

# Identification de signaux multicomposantes à phase polynomiale et à amplitude variable

Hélène COTTEREAU, Jean Marie PIASCO, Christian DONCARLI

IRCCyN, UMR CNRS 6597

1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 03, France

helene.cottureau@irccyn.ec-nantes.fr, jean-marie.piasco@irccyn.ec-nantes.fr

christian.Doncarli@irccyn.ec-nantes.fr

**Résumé** – Cet article traite de l'estimation et de la localisation de signaux multicomposantes à phase polynomiale et à amplitude variable. L'originalité est dans l'association des approches paramétriques par HAF et un filtrage de Kalman non stationnaire sur une modélisation ARIMA des amplitudes. Les résultats sont obtenus en simulation et sur des signaux réels de test d'enceintes acoustiques.

**Abstract** – The purpose of this paper is the localization and the estimation of multichirped signals with variable amplitude. The originality lays in the association of a Kalman filter and the HAF approach, by means of an ARIMA amplitudes' modelisation. Results are given for simulated signals and real audio signals from loudspeakers' test.

## 1 Introduction

La fonction d'ambiguïté d'ordre supérieur (HAF high-order ambiguity function [8]), introduite par Peleg [7, 5, 6] sous le nom de transformée polynomiale de phase (TPP), est particulièrement bien adaptée à l'estimation des paramètres des signaux à phase polynomiale. Nous présentons ici une extension de cette méthode aux signaux à amplitude variable. Nous proposons d'utiliser, pour estimer ces amplitudes, des filtres de Kalman linéaires et non stationnaires. On présente des résultats obtenus en simulation et sur des signaux réels de test d'enceintes acoustiques.

## 2 Rappel sur la HAF

Les définitions données ici sont écrites à temps discret. On utilise dans ce paragraphe des signaux monocomposantes à amplitude constante. Les extensions aux multicomposantes à amplitude variable sont données dans le paragraphe suivant.

### 2.1 Définitions

Le modèle de signal est :

$$z[n] = s[n] + w[n] \quad 0 \leq n \leq N$$

avec :

$$s[n] = b \exp \left[ j \sum_{m=0}^M a_m n^m \right]$$

où  $w[n]$  est un bruit blanc gaussien centré circulaire de variance  $\sigma^2$ .

Pour toute valeur de  $l$ , un entier positif fixé par l'utilisateur, le résultat de l'application de l'opérateur  $DP_M$  à

un signal  $s[n]$  est défini par :

$$\begin{aligned} DP_{1,s}[n, l] &= s[n] \\ DP_{2,s}[n, l] &= s[n]s^*[n-l] \\ DP_{M,s}[n, l] &= DP_{2, DP_{M-1,s}}[n, l] \end{aligned} \quad (2)$$

La HAF d'ordre  $M$  et de paramètre  $l$  du signal  $s[n]$  est la transformée de Fourier (TF) du résultat de l'application de  $DP_M$  à  $s[n]$  soit :

$$HAF_{M,s}[d, l] = \mathcal{TF}(DP_{M,s}[n, l]) \quad (3)$$

### 2.2 Propriétés

Parmi les propriétés de la HAF [7], on retiendra ici que pour un signal  $s$  décrit par l'équation (1) :

$$DP_{M,s}[n, l] = \exp(j(\omega_0 n + \varphi_0)) \quad (4)$$

où  $\omega_0$  et  $\varphi_0$  sont liées à  $l$  par :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= M! l^{M-1} a_M \\ \varphi_0 &= (M-1)! l^{M-1} a_{M-1} - 0.5(M-1)M! l^M a_M \end{aligned}$$

et  $(M-1)l \leq n \leq N-1$ .

La  $HAF_{M,s}[d, l]$  est donc, pour tout  $l$  fixé, une raie à la fréquence-doppler réduite  $\omega_0/2\pi$  dont la valeur est liée à  $a_M$  par l'équation (4). La localisation de cette raie permet donc d'estimer le coefficient de plus haut degré par :

$$\hat{a}_M = \frac{1}{M!} \frac{\omega_0}{l^{M-1}}$$

### 2.3 Estimation des paramètres

La procédure d'estimation des paramètres est la suivante: ayant estimé  $a_M$  (cf 2.2), on démodule le signal en le multipliant par  $\exp(-j\hat{a}_M n^M)$ . Le signal résultant

présente une phase polynomiale de degré  $M - 1$  dont on calcule la  $\text{HAF}_{M-1}$ , et tout ceci jusqu'à  $\text{HAF}_1$ , ce qui fournit les estimations de  $a_{M-1}, \dots, a_1$ . Enfin,  $a_0$  et  $b$  sont estimés par les formules analytiques du maximum de vraisemblance [1].

## 2.4 Discussion

A chaque étape, on choisit  $l_m$  de telle sorte que la précision de l'estimation du coefficient soit la meilleure possible. D'après [7, 5], l'erreur d'estimation est la plus faible pour :  $l = \frac{N}{M}$  pour  $M = 2, 3$  et  $l = \frac{N}{M+2}$  pour  $M \geq 4$ . On appelle ces valeurs de  $l$  les *paramètres de délai optimaux*.

Le bruit est le deuxième facteur qui influe sur la précision de l'estimation. D'après [7], plus le RSB est petit, plus l'erreur au carré de l'estimation de  $a_m$  s'éloigne de la borne de Cramer-Rao (estimation optimale).

Si à une étape, le coefficient est mal estimé (mauvais choix de  $l$ , trop de bruit), toute sa contribution au signal n'est alors pas retirée. La précision de l'estimation du coefficient suivant sera encore plus mauvaise et l'erreur se propage sur les estimations suivantes.

## 3 Signaux à amplitude variable

### 3.1 Signaux monocomposantes

On suppose à présent l'amplitude  $b$  variable et, on la représente par un modèle ARIMA. Dans un but de simplicité, on choisit, par exemple, un signal de Wiener :

$$b[n+1] = b[n] + v[n]$$

où  $v[n]$  est un bruit blanc.

L'estimation des amplitudes  $b[n]$  à chaque instant peut se faire par l'algorithme précédent (2.3, [7]). Ceci conduit généralement à des estimations très bruitées. Nous proposons de calculer ces estimations en remplaçant les formules de Boashash par le filtre de Kalman linéaire, non stationnaire mis en œuvre sur le système markovien suivant [4] :

$$\begin{cases} b[n+1] &= b[n] + v[n] \\ z[n] &= \left[ \exp(j \sum_{m=0}^M \hat{a}_m n^m) \right] b[n] + w[n] \end{cases} \quad (5)$$

On procède par filtrage aller-retour (lisseur de Fraser). Le choix de la variance  $q$  de  $v[n]$  permet de régler la nervosité du filtre.

### 3.2 Signaux multicomposantes

Le signal est ici de la forme :

$$s[n] = \sum_{p=1}^K s_p[n] \quad (6)$$

où  $s_p[n]$  est une composante à phase polynomiale telle que :

$$s_p[n] = b_p[n] \exp(j \sum_{m=0}^{M_p} a_{m,p} n^m)$$

On suppose  $K$  connu. La  $\text{HAF}_M$  de  $s[n]$  comporte maintenant des termes propres qui sont des raies aux pulsations réduites  $\omega_{p,M} = M! l_{M-1} a_{M,p}$  avec  $p = 1 \dots K$  et des termes d'interférences [7]. Dans ce cas on procède en calculant la  $\text{HAF}_M$  du signal et on démodule par la raie la plus énergétique. On applique alors l'algorithme précédent (3.1). On obtient ainsi les coefficients de cette première composante qui est alors synthétisée et retranchée du signal d'origine. L'ensemble de ces opérations est alors répétée pour toutes les composantes.

On observe généralement une bonne estimation des paramètres de phase mais les amplitudes sont perturbées par les autres composantes encore contenues dans le signal. Nous proposons, après l'estimation des  $a_{m,p}$  de toutes les composantes, de mettre en œuvre un filtre de Kalman global. On pose :

$$\begin{aligned} B[n] &= [b_1[n] \dots b_K[n]]^T \\ C[n] &= [\exp(j\hat{\phi}_1[n]) \dots \exp(j\hat{\phi}_K[n])] \\ \hat{\phi}_p[n] &= \sum_{m=0}^{M_p} \hat{a}_{m,p} n^m \end{aligned}$$

Le modèle markovien complet s'écrit alors :

$$\begin{cases} B[n+1] &= B[n] + V[n] \\ z[n] &= C[n]B[n] + w[n] \end{cases} \quad (7)$$

où la matrice de covariance de  $V[n]$  est  $Q = q\mathbb{I}$ .

## 4 Résultats

### 4.1 Signaux tests

La méthode est testée sur un signal (4096 points) bruité par un bruit blanc circulaire (20 dB) comprenant sept chirps dont les pentes sont recensées dans le tableau 1 et dont on visualise la représentation temps fréquence idéalisée sur la figure 1. Les modules des composantes sont de l'ordre de 1 pour les quatre premières et 0.1 pour les trois dernières. Les résultats de l'estimation sont donnés

TAB. 1: Caractéristiques des composantes

| Numéro | Phase initiale | Fréquence initiale | Pente           |
|--------|----------------|--------------------|-----------------|
| 1      | 0              | 0.00090703         | $7.462910^{-6}$ |
| 2      | $\pi/2$        | 0.031467           | $1.484210^{-5}$ |
| 3      | $\pi$          | 0.092246           | $2.951810^{-5}$ |
| 4      | $2\pi/3$       | 0.21312            | $5.870410^{-5}$ |
| 5      | $\pi/4$        | 0.016187           | $1.115210^{-5}$ |
| 6      | $3\pi/4$       | 0.061857           | $2.21810^{-5}$  |
| 7      | $\pi/3$        | 0.15268            | $4.411110^{-5}$ |

figure 4. Les composantes sont affichées dans leur ordre de traitement par l'algorithme. Les coefficients de fréquence initiale ( $\hat{a}_{i1}$ ) sont estimés à  $10^{-4}$  près et les pentes ( $\hat{a}_{i2}$ ) à  $10^{-8}$ . Les modules des quatre chirps les plus puissants sont estimés en premier et sont les mieux reconstruits. Pour les trois derniers, les estimations sont légèrement plus bruitées, ce qui est normal vu la différence d'ordre de grandeur des composantes.

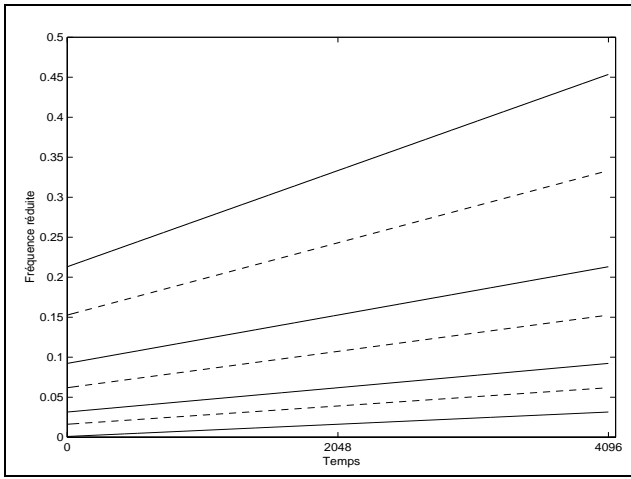


FIG. 1: TFR idéalise du signal test.- Les chirps en pointillé ont un module 10 fois inférieur à ceux en trait plein.

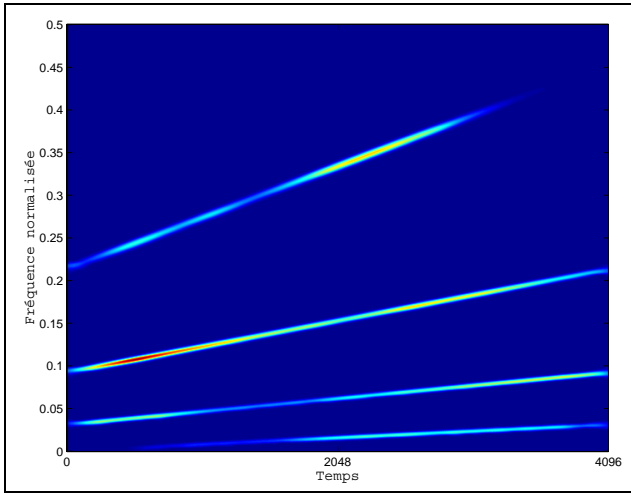


FIG. 2: Spectrogramme (fenêtre gaussienne de 409 points) de la réponse de l'enceinte au signal test.

## 4.2 Signaux réels

Ces signaux sont la réponse d'une enceinte acoustique (pS10 de marque NEXO) à un signal test dont la partie utile est constituée de quatre chirps (quatre premières composantes du tableau 1) d'amplitude constante 1. La mise en œuvre du test est exposée en détails dans [2]. Le contenu fréquentiel de la réponse de l'enceinte est (bien entendu) le même que celui du signal test (voir le spectrogramme de la réponse figure 2), et seule l'amplitude de chaque composante a été modifiée. Les résultats donnés par HAF sont comparés à ceux d'une méthode explorant les droites énergétiques du spectrogramme. On récupère la puissance le long de ces droites (une par composante) et on obtient un profil. Celui-ci correspond à la puissance de la composante multipliée par une constante (fonction d'ambiguïté de la fenêtre en 0) [3]. Les résultats sont observés sur la figure 3. Les coefficients estimés par HAF, des pentes et des fréquences initiales, sont donnés dans le tableau 2. On retrouve les paramètres du signal test et on constate que les profils estimés par les deux méthodes sont quasiment superposés.

TAB. 2: Caractéristiques estimées par HAF des composantes du signal réel. Le numéro donne l'ordre de leur traitement par l'algorithme.

| Ordre de traitement | Fréquence initiale | Pente           |
|---------------------|--------------------|-----------------|
| 4                   | 0.00044916         | $7.618610^{-6}$ |
| 3                   | 0.031469           | $1.485910^{-5}$ |
| 1                   | 0.092225           | $2.953610^{-5}$ |
| 2                   | 0.21309            | $5.867710^{-5}$ |

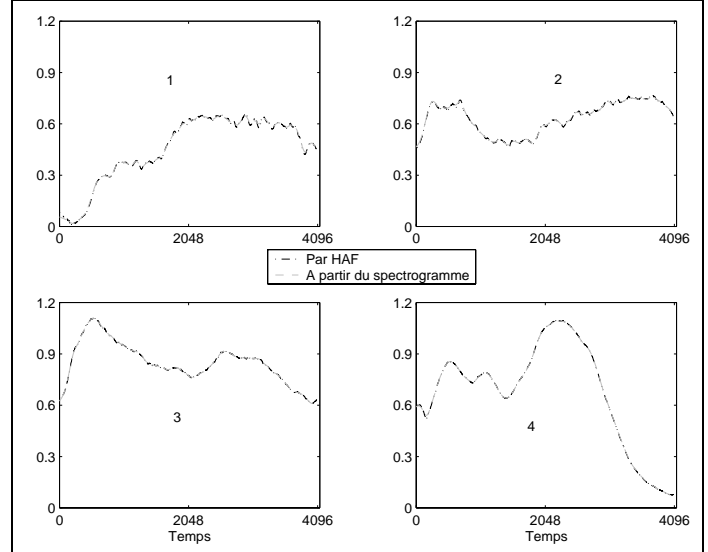


FIG. 3: Comparaison des amplitudes des composantes du signal réel reconstituées par HAF et à partir du spectrogramme (fenêtre gaussienne de 409 points). - Le numéro correspond à la composante du tableau 1.

## 5 Conclusion

La méthode présentée ici permet donc d'estimer à la fois les paramètres fréquentiels de signaux multicomposantes à phase polynomiale et l'amplitude variable de chacune des composantes. Dans les exemples traités, la HAF est utilisée au maximum à l'ordre 2 et le coût en calcul reste faible. Le filtre de Kalman est basé sur un modèle ARIMA et dépend seulement d'un paramètre laissé au choix de l'utilisateur. Des résultats probants ont été obtenus sur des signaux synthétiques et des signaux audio d'enceintes acoustiques.

## Références

- [1] B. Boashash. Estimation and interpreting the instantaneous frequency of a signal-part 1: Fundamentals. *Proc. IEEE*, 80(4):520–538, April 1992.
- [2] M. Davy, H. Cottureau, and C. Doncarli. Loudspeaker fault detection using time-frequency representations. In *Proc. ICASSP*, May 2001, Salt Lake City.
- [3] P. Flandrin. *Temps-fréquence*. Hermès, 1993.
- [4] Walid El Kaakour. *Modélisation et identification des signaux à phase polynomiale*. PhD thesis, Université de Nantes, Ecole Centrale de Nantes, 1998.

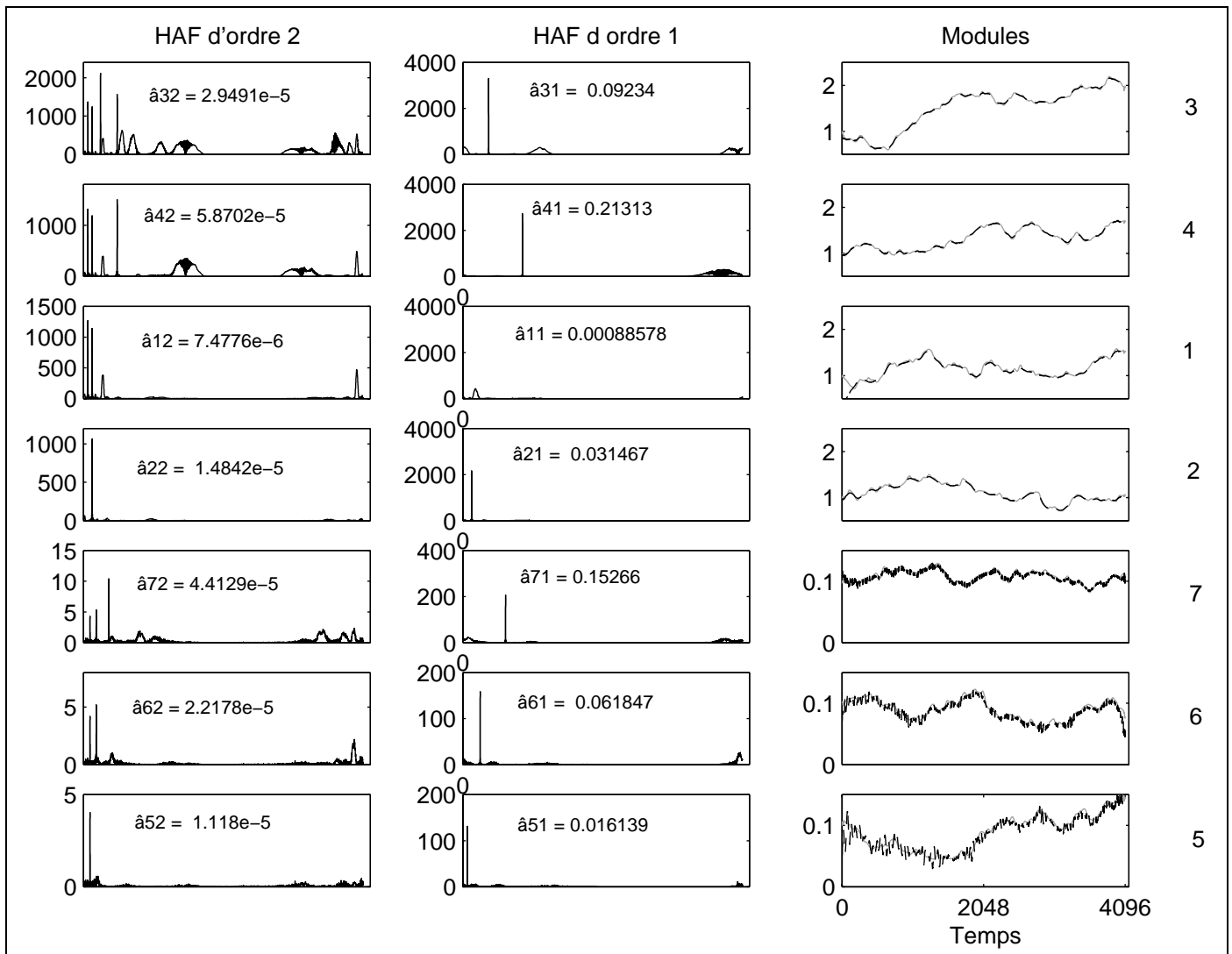


FIG. 4: HAF d'ordre 2 et 1 appliquées au signal test donnant respectivement pente ( $\hat{a}_{i2}$ ) et fréquence initiale ( $\hat{a}_{i1}$ ) de la composante - Comparaison du module reconstruit (pointillé) par le filtre à celui donné à la construction (trait plein) du signal. Le numéro à droite correspond à celui de la composante du tableau 1.

- [5] S. Peleg and B. Friedlander. The discrete polynomial-phase transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(8):1901–1914, August 1995.
- [6] S. Peleg and B. Friedlander. Multicomponent signal analysis using the polynomial phase transform. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(1):378–387, January 1996.
- [7] Shimon Peleg. *Estimation and detection with discrete polynomial transform*. PhD thesis, University of California, Davis, 1993.
- [8] Boaz Porat. *Digital Processing of Random Signals*. Prentice Hall Information and System Sciences. Prentice-hall, 1994.