k = +2$ n'est possible que pour une seule configuration ($d_k = 1$ et $\hat{d}_k = -1$). Il en est de même pour l'événement $\tilde{e}_k = -2$. Alors que pour $\tilde{e}_k = 0$ deux cas sont possibles. Ce fait vient de l'effet de bord. Il est possible par une pondération adéquate des lignes de Q de prendre en compte cette remarque.

Une fois modifiée, le modèle présenté ici devient équivalent à celui de Willink *et al.* [10]. Cependant, nous avons voulu le valider sur un exemple simple. Nous avons pris un filtre $P = (1 \ 0, 2 \ 0, 2)$ et un filtre arrière $B = (0, 24 \ 0, 24)$ avec une modulation MDA-2 avec une fonction de décision dérivée de la deuxième règle de l'ERDP [3]. Cette fonction est approximée par une fonction en escalier de 16 paliers. Les résultats donnés sur la figure 4 montrent que le modèle est très proche d'une simulation par une méthode de Monte Carlo.

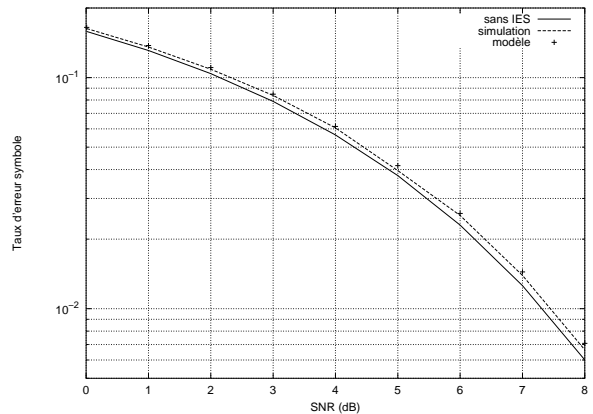


FIG. 4 – Validation du modèle modifié

4 Comparaison ERDP/ERD

4.1 Réduction d'une chaîne de Markov

Le but de cette étude étant de quantifier les performances de l'ERDP relativement à l'ERD, la comparaison des modèles devient nécessaire. Cependant, leur taille dépend fortement du nombre de paliers de l'approximation en escalier de la fonction V . Pour se faire, nous devons réduire les chaînes de Markov. Il faut avant tout remarquer que si l'erreur douce retournée dans le filtre arrière est connue, l'erreur de décision est calculable. Il est donc possible de regrouper les états de l'ERDP (qui contient les erreurs douces) qui seront alors comparable à ceux de l'ERD.

4.1.1 Méthode générale

Soit \mathcal{M} une chaîne de Markov de matrice de transition Q et constituée de M états E_i . On note $k \in E_i$ l'événement : nous sommes à l'instant k dans l'état E_i avec une probabilité $E_i^{(k)}$. Soit F_j les K classes qui forment une partition des états E_i . On définit alors la matrice de regroupement R de taille $K \times M$ par :

$$R_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } E_j \in F_j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (14)$$

Le but de la réduction de la chaîne de Markov est alors de trouver la matrice de transition $P^{(k)}$ du processus discret de la réduction de chaîne définie par :

$$P_{i,j}^{(k)} = \Pr[k \in F_i | k-1 \in F_j] \quad (15)$$

En utilisant les loi de Bayes, P peut s'écrire comme :

$$P^{(k)} = RQC^{(k-1)} \quad (16)$$

où

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{(k)} &= \Pr[k \in E_i | k \in F_j] \\ &= R_{j,i} \cdot \frac{\Pr[k \in E_i]}{\sum_{E_l \in F_j} \Pr[k \in E_l]} \end{aligned} \quad (17)$$

$C_{i,j}$ représente le « poids » d'un états E_i dans sa classe F_j . De par ces définitions, il est clair que l'on a : $RC^{(k)} = I_{K \times K}$ et pour passer d'un processus à l'autre, on peut utiliser :

$$E^{(k)} = C^{(k)} F^{(k)} \quad \text{et} \quad F^{(k)} = R E^{(k)} \quad (18)$$

4.1.2 Application au modèle de l'ERDP

Grâce à ces équations, il est maintenant possible de réduire le modèle de l'ERDP en un modèle équivalent d'un ERD classique. Cela permet entre autre de calculer les valeurs propres pour comparer la vitesse de retour à l'état sans erreurs.

4.2 Probabilité de propagation d'erreur

Pour pouvoir quantifier de façon simple l'apport du filtrage de l'ERDP relativement à l'ERD, il est possible de réduire la chaîne de Markov en un processus à deux états \mathcal{O} et \mathcal{E} (figure 5). Le premier représente un état sans erreurs de décision et le second un état avec au minimum une erreur de décision dans le filtre arrière. La probabilité de propagation des erreurs s'écrit naturellement comme la probabilité de rester dans l'état \mathcal{E} sachant qu'on y était déjà ($\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$) :

$$\begin{aligned} P_{pe} &= \Pr[\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}] \\ &= \Pr[(\hat{e}_k \dots \hat{e}_{k-L}) \neq 0 \mid (\hat{e}_{k-1} \dots \hat{e}_{k-L-1}) \neq 0] \end{aligned} \quad (19)$$

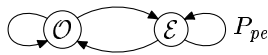


FIG. 5 – Réduction vers 2 états

La figure 6 donne, pour les mêmes conditions que dans la section 3.4, la probabilité de propagation des erreurs en fonction du rapport signal à bruit.

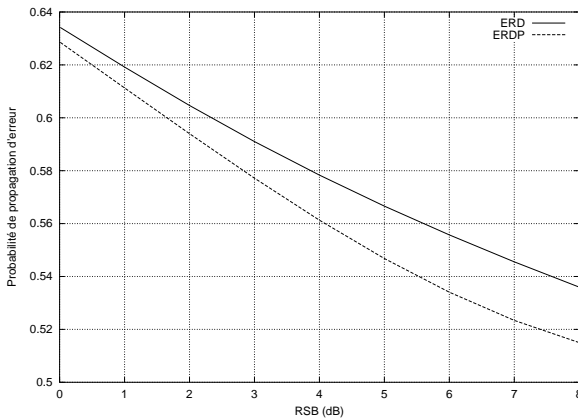


FIG. 6 – P_{pe} pour l'ERDP et l'ERD

La probabilité de propagation d'erreur mesure la capacité d'absorption des erreurs d'un ERD(P). C'est à dire qu'elle quantifie l'effet mémoire du filtre arrière au niveau des erreurs. Les résultats de la simulation de la figure 6 montre alors bien que l'ERDP limite la propagation des erreurs par rapport à l'ERD classique. Le probabilité de propagation des erreurs de l'ERD et de l'ERDP se rejoignent naturellement lorsque le rapport signal à bruit est très faible ou très fort. Il existe aussi une valeur asymptote lorsque le rapport signal à bruit augmente qui dépend de la longueur du filtre arrière et qui semble être égale sur les simulations à $\frac{L-1}{L}$.

5 Conclusion

Le modèle du filtrage de l'ERDP proposé ici dont les simulations montrent la très bonne adéquation avec la réalité est suffisant pour pouvoir atteindre la probabilité de propagation des erreurs qui permet une mesure de ce phénomène limitatif des ERD. Une simulation confirme ensuite que l'ERDP diminue la propagation d'erreur par rapport à l'ERD.

Les études futures tenteront d'inclure l'algorithmique dans ce modèle et de trouver les coefficients optimaux de l'ERDP en prenant en compte la propagation des erreurs.

Références

- [1] C. LÜTKEMEYER et T. G. NOLL. A probability state model for the calculation of the BER degradation due to error propagation in decision feedback equalizers. In *ITC*, Porto Carras, Greece, juin 1998.
- [2] J. PALICOT. Égaliseur à retour de décision pondérées et à propagation d'erreurs limitée. In *Proceedings of GRETSI'99*, Vannes, France, septembre 1999.
- [3] J. PALICOT et C. ROLAND. A weighted decision feedback equalizer with complex decomposition of the reliability function. In *Proceedings of ICT'00*, Acapulco, Mexico, mai 2000.
- [4] ———. Improvement of the WDFE performance thanks to a non linear amplification of the reliability function. In *Proceedings of ICT'01*, Bucarest, Roumanie, juin 2001.
- [5] D. L. DUTTWEILER, J. E. MAZO et D. G. MESSERSCHMITT. An upper bound on the error probability in decision-feedback equalization. *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-20, n° 4, pp. 490–497, juillet 1974.
- [6] R. A. KENNEDY, B. D. O. ANDERSON et R. R. BITMEAD. Tight bounds on the error probabilities of decision feedback equalizers. *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-35, n° 10, pp. 1022–1028, octobre 1987.
- [7] S. A. ALTEKAR et N. C. BEAULIEU. Upper bounds to the error probability of decision feedback equalization. *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 39, n° 1, pp. 145–156, janvier 1993.
- [8] N. C. BEAULIEU. Bounds on recovery times of decision feedback equalizers. *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 42, n° 10, pp. 2786–2794, octobre 1994.
- [9] W. W. CHOY et N. C. BEAULIEU. Improved bounds for the error recovery times of decision feedback equalization. *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 43, n° 3, pp. 890–902, mai 1997.
- [10] T. J. WILLINK, P. H. WITTKKE et L. L. CAMPBELL. Evaluation of the effect of intersymbol interference in decision-feedback equalizer. *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 48, n° 4, pp. 629–635, avril 2000.
- [11] J. E. SMEE et N. C. BEAULIEU. Error-rate evaluation of linear equalization and decision feedback equalization with error propagation. *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 46, n° 5, pp. 656–665, mai 1998.
- [12] N. C. BEAULIEU. The evaluation of error probabilities for intersymbol and cochannel interference. *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 39, n° 12, pp. 1740–1749, décembre 1991.