

Résonance stochastique dans un détecteur bayésien optimal

François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), Université d'Angers,
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, FRANCE.

chapeau@univ-angers.fr, <http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>

Résumé – Un détecteur optimal peut voir sa performance améliorée par une augmentation du niveau de bruit. Ceci est établi au moyen d'un mélange signal-bruit non linéaire où le bruit agit sur la phase d'un signal périodique. Le détecteur bayésien optimal réalisant le minimum C_{\min} du coût moyen de détection est déterminé. Des conditions où C_{\min} est diminué lorsque le niveau du bruit augmente sont démontrées, à la fois de façon théorique et par simulation Monte-Carlo du détecteur optimal.

Abstract – An optimal detector can have its performance improved by an increase of the noise level. This is established with a nonlinear signal-noise mixture where the noise acts on the phase of a periodic signal. The optimal Bayesian detector achieving the minimum C_{\min} of the average detection cost is derived. Conditions where C_{\min} is decreased when the noise level is raised are exhibited, both theoretically and with a Monte Carlo simulation of the optimal detector.

1 Introduction

La résonance stochastique est un effet non linéaire par lequel la présence, voire l'ajout, de bruit est capable de favoriser le signal utile (voir [1, 2] pour des revues récentes). Cet effet paradoxal a été mis en évidence pour la première fois il y a environ une vingtaine d'années. Il a depuis lors été étendu et observé dans une grande variété de processus non linéaires, incluant des circuits électroniques [3, 4, 5], des dispositifs optiques [6, 7], des systèmes neuronaux [8, 9]. La résonance stochastique peut survenir sous diverses formes, selon les signaux, selon le système réalisant le couplage signal-bruit non linéaire, et selon la mesure de performance qui est améliorée grâce au bruit.

On a pu ainsi mettre en évidence des systèmes non linéaires pour lesquels le rapport signal sur bruit en sortie [10, 1], ou l'intercorrélation entrée-sortie [11, 12], ou l'information mutuelle entrée-sortie [13, 14], ou la probabilité de détection en sortie [15, 16], pouvaient être améliorés par ajout de bruit.

Cependant, jusqu'à présent, la résonance stochastique a été mise en évidence uniquement dans des systèmes ou des détecteurs *sous-optimaux* [17, 18]. Dans chaque situation où la résonance stochastique a été établie, pour une mesure de performance donnée, une amélioration par ajout de bruit est possible uniquement pour la performance de dispositifs sous-optimaux ; et si le dispositif optimal est introduit, alors sa performance subit une dégradation monotone lorsque le niveau de bruit est augmenté.

Ici, nous présentons un détecteur *optimal*, dont la performance peut être améliorée par ajout de bruit. Nous nous plaçons dans le cadre classique de la détection optimale [19]. Un parmi deux signaux connus $s_0(t)$ ou $s_1(t)$ est mélangé à un bruit $\eta(t)$, de façon à fournir le signal bruité $x(t)$ qui est observé. À partir de l'observation de $x(t)$, on souhaite décider si $x(t)$ est formé de $s_0(t)$ mélangé au bruit (hypothèse H_0), ou de $s_1(t)$ mélangé au bruit

(hypothèse H_1). La mesure de performance est un coût moyen bayésien standard, et l'on considère le détecteur optimal qui minimise ce coût. Le niveau de bruit est mesuré par l'amplitude efficace de $\eta(t)$. L'intuition commune est que le coût de détection du détecteur optimal augmente lorsque le niveau du bruit croît. Cette intuition prévaut, en effet, pour des mélanges signal-bruit additifs avec du bruit gaussien. Néanmoins, en présence de mélanges non linéaires avec du bruit non gaussien, les possibilités de prouver généralement cette intuition manquent. Il s'avère en fait que cette intuition n'est pas vraie en général. Nous montrons ici un détecteur optimal dont le coût de détection peut être diminué en opérant à des niveaux de bruit plus élevés. Pour ce faire, nous considérons un mélange signal-bruit non linéaire constitué par un signal périodique pollué par un bruit de phase.

2 Détection bayésienne optimale

Nous revoyons brièvement les éléments de la détection bayésienne optimale [19], afin de manifester clairement leur validité générale et leur applicabilité au mélange signal-bruit non linéaire que nous considérerons.

Pour le problème général de détection formulé dans l'Introduction, nous ajoutons que l'hypothèse H_0 (respectivement H_1) se produit avec la probabilité a priori P_0 (respectivement $P_1 = 1 - P_0$). Sur le signal observé $x(t)$, on prélève N échantillons $x_k = x(t_k)$ aux instants distincts t_k pour $k = 1$ à N . Un détecteur donné décide H_0 quand l'observation $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ tombe dans la région \mathcal{R}_0 de \mathbb{R}^N , et décide H_1 quand \mathbf{x} tombe dans la région complémentaire \mathcal{R}_1 de \mathbb{R}^N . On introduit les quatre coûts élémentaires C_{ij} de faire la décision H_i lorsque l'hypothèse H_j est valide, i, j de 0 à 1, avec nécessairement $C_{10} > C_{00}$ et $C_{01} > C_{11}$ pour pénaliser les mauvaises décisions. Le

coût moyen de détection est alors

$$\begin{aligned} C &= P_0 C_{00} \int_{\mathcal{R}_0} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0) d\mathbf{x} + P_1 C_{01} \int_{\mathcal{R}_0} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1) d\mathbf{x} \\ &+ P_0 C_{10} \int_{\mathcal{R}_1} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0) d\mathbf{x} + P_1 C_{11} \int_{\mathcal{R}_1} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1) d\mathbf{x} , \end{aligned} \quad (1)$$

où $p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_j)$ est la densité de probabilité d'observer \mathbf{x} quand \mathbf{H}_j est valide, et la notation $\int \cdot d\mathbf{x}$ représente l'intégrale à N dimensions $\int \dots \int \cdot dx_1 \dots dx_N$.

Comme \mathcal{R}_0 et \mathcal{R}_1 sont complémentaires dans \mathbb{R}^N , on a

$$\int_{\mathcal{R}_0} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_j) d\mathbf{x} = 1 - \int_{\mathcal{R}_1} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_j) d\mathbf{x} , \quad (2)$$

ce qui injecté dans l'Éq. (1) donne

$$\begin{aligned} C &= P_0 C_{00} + P_1 C_{01} + \\ &\int_{\mathcal{R}_1} \left[P_0 (C_{10} - C_{00}) p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0) - \right. \\ &\quad \left. P_1 (C_{01} - C_{11}) p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1) \right] d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (3)$$

Le détecteur bayésien optimal atteint le minimum global du coût C en rendant le plus négative possible l'intégrale dans l'Éq. (3), c'est-à-dire en incluant dans \mathcal{R}_1 tous et seulement les points \mathbf{x} pour lesquels son intégrande est négatif. Cela revient à utiliser le rapport de vraisemblance

$$L(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1)}{p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0)} = \frac{\Pr\{\mathbf{x}|\mathbf{H}_1\}}{\Pr\{\mathbf{x}|\mathbf{H}_0\}} \quad (4)$$

pour implémenter le test

$$\begin{aligned} &\mathbf{H}_1 \\ L(\mathbf{x}) &\gtrless \frac{P_0 C_{10} - C_{00}}{P_1 C_{01} - C_{11}} . \\ &\mathbf{H}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

Le minimum C_{\min} atteint pour le coût moyen C par le détecteur bayésien optimal s'écrit alors

$$\begin{aligned} C_{\min} &= \int_{\mathbb{R}^N} \min \left[P_0 C_{00} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0) + P_1 C_{01} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1) , \right. \\ &\quad \left. P_0 C_{10} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0) + P_1 C_{11} p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1) \right] d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (6)$$

Comme $\min(a, b) = (a + b - |a - b|)/2$, il vient

$$\begin{aligned} C_{\min} &= \frac{1}{2} \left[P_1 (C_{01} + C_{11}) + P_0 (C_{10} + C_{00}) \right] - \\ &\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| P_1 (C_{01} - C_{11}) p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1) - \right. \\ &\quad \left. P_0 (C_{10} - C_{00}) p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0) \right| d\mathbf{x} . \end{aligned} \quad (7)$$

3 Mélange signal-bruit non linéaire

Nous introduisons maintenant un problème spécifique de détection relevant du traitement de la Section 2. Soit

$w(t)$ une onde périodique de période unité. Un des deux signaux à détecter est l'onde $w(t)$ à la fréquence ν_0 , soit $s_0(t) = w(\nu_0 t)$ (probabilité a priori P_0). L'autre signal à détecter est la même onde $w(t)$ à la fréquence $\nu_1 \neq \nu_0$, soit $s_1(t) = w(\nu_1 t)$ (probabilité a priori P_1). Un bruit $\eta(t)$ pollue les phases de façon à produire les signaux observables

$$x(t) = w[\nu_0 t + \eta(t)] \quad (\text{hypothèse } \mathbf{H}_0), \quad \text{ou} \quad (8)$$

$$x(t) = w[\nu_1 t + \eta(t)] \quad (\text{hypothèse } \mathbf{H}_1). \quad (9)$$

De tels signaux périodiques pollués par du bruit de phase apparaissent, par exemple, lorsqu'une onde périodique se propage dans un milieu ou à travers une interface fluctuant. Une onde plane tombant sur un détecteur bougeant aléatoirement conduit aussi à cet effet. Le bruit de phase est aussi naturellement présent dans les oscillateurs, les boucles à verrouillage de phase.

À partir de l'observation $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$ on doit décider entre les hypothèses \mathbf{H}_0 ou \mathbf{H}_1 , c'est-à-dire détecter si l'onde corrompue par le bruit de phase est de fréquence ν_0 ou ν_1 .

Nous considérons que $\eta(t)$ est un bruit blanc, ainsi les probabilités conditionnelles définies à la Section 2 se factorisent comme $\Pr\{\mathbf{x}|\nu_1\} = \prod_{k=1}^N \Pr\{x_k|\nu_1\}$ et $\Pr\{\mathbf{x}|\nu_0\} = \prod_{k=1}^N \Pr\{x_k|\nu_0\}$. Aussi, $\eta(t)$ est supposé stationnaire, de fonction de répartition statistique $F_\eta(u)$ et de densité de probabilité $f_\eta(u) = dF_\eta/du$.

Pour permettre un traitement analytique complet du détecteur optimal, nous considérons le cas simple où $w(t)$ est un signal carré de période 1 avec $w(t) = 1$ si $t \in [0, 1/2)$ et $w(t) = -1$ si $t \in [1/2, 1)$. Nous avons alors les probabilités

$$\Pr\{x_k = 1|\nu_1\} = \Pr\{w[\nu_1 t_k + \eta(t_k)] = 1\} \quad (10)$$

$$= \Pr\left\{ \nu_1 t_k + \eta(t_k) \in \bigcup_{\ell} [\ell, \ell + 1/2) \right\} \quad (11)$$

$$= \Pr\left\{ \eta(t_k) \in \bigcup_{\ell} [\ell - \nu_1 t_k, \ell - \nu_1 t_k + 1/2) \right\} \quad (12)$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} \int_{\ell - \nu_1 t_k}^{\ell - \nu_1 t_k + 1/2} f_\eta(u) du \quad (13)$$

$$= \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} [F_\eta(\ell - \nu_1 t_k + 1/2) - F_\eta(\ell - \nu_1 t_k)] , \quad (14)$$

ℓ entier, et

$$\Pr\{x_k = -1|\nu_1\} = 1 - \Pr\{x_k = 1|\nu_1\} . \quad (15)$$

De la même façon

$$\Pr\{x_k = 1|\nu_0\} = \sum_{\ell=-\infty}^{+\infty} [F_\eta(\ell - \nu_0 t_k + 1/2) - F_\eta(\ell - \nu_0 t_k)] , \quad (16)$$

et

$$\Pr\{x_k = -1|\nu_0\} = 1 - \Pr\{x_k = 1|\nu_0\} . \quad (17)$$

Une fois donnés $F_\eta(u)$, P_0 et les coût C_{ij} , quand une réalisation \mathbf{x} est observée, les Éqs. (14)–(17) permettent une évaluation explicite du rapport de vraisemblance de

l'Éq. (4) sous la forme $L(\mathbf{x}) = (\prod_{k=1}^N \Pr\{x_k|\nu_1\})/(\prod_{k=1}^N \Pr\{x_k|\nu_0\})$, rendant possible une implémentation explicite du détecteur bayésien optimal de l'Éq. (5). Ce détecteur réalise le coût de détection minimal C_{\min} qui, selon l'Éq. (7), est calculable explicitement comme

$$C_{\min} = \frac{1}{2}[P_1(C_{01} + C_{11}) + P_0(C_{10} + C_{00})] - \frac{1}{2} \sum_{x_1=-1}^1 \dots \sum_{x_N=-1}^1 \left| P_1(C_{01} - C_{11})\Pr\{x_1|\nu_1\} \dots \Pr\{x_N|\nu_1\} - P_0(C_{10} - C_{00})\Pr\{x_1|\nu_0\} \dots \Pr\{x_N|\nu_0\} \right|, \quad (18)$$

la somme multiple courant sur les 2^N états possibles pour l'observation \mathbf{x} .

4 Amélioration par le bruit

Nous montrons maintenant qu'il existe des conditions où la performance du détecteur optimal, mesurée par C_{\min} de l'Éq. (18), peut être améliorée lorsque l'amplitude efficace σ_η du bruit $\eta(t)$ croît.

Pour illustration, nous considérons d'abord le cas où $\eta(t)$ est un bruit gaussien généralisé, associé à la densité standardisée

$$f_{gg}(u) = A \exp(-|bu|^\alpha) \quad (19)$$

avec $A = (\alpha/2)[\Gamma(3/\alpha)]^{1/2}/[\Gamma(1/\alpha)]^{3/2}$ et $b = [\Gamma(3/\alpha)/\Gamma(1/\alpha)]^{1/2}$, paramétrée par l'exposant $\alpha > 0$. Pour $\alpha = 2$ on retrouve la densité gaussienne ; pour $0 < \alpha < 2$ on obtient des densités leptokurtiques de queue plus épaisse que la gaussienne ; pour $2 < \alpha < +\infty$ on a des densités platikurtiques de queue plus fine que la gaussienne, jusqu'à $\alpha = +\infty$ qui donne la densité uniforme.

La densité de $\eta(t)$ est fournie par $f_\eta(u) = f_{gg}(u/\sigma_\eta)/\sigma_\eta$. Nous choisissons $C_{10} = C_{01} = 1$ et $C_{00} = C_{11} = 0$, dans ce cas le coût moyen C représente la probabilité globale d'une erreur de détection. La Fig. 1 représente l'évolution de la performance (la probabilité d'erreur) C_{\min} de l'Éq. (18) du détecteur optimal, en fonction de σ_η , pour différentes valeurs de α . Nous avons observé que pour $\alpha > 2$, la probabilité d'erreur C_{\min} évolue de façon non monotone quand σ_η croît, au lieu d'une augmentation monotone, qui est obtenue pour $\alpha \leq 2$. Il existe donc des plages pour σ_η où la probabilité d'erreur du détecteur optimal décroît lorsque le niveau du bruit croît.

L'amélioration par ajout de bruit de la performance du détecteur optimal se retrouve avec bien d'autres conditions. Par exemple, considérons les mélanges de gaussiennes, associés à la densité standardisée ($0 < m < 1$)

$$f_{gm}(u) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-m^2}} \left\{ \exp\left[-\frac{(u+m)^2}{2(1-m^2)}\right] + \exp\left[-\frac{(u-m)^2}{2(1-m^2)}\right] \right\}. \quad (20)$$

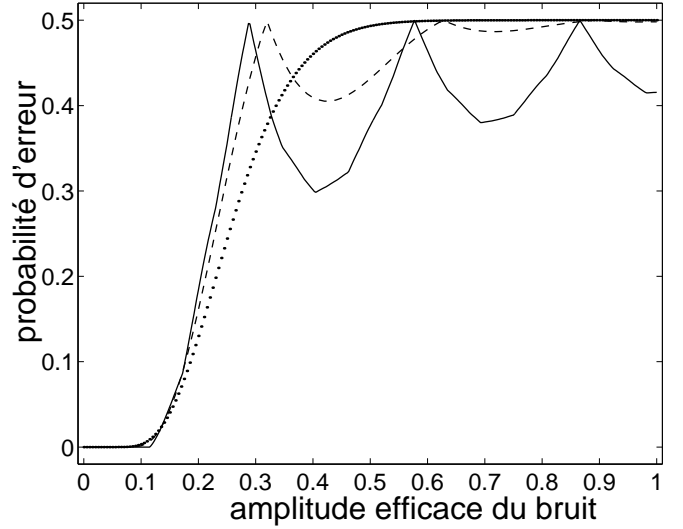


FIG. 1: Probabilité d'erreur de détection du détecteur optimal, en fonction de l'amplitude efficace σ_η du bruit centré $\eta(t)$ choisi gaussien (pointillés), gaussien généralisé avec $\alpha = 4$ (tirets), uniforme (trait plein). Aussi $P_0 = 0.5$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 2/3$, $N = 11$ échantillons équirépartis avec un pas temporel 0.2 de $t_1 = 0$ à $t_{11} = 2$.

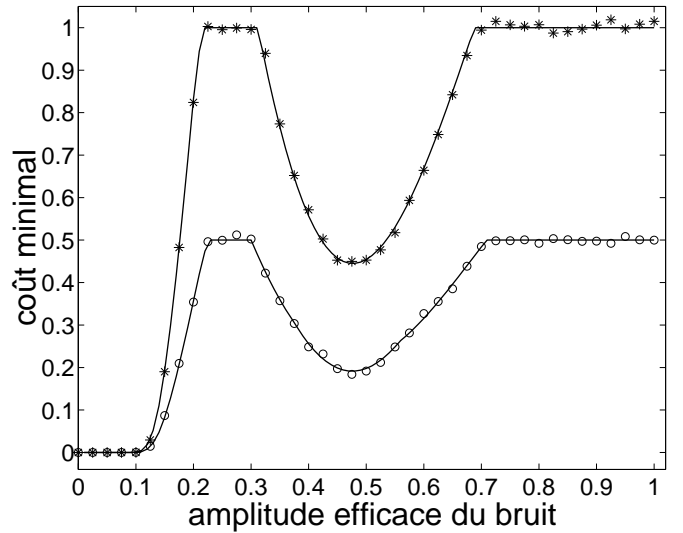


FIG. 2: Coût de détection minimal C_{\min} du détecteur optimal, en fonction de l'amplitude efficace σ_η du bruit centré $\eta(t)$ mélange de gaussiennes de densité $f_{gm}(u/\sigma_\eta)/\sigma_\eta$ de l'Éq. (20) avec $m = 0.95$. Les traits pleins représentent C_{\min} de l'Éq. (18) ; les points discrets représentent C_{\min} évalué numériquement sur 10^4 tirages de Monte-Carlo du test (5) pour chaque σ_η ; avec $C_{10} = 2$ et $C_{01} = 5$ (*), $C_{10} = 1$ et $C_{01} = 2$ (o). Par ailleurs, $C_{00} = C_{11} = 0$, $P_0 = 0.5$, $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 2/3$, $N = 6$ échantillons équirépartis avec un pas temporel 0.3 de $t_1 = 0$ à $t_6 = 1.5$.

Avec $f_\eta(u) = f_{gm}(u/\sigma_\eta)/\sigma_\eta$, la Fig. 2 montre à nouveau des évolutions non monotones du coût C_{\min} de la détection optimale, en fonction de σ_η , avec des possibilités de diminuer C_{\min} en augmentant σ_η . La Fig. 2 offre aussi une validation numérique de l'évolution de C_{\min} , obtenue par simulation de Monte-Carlo pour la détection optimale de l'Éq. (5) et l'évaluation de son coût par comptage explicite.

Notons que le détecteur optimal implémenté ici aux Figs. 1–2 est un détecteur cohérent ou synchronisé, qui a accès à une origine temporelle où les ondes $w(\nu_0 t)$ et $w(\nu_1 t)$ ont un front montant sur lequel le détecteur cale sa séquence d'échantillonnage $\{t_k\}$. Néanmoins, on peut facilement vérifier avec l'Éq. (18) que la position de la séquence d'échantillonnage $\{t_k\}$ par rapport à un tel front montant n'est pas critique pour l'obtention d'un coût C_{\min} diminuable par ajout de bruit, et cette position aura peu d'influence sur C_{\min} pourvu que $\{t_k\}$ réalise une couverture suffisamment représentative des ondes $w(\nu_0 t)$ et $w(\nu_1 t)$ en regard de leurs périodes $1/\nu_0$ et $1/\nu_1$. Le comportement d'un détecteur incohérent ou asynchrone, qui verrait le signal $x(t)$ muni d'une phase à l'origine constante mais inconnue dans les Éqs. (8)–(9), peut se déduire en absorbant cette phase à l'origine dans la moyenne du bruit $\eta(t)$. L'exploitation de l'Éq. (18) montre que la possibilité d'un coût C_{\min} diminuable par ajout de bruit est préservée en présence d'une telle phase à l'origine, et également lors d'un moyennage du coût C_{\min} sur cette phase à l'origine distribuée entre 0 et 1.

5 Conclusion

Nous avons montré la possibilité de principe d'améliorer la performance d'un détecteur optimal par ajout de bruit. Il est probable qu'une telle propriété puisse se retrouver dans d'autres situations de mélange signal-bruit non linéaire. Cet état de fait revêt une grande importance conceptuelle, de nature à faire évoluer le statut du bruit dans le contexte du non-linéaire, avec des potentialités d'application en traitement non linéaire du signal.

Références

- [1] L. Gammainoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, "Stochastic resonance", *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, pp. 223–287, 1998.
- [2] S. Mitaim, B. Kosko, "Adaptive stochastic resonance", *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, pp. 2152–2183, 1998.
- [3] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-assisted signal transmission in a nonlinear electronic comparator: Experiment and theory", *Signal Processing*, vol. 56, pp. 293–303, 1997.
- [4] X. Godivier, J. Rojas-Varela, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity", *Electronics Letters*, vol. 33, pp. 1666–1668, 1997.
- [5] D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. G. Stocks, "Stochastic resonance in electrical circuits – I: Conventional stochastic resonance", *IEEE Transactions on Circuits and Systems – II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 46, pp. 1205–1214, 1999.
- [6] B. M. Jost, B. E. A. Saleh, "Signal-to-noise ratio improvement by stochastic resonance in a unidirectional photorefractive ring resonator", *Optics Letters*, vol. 21, pp. 287–289, 1996.
- [7] F. Vaudelle, J. Gazengel, G. Rivoire, X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance and noise-enhanced transmission of spatial signals in optics: The case of scattering", *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 15, pp. 2674–2680, 1998.
- [8] A. Bulsara, A. J. Maren, G. Schnera, "Single effective neuron: Dendritic coupling effects and stochastic resonance", *Biological Cybernetics*, vol. 70, pp. 145–156, 1993.
- [9] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-enhanced transmission of spike trains in the neuron", *Europhysics Letters*, vol. 35, pp. 473–477, 1996.
- [10] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, "Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems", *Physical Review E*, vol. 55, pp. 1478–1495, 1997.
- [11] J. J. Collins, C. C. Chow, T. T. Imhoff, "Aperiodic stochastic resonance in excitable systems", *Physical Review E*, vol. 52, pp. R3321–R3324, 1995.
- [12] F. Chapeau-Blondeau, J. Rojas-Varela, "Nonlinear signal propagation enhanced by noise via stochastic resonance", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 10, pp. 1951–1959, 2000.
- [13] A. R. Bulsara, A. Zador, "Threshold detection of wideband signals: A noise-controlled maximum in the mutual information", *Physical Review E*, vol. 54, pp. R2185–R2188, 1996.
- [14] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 8, pp. 581–590, 1998.
- [15] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara, "Signal detection statistics of stochastic resonators", *Physical Review E*, vol. 53, pp. R2021–R2024, 1996.
- [16] V. Galdi, V. Pierro, I. M. Pinto, "Evaluation of stochastic-resonance-based detectors of weak harmonic signals in additive white Gaussian noise", *Physical Review E*, vol. 57, pp. 6470–6479, 1998.
- [17] F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance and optimal detection of pulse trains by threshold devices", *Digital Signal Processing*, vol. 9, pp. 162–177, 1999.
- [18] S. Kay, "Can detectability be improved by adding noise?", *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 7, pp. 8–10, 2000.
- [19] R. N. McDonough, A. D. Whalen, *Detection of Signals in Noise*, Academic Press, New York, 1995.