

Calcul optimisé des pondérations d'un réseau d'antennes en émission

— Algorithme de l'obèle —

Joël BERTRAND¹, Philippe FORSTER²

¹Laboratoire Électronique et Communication
Conservatoire National des Arts et Métiers,
2, rue Conté, 75003 Paris, France

²Pôle scientifique de Paris X,
1, chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray, France
bertrand@cnam.fr, philippe.forster@cva.u-paris10.fr

Résumé – Dans le contexte des radiocommunications mobiles, nous présentons un algorithme de calcul des pondérations d'un réseau d'antennes desservant plusieurs mobiles grâce à la maximisation du plus mauvais des rapports signal à interférences calculé sur l'ensemble des mobiles. Nous montrons que cet algorithme converge vers l'extremum global du critère.

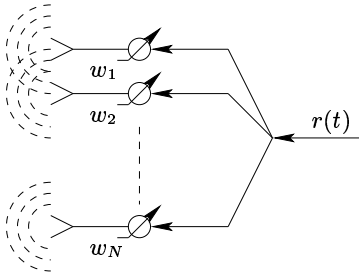
Abstract – Capacity of a mobile network can be increased by the usage of antennas arrays. In this article, we present an new optimization method that computes weights of the array and needed powers. This algorithm consists in minimizing the greatest eigenvalue of a matrix. We have proved that this algorithm converges to the global minimum of the configuration space.

1 Notations

Nous noterons respectivement \mathbf{M}^* et \mathbf{M}^\dagger les matrices conjuguée et transposée conjuguée de \mathbf{M} . Nous noterons aussi matriciellement des inégalités, l'inégalité $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ signifiant dans la suite du texte que quels que soient i et j , $a_{i,j} < b_{i,j}$.

2 Introduction

Nous présentons dans cet article une méthode d'optimisation conjointe des pondérations d'un réseau de N antennes en émission ainsi que des puissances émises vers U récepteurs mobiles.



Considérons une modulation linéaire

$$e(t) = \sum_k s_k p(t - kT) \quad (1)$$

dans laquelle $p(t)$ est la forme d'onde du signal et s_k sont des symboles décorrélés de puissance σ_s^2 . Notons $h_{i,j}(t)$, la réponse impulsionnelle du canal reliant le $i^{\text{ème}}$ capteur de l'antenne d'émission au $j^{\text{ème}}$ mobile et $g_{i,j}(t)$, la réponse impulsionnelle

composite définie comme

$$g_{i,j}(t) = p(t) * h_{i,j}(t) \quad (2)$$

Posons $\mathbf{h}_j(t) = (h_{1,j}(t), \dots, h_{N,j}(t))^T$. De façon similaire, nous définissons

$$\mathbf{g}_j(t) = p(t) * \mathbf{h}_j(t) \quad (3)$$

Considérons le filtre spatial à l'émission \mathbf{w}'_j associé au $j^{\text{ème}}$ mobile. Le signal reçu par le $j^{\text{ème}}$ mobile et destiné au $i^{\text{ème}}$ s'écrit ainsi

$$r_{j,i}(t) = \mathbf{w}'_i{}^\dagger \mathbf{g}_j(t) * e_j(t) \quad (4)$$

Nous pouvons alors montrer que la puissance moyenne du signal $r_{j,i}(t)$ est égale à

$$\mathcal{P}_{j,i} = \mathbf{w}'_i{}^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}'_j \quad (5)$$

dès lors que

$$\mathbf{R}_i = \frac{\sigma_s^2}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_i(t) \mathbf{g}_i^\dagger(t) dt \quad (6)$$

Démonstration

Considérons le signal $r_j(t)$ suréchantillonné d'un facteur $M = T/T_e$ satisfaisant le théorème d'échantillonnage de Shannon

$$r_{j,i}(nT_e) = \mathbf{w}'_i{}^\dagger \sum_k s_k \mathbf{g}_j(nT_e - kT) \quad (7)$$

ainsi que la suite de symbole d_k résultant du suréchantillonnage de s_k par bourrage de zéros. Le signal reçu s'écrit ainsi

$$r_{j,i}(nT_e) = \mathbf{w}'_i{}^\dagger \sum_k d_k \mathbf{g}_j((n - Mk)T_e) \quad (8)$$

et sa puissance instantanée

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} [|r_{j,i}(nT_e)|^2] = \\ & \mathbf{w}_i^\dagger \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathbb{E} [|d_k|^2] \mathbf{g}_j(n - Mk)T_e \mathbf{g}_j^\dagger((n - Mk)T_e) \right) \mathbf{w}_i \quad (9) \end{aligned}$$

Cette puissance est périodique de période M . Sa valeur moyenne sur une période s'écrit après simplification

$$\mathcal{P}_{j,i} = \frac{\sigma_s^2}{M} \mathbf{w}_i^\dagger \left(\sum_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_j(nT_e) \mathbf{g}_j^\dagger(nT_e) \right) \mathbf{w}_i \quad (10)$$

qui est équivalent à l'expression 5 d'après Parseval.

3 Optimisation des P/I

3.1 Présentation du problème

Considérons un réseau de N antennes servant un ensemble de U mobiles répartis dans une cellule. Nous cherchons à rendre minimaux les rapports interférences sur puissance utile reçue de l'ensemble des utilisateurs. D'après les paragraphes précédents, la puissance reçue par l'utilisateur i notée P_i ainsi que l'interférence subie s'écrivent

$$I_i = \sum_{j \neq i} \mathcal{P}_{i,j} = \sum_{j \neq i} \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j \quad \text{et} \quad P_i = \mathcal{P}_{i,i} = \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i \quad (11)$$

Définissons les pondérations normalisées comme étant

$$\mathbf{w}'_i = \sqrt{p_i} \mathbf{w}_i \quad \text{avec} \quad \mathbf{w}'_i \mathbf{R}_i \mathbf{w}'_i = 1 \quad \forall i \quad (12)$$

où p_i est la puissance reçue par le $i^{\text{ème}}$ utilisateur. Le problème que nous nous proposons de résoudre dans ce paragraphe est de rendre maximum le plus mauvais des rapports signal à bruit, ce qui est rigoureusement identique à minimiser le plus grand des rapports I_i/P_i par rapport aux \mathbf{w}_i et p_i , soit

$$\min_{\substack{p_1, \dots, p_U \\ \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_U}} \left(\max_i \frac{\sum_{j=1}^U p_j \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j}{p_i \mathbf{w}'_i \mathbf{R}_i \mathbf{w}'_i} \right) \quad (13)$$

Nous démontrerions aisément qu'à l'optimum, les rapports I_i/P_i sont égaux. Ainsi

$$I_i/P_i = I_j/P_j = C \quad \forall i, j \quad (14)$$

Construisons la matrice \mathbf{F} à composantes toutes positives et définie comme

$$\begin{cases} F_{i,j} = \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j & i \neq j \\ F_{i,i} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Les pondérations normalisées et les puissances satisfont donc à la relation

$$\mathbf{F} \mathbf{p} = C \mathbf{p} \quad (16)$$

où

- $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_U)^T$ avec p_i strictement positif quel que soit i ;
- $\mathbf{w}'_i \mathbf{R}_i \mathbf{w}'_i = 1$;
- $C \geq 0$.

Le problème initial revient donc à déterminer les pondérations ainsi que les puissances minimisant C sous la contrainte 16.

3.2 Optimisation à \mathbf{w}_i fixés

3.2.1 Solution du problème

La solution du problème est du type $C = \lambda_{\max}$ où λ_{\max} est la valeur propre de plus grand module de la matrice \mathbf{F} .

3.2.2 Démonstration

À \mathbf{w}_i fixés, la solution de ce problème se réduit au calcul d'un vecteur propre \mathbf{p} de composantes positives associé à une valeur propre positive de la matrice \mathbf{F} . Par construction, toutes les composantes de la matrice \mathbf{F} sont positives ou nulles. De telles matrices possèdent des propriétés remarquables. En effet, une matrice à coefficients non diagonaux réels strictement positifs et coefficients diagonaux positifs ou nuls possède un vecteur propre de composantes strictement positives associé à la plus grande valeur propre — en module — de cette matrice [4]. Par ailleurs, cette plus grande valeur propre est réelle, positive et simple. Aussi sommes-nous garantis d'avoir un vecteur propre de composantes positives associé à une valeur propre positive dès lors que toutes les termes non diagonaux de la matrice \mathbf{F} sont strictement positifs. En d'autres termes, il existe une solution au problème dès que les matrices \mathbf{R} de covariance du canal sont de rang plein.

Montrons que la solution du problème est du type $C = \lambda_{\max}$ où λ_{\max} est la plus grande valeur propre de la matrice \mathbf{F} . Pour ce faire, considérons \mathbf{p}_d , le vecteur propre droit de \mathbf{F} associé à λ_{\max} , la plus grande valeur propre de \mathbf{F} , ainsi que \mathbf{p}_g , le vecteur proche gauche associé à la même valeur propre de \mathbf{F} .

Par construction, le vecteur \mathbf{p} est solution de la relation

$$\mathbf{F} \mathbf{p} = C \mathbf{p} \quad (17)$$

Aussi avons-nous

$$\mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{F} \mathbf{p} = \lambda_{\max} \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{p} = C \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{p} \quad (18)$$

Or la matrice \mathbf{F} étant de composantes positives, quel que soit i , nous avons $p_{g_i} > 0$ ainsi que $p_i > 0$. Le produit $\mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{p}$ est ainsi non nul, et il vient

$$\lambda_{\max} = C \quad (19)$$

3.3 Optimisation des \mathbf{w}_i

La solution \mathbf{p} est le vecteur propre associé à la valeur propre de \mathbf{F} de plus grand module. La résolution du problème initial revient à minimiser la plus grande valeur propre notée λ_{\max} de cette matrice \mathbf{F} .

4 Algorithme de l'obèle

4.1 Initialisation

Nous initialisons les vecteurs de pondération initiaux $\mathbf{w}_{(0)_i}$ aléatoirement en prenant soin de les normaliser. Ainsi, nous avons

$$\mathbf{w}_{(0)_i}^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_{(0)_i} = 1 \quad (20)$$

4.2 Optimisation

L'algorithme consiste à boucler les deux étapes suivantes.

4.2.1 Première étape: calcul de la plus grande valeur propre de la matrice $\mathbf{F}_{(n)}$

La matrice $\mathbf{F}_{(n)}$ (15), dépendante des vecteurs $\mathbf{w}_{(n)_i}$ est réelle à composantes positives ou nulles. Sauf cas dégénéré en \mathbf{R} , la plus grande valeur propre en module de cette matrice est réelle et positive. Nous calculons dans cette étape cette valeur propre maximale $\lambda_{\max(n)}$ et $\mathbf{p}_{g(n)}$, le vecteur propre gauche associé.

4.2.2 Deuxième étape: calcul des plus petites valeurs propres généralisées dans les métriques \mathbf{R}_j des matrices $\mathbf{T}_{(n)_j}$

Calculons les matrices hermitiennes $\mathbf{T}_{(n)_j}$ définies comme

$$\mathbf{T}_{(n)_j} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^U p_{g(n)_i} \mathbf{R}_i \quad (21)$$

Nous calculons dans cette deuxième étape la plus petite valeur propre généralisée $\mu_{(n)_j}$ de la matrice $\mathbf{T}_{(n)_j}$ dans la métrique \mathbf{R}_j et $\mathbf{w}_{(n+1)_j}$, le vecteur propre associé normalisé tel que $\mathbf{w}_{(n+1)_j}^\dagger \mathbf{R}_j \mathbf{w}_{(n+1)_j} = 1$.

Les étapes 1 et 2 sont répétées jusqu'à convergence — démontrée au paragraphe 5 — vers la valeur minimale de λ_{\max} notée λ_{opt} et associée aux pondérations $\mathbf{w}_{(\text{opt})_j}$.

4.3 Calcul des puissances nécessaires

Les puissances d'émission vers les différents utilisateurs sont données par le vecteur propre droit de la matrice \mathbf{F} évaluée en $\mathbf{w}_{(\text{opt})_j}$ et associé à la valeur propre λ_{opt} .

5 Convergence de l'algorithme

5.1 Résultat préliminaire

5.1.1 Énoncé

Considérons la fonction de \mathbf{F} paramétrée par \mathbf{u} et \mathbf{v}

$$f(\mathbf{F}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{v}}{\mathbf{u}^\dagger \mathbf{v}} \quad (22)$$

où \mathbf{F} est la matrice à composantes positives dépendant des pondérations \mathbf{w}_1 à \mathbf{w}_U , et \mathbf{u} et \mathbf{v} , deux vecteurs de composantes positives et normés à 1. Les valeurs des \mathbf{w}_i minimisant la fonction f ne dépendent pas de \mathbf{v} . Les \mathbf{w}_i rendant minimale cette fonction f sont donnés par les vecteurs propres des matrices \mathbf{T}_i définies comme

$$\mathbf{T}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^U u_j \mathbf{R}_j \quad (23)$$

dans les métriques \mathbf{R}_i .

5.1.2 Démonstration

Nous avons

$$\mathbf{u}^\dagger \mathbf{F} \mathbf{v} = \sum_i \sum_{j \neq i} u_i v_j \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j v_j \quad (24)$$

$$= \sum_j v_j \mathbf{w}_j^\dagger \left(\sum_{i \neq j} u_i \mathbf{R}_i \right) \mathbf{w}_j \quad (25)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\mathbf{T}_j}$

ce qui montre que les \mathbf{w}_i rendant minimale la grandeur 22 sont indépendants du vecteur \mathbf{v} .

Comme le vecteur \mathbf{v} est de composantes positives, les pondérations rendant l'expression précédente minimale s'obtiennent en minimisant chacun des termes de cette somme:

$$\mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{T}_i \mathbf{w}_i \quad (26)$$

sous la contrainte

$$\mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i = 1 \quad (27)$$

Pour ce faire, utilisons un multiplicateur de Lagrange

$$L(\mathbf{w}_i, \mu) = \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{T}_i \mathbf{w}_i + \mu \left(1 - \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i \right) \quad (28)$$

Aussi avons-nous

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{w}_i^\dagger} &= \mathbf{T}_i \mathbf{w}_i - \mu \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i \\ &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

puis

$$\mu \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{w}_i \quad (30)$$

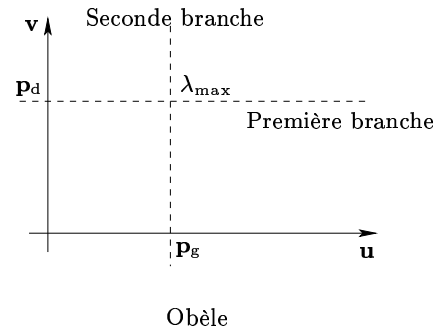
ce qui revient à dire que \mathbf{w}_i est vecteur propre généralisé associé à la valeur propre généralisée μ de la matrice \mathbf{T}_i dans la métrique \mathbf{R}_i .

Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mu \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i &= \mu \\ &= \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{T}_i \mathbf{w}_i \end{aligned} \quad (31)$$

qui n'est autre que la quantité que nous cherchons à rendre minimale. La solution \mathbf{w}_i du problème est ainsi le vecteur propre généralisé de \mathbf{T}_i dans la métrique \mathbf{R}_i associé à la valeur propre minimale μ .

5.2 Convergence de l'algorithme



Le résultat préliminaire nous permet de démontrer la convergence de l'algorithme. En effet, à l'itération n , nous avons

$$f(\mathbf{F}_n; \mathbf{p}_{g_n}, \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{p}_{g_n}^\dagger \mathbf{F}_n \mathbf{v}}{\mathbf{p}_{g_n}^\dagger \mathbf{v}} = \lambda_{\max(n)} \quad (32)$$

puis nous optimisons la matrice \mathbf{F} qui rend minimale la valeur de la fonction f . Nous obtenons ainsi

$$\forall \mathbf{v} \quad \frac{\mathbf{p}_{g_n}^\dagger \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{v}}{\mathbf{p}_{g_n}^\dagger \mathbf{v}} \leq \lambda_{\max(n)} \quad (33)$$

en particulier

$$\frac{\mathbf{p}_{g_n}^\dagger \mathbf{F}_{n+1} \mathbf{p}_{d_{n+1}}}{\mathbf{p}_{g_n}^\dagger \mathbf{p}_{d_{n+1}}} = \lambda_{\max(n+1)} \leq \lambda_{\max(n)} \quad (34)$$

Comme quel que soit n , $\lambda_{\max(n)}$ est positive, nous obtenons une suite de termes positifs décroissante, donc l'algorithme converge. Par ailleurs, la matrice \mathbf{F}_n rend minimale la grandeur f à l'itération n , donc l'algorithme converge vers le minimum global de l'espace.

6 Résolution d'un autre problème de contrôle de puissance

Posons s_i , le rapport signal à interférence plus bruit minimal admissible en réception par le $i^{\text{ème}}$ utilisateur. Nous nous proposons maintenant de calculer les puissances p_i et les pondérations à l'émission \mathbf{w}_i de façon à assurer

$$\frac{p_i \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} p_j \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j} \geq s_i \quad (35)$$

Parmi toutes les puissances p_i satisfaisant à l'inégalité, la solution rendant la somme des puissances minimale est celle qui donne l'égalité. Aussi cherchons-nous à résoudre

$$\frac{p_i \mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i}{\sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} p_j \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j} = s_i \quad (36)$$

soit en tenant compte de la contrainte $\mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_i = 1$

$$p_i = s_i \sigma_i^2 + \sum_{j \neq i} p_j s_i \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j \quad (37)$$

Écrite sous forme matricielle, cette relation devient

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}' \mathbf{p} + \mathbf{c} \quad (38)$$

dès lors que

$$\begin{cases} F'_{i,j} = s_i \mathbf{w}_j^\dagger \mathbf{R}_i \mathbf{w}_j & i \neq j \\ F'_{i,i} = 0 \end{cases} \quad (39)$$

et

$$c_i = \sigma_i^2 s_i \quad (40)$$

Ainsi que nous le montrons en annexe, l'équation 38 en \mathbf{p} admet une solution de composantes positives si et seulement si la plus grande valeur propre en module de la matrice \mathbf{F}' est strictement inférieure à 1. Nous disposons déjà d'un algorithme capable de minimiser la plus grande valeur propre d'une matrice ne comportant que des coefficients positifs. Ainsi, nous pouvons reprendre la version précédente de l'algorithme en remplaçant les matrices \mathbf{R}_i par $s_i \mathbf{R}_i$ pour minimiser la plus grande valeur propre de \mathbf{F}' , jouant maintenant le rôle de \mathbf{F} puis, si cette dernière est strictement inférieure à 1, résoudre le système 38 pour calculer les puissances nécessaires.

7 Résultats

Considérons un système de radiocommunication à accès multiple à répartition par les codes, et mettons en communication avec la station de base un ensemble de soixante-quatre mobiles utilisant un facteur d'étalement de quarante-huit. Ces mobiles sont répartis de façon uniforme dans l'espace autour de la station de base et le seuil nécessaire à la démodulation est fixé à $E_b/N_0 = 6$ dB. Le niveau de bruit, quant à lui, est fixé à $\sigma^2 = 10^{-5}$. Dans ces conditions et sur une cinquantaine de simulations, nous n'avons pu obtenir de solution grâce au contrôle de puissance classique, alors que dans deux cas sur trois,

l'algorithme de l'obèle permet d'effectuer ce même contrôle de puissance.

Il faut néanmoins noter que si cet algorithme permet de diminuer la puissance émise par la station de base tout en formant des diagrammes de rayonnement permettant d'atteindre un rapport signal sur interférences donné, il reste plus coûteux en ressources — mémoire et temps de calcul — que le contrôle élémentaire de puissance résultant de la résolution des équations 16 ou 38 avec les pondérations du réseau d'antennes données par les plus grands vecteurs propres droits des différentes matrices de covariance des canaux.

Annexe

La solution du système 38 s'écrit comme

$$\mathbf{p} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}')^{-1} \mathbf{c} \quad (41)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que ce système admette une solution \mathbf{p} à composantes positives est que la plus grande valeur propre de la matrice \mathbf{F}' soit strictement inférieure à 1.

En effet,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{c} + \mathbf{F}' \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{p} &= \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{c} + \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{F}' \mathbf{p} \\ \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{p} &= \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{c} + \lambda_{\max} \mathbf{p}_g^\dagger \mathbf{p} \end{aligned}$$

ce qui impose comme condition nécessaire que la grandeur λ_{\max} soit strictement inférieure à 1.

Par ailleurs, λ_{\max} étant strictement inférieure à 1,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= (\mathbf{I} - \mathbf{F}')^{-1} \mathbf{c} \\ &= (\mathbf{I} + \mathbf{F}' + \mathbf{F}'^2 + \dots) \mathbf{c} \end{aligned} \quad (42)$$

impose comme condition suffisante λ_{\max} strictement inférieure à 1. Ainsi, s'il existe une solution à l'équation 38, l'algorithme de l'obèle permet de l'atteindre.

References

- [1] Derek GERLACH, Arogyaswani PAULRAJ. *Base station transmitting antenna arrays for multipath environments. Signal Processing*, tome 54, (1996), pages 59–73.
- [2] Farrokh RASHID-FARROKHI, Ray LIU et Leandros TASSIULAS. *Transmit beamforming and power control for cellular wireless systems. IEEE Journal on selected areas in communications*, tome 16, no. 8, (1998), pages 1437–1449.
- [3] Pæstum, Projet RNRT, 1998-2001.
- [4] R.A. HORN, C.R. JOHNSON. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, 1985.