

Composantes spectrales du Chaos

Véronique GUGLIELMI¹, Danièle FOURNIER-PRUNARET¹

Géza KOLUMBAN², Zoltan JAKO²

¹LESIA, Groupe Systèmes Dynamiques

INSA, 135 Avenue de Rangueil, 31077 Toulouse cedex 4, France

²Department of Measurement and Information Systems

Technical University of Budapest, H-1521 Budapest, Hungary

Veronique.Guglielmi@insa-tlse.fr

Résumé – Nous étudions des signaux chaotiques dans le domaine fréquentiel, et non plus seulement selon les représentations de la dynamique non linéaire. L'analyse spectrale de trois récurrences non inversibles de dimension deux est réalisée, et nous nous attachons plus particulièrement aux relations entre les caractéristiques fréquentielles des signaux et les bifurcations ayant amené au chaos. Il apparaît alors que les représentations en fréquences peuvent être reliées à l'évolution dynamique du système, et fournissent des informations sur la dynamique qui ne sont pas directement disponibles autrement.

Abstract – To fit particular demands which arise in many applications, such as for example spectrum requirements in telecommunication schemes, we study chaotic waveforms through frequency-domain representation instead of conventional nonlinear dynamics. Spectral analysis of 3 kinds of two-dimensional noninvertible maps is performed, and we attach ourselves more particularly to the opportunity of relating frequential characteristics to the bifurcations which have led to chaos. It appears that the frequency-domain representations can be related to the dynamic evolution of the system, and provide some informations on this dynamics which are no longer directly supplied otherwise. Thereby, statistical signal processing is found to be an interesting approach to chaos modelisation.

1. Introduction

Les signaux chaotiques sont générés par des circuits physiques non linéaires [1], faisant intervenir un jeu de paramètres. Selon les valeurs prises par ces paramètres, la dynamique de ces systèmes [2] peut alors changer du tout au tout, en affichant un comportement périodique, pseudo-périodique ou chaotique - i.e. des processus non périodiques déterministes, mais pourtant très similaires à du bruit aléatoire d'un point de vue qualitatif -. Quand se produisent ces changements, les jeux correspondants de paramètres sont appelés valeurs de "bifurcations".

Avant toute analyse spectrale, nous devons nous appuyer sur l'étude mathématique théorique des bifurcations [2][3][4][5]. Plusieurs types de bifurcations existent, qui peuvent être classifiés en différentes catégories. Ici, nous réalisons une analyse spectrale de trois récurrences non inversibles de dimension 2. Il y a essentiellement, pour les exemples présentés dans ce papier, des bifurcations de type "boîtes emboîtées" amenant à du chaos ou des bifurcations de "contact" conduisant à des modifications de la forme de l'attracteur chaotique [2][3][4].

Notons que l'évolution des attracteurs et de leurs bassins (i.e. les jeux de conditions initiales donnant lieu à des séquences qui convergent vers l'attracteur considéré) était connue et est détaillée dans [2][3][4][5].

2. Représentation spectrale

Pour décrire son contenu en fréquences, nous considérons une séquence chaotique x_n comme une réalisation d'un

processus aléatoire discret et stationnaire, et nous estimons la Densité Spectrale de Puissance (DSP), en utilisant la méthode de Welch (périodogrammes moyennés). La sensibilité aux conditions initiales est la raison pour laquelle les signaux obtenus à partir de récurrences non inversibles peuvent être considérés comme stochastiques. En limitant les conditions initiales au bassin d'un unique attracteur, l'hypothèse de stationnarité du signal semble a priori valide.

Les tracés de la DSP montrent le spectre de x_n , pour les fréquences positives seulement (puisque x_n est toujours réel), en décibels, et en fonction des fréquences normalisées.

2.1 Récurrence cubique

La récurrence considérée [3] est la suivante :

$$x_{n+1} = y_n ; y_{n+1} = a(-x_n^3 + x_n) + b(-y_n^3 + y_n) \quad (1)$$

où (x,y) sont des variables réelles, a et b des paramètres réels. a a été pris constant ($a = 2.2$) et b varie.

2.1.1 Attracteur chaotique cyclique d'ordre 2

Pour $b = -0.61$, un attracteur chaotique cyclique d'ordre 2 existe et est observé dans le plan de phase de la Fig. 1. La DSP de x_n , donnée Fig. 2, présente un pic à $f = 0.5$. Donc, la première information donnée par le domaine fréquentiel est que la séquence x_n peut être vue comme un signal périodique, de période 2, noyé dans du bruit blanc additif (le pic à $f = 0$ n'existe pas car les 2 valeurs alternées de x_n sont opposées). Ce modèle aurait pu être construit à partir du plan de phase, mais pas à partir de la représentation temporelle de x_n .

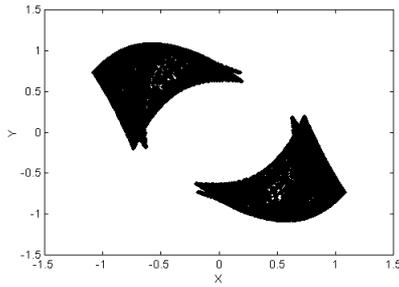


FIG. 1 : Plan de phase (x,y) pour $b = -0.61$

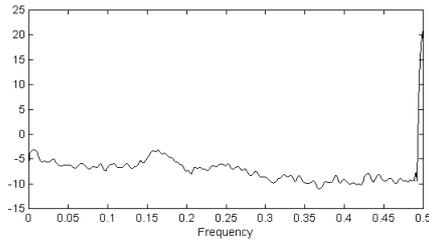


FIG. 2 : DSP de x pour $b = -0.61$

2.1.2 Attracteur chaotique cyclique d'ordre 10

Quand b augmente jusqu'à -0.36 , l'attracteur chaotique cyclique d'ordre 2 évolue (cf. le plan de phase de la Fig. 3), mais il existe toujours. Donc, il est naturel d'observer, via la DSP de la Fig. 4, la même information qu'au § 2-1-1, liée au modèle périodique de période 2 pour x_n . Plus surprenants sont les pics spectraux à 0.1 et 0.3, qui n'existaient pas pour $b = -0.61$. Ils démontrent une périodicité de période 10 : comme précédemment, certains pics n'existent pas à cause de propriétés de symétrie. Comme nous l'avons remarqué pour la période 2 au § 2-1-1, la période 10 qui apparaît ne peut pas être détectée à partir d'une représentation temporelle de x_n . Mais ici, même le plan de phase ne permet pas de la détecter.

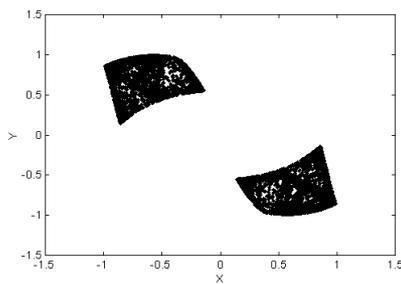


FIG. 3 : Plan de phase (x,y) pour $b = -0.36$

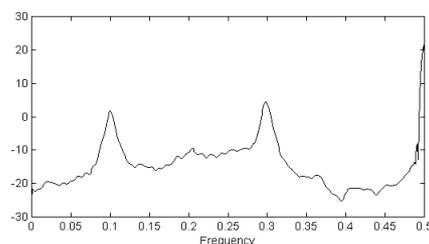


FIG. 4 : DSP de x pour $b = -0.36$

Le spectre conserve en quelque sorte la "mémoire" de l'évolution dynamique du système. Ainsi, quand nous continuons à augmenter b et prenons $b = -0.35$, l'attracteur chaotique cyclique d'ordre 2 devient d'ordre 10 (cf. Fig. 5).

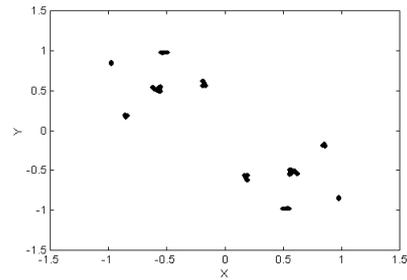


FIG. 5 : Plan de phase (x,y) pour $b = -0.35$

Le même phénomène s'est produit, mais à une échelle différente : la DSP pour $b = -0.35$ montre maintenant une période 30 (cf. Fig. 6), qui est liée à l'existence de courbes fermées invariantes, cycliques d'ordre 30, pour $b = -0.349$. La Fig. 7 présente le plan de phase pour $b = -0.349$, la Fig. 8 le spectre, et la Fig. 9 un zoom de l'aire encadrée Fig. 7.

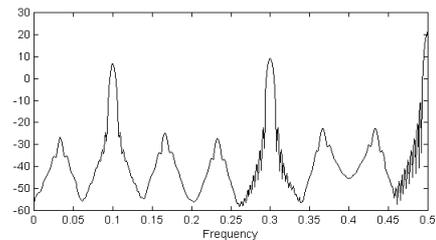


FIG. 6 : DSP de x pour $b = -0.35$

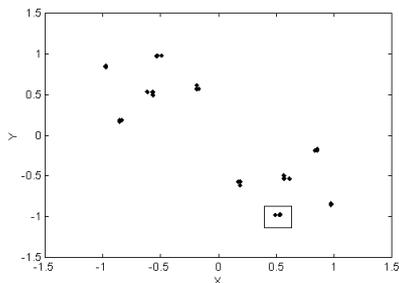


FIG. 7 : Plan de phase (x,y) pour $b = -0.349$

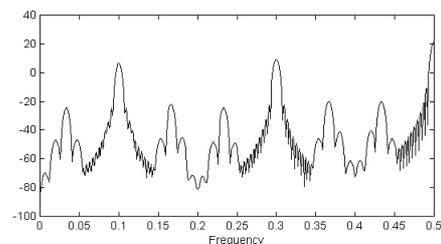


FIG. 8 : DSP de x pour $b = -0.349$

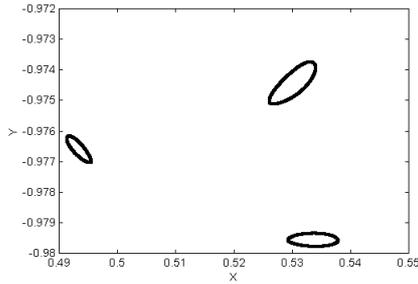


FIG. 9 : Zoom du plan de phase (x,y) pour $b = -0.349$

Comme indiqué par les Fig. 10 et 11, la DSP perd l'information sur la période 30 quand les 10 domaines disjoints du plan de phase se rejoignent (pour $b = -0.355502$).

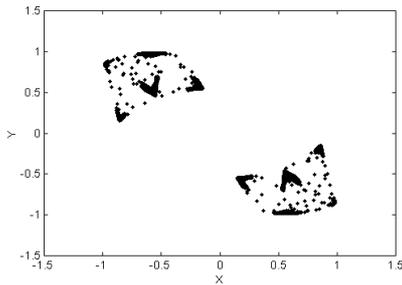


FIG. 10 : Plan de phase (x,y) pour $b = -0.355502$

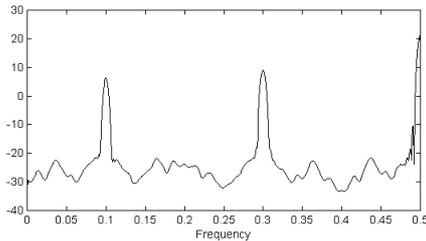


FIG. 11 : DSP de x pour $b = -0.355502$

2.2 Récurrence double logistique

La récurrence considérée [4] est la suivante :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= (1-a)x_n + 4a y_n (1-y_n) \\ y_{n+1} &= (1-a)y_n + 4a x_n (1-x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

où (x,y) sont des variables réelles, et a un paramètre réel qui varie. Avec cette récurrence pourtant totalement différente, nous pouvons rencontrer des structures fréquentielles identiques à celles trouvées dans la section précédente. Sur la Fig. 12, un attracteur chaotique non cyclique est présenté ($a = 0.646$), tandis que le spectre correspondant sur la Fig. 13 montre une périodicité d'ordre 7. Et, conformément à ce que la forme de la DSP pour $a = 0.646$ avait prédit, quand a diminue, il arrive un moment (pour $a = 0.64392$) à partir duquel un attracteur chaotique cyclique d'ordre 7 apparaît dans le plan de phase (cf. Fig. 14 and 15).

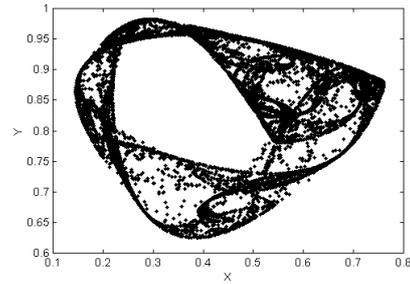


FIG. 12 : Plan de phase (x,y) pour $a = 0.646$

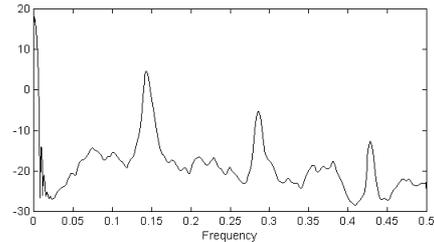


FIG. 13 : DSP de x pour $a = 0.646$

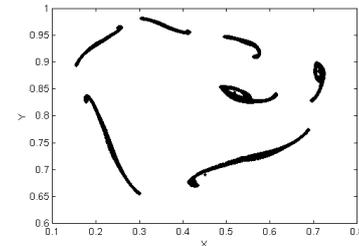


FIG. 14 : Plan de phase (x,y) pour $a = 0.64392$

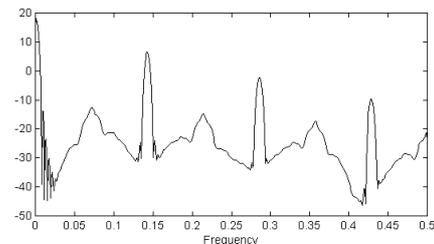


FIG. 15 : DSP de x pour $a = 0.64392$

Comme au § 2-1-2, le même phénomène apparaît à une échelle plus petite : le spectre pour $a = 0.64392$ montre maintenant une périodicité 14, liée à l'existence d'un attracteur chaotique cyclique d'ordre 14 pour $a = 0.641$ (cf. Fig. 16).

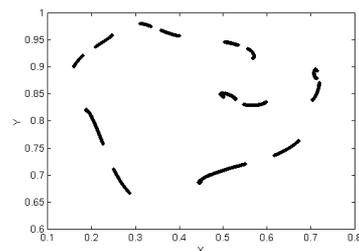


FIG. 16 : Plan de phase (x,y) pour $a = 0.641$

2.3 Récurrence quadratique

La récurrence considérée [5] est la suivante :

$$x_{n+1} = ax_n + y_n \quad ; \quad y_{n+1} = x_n^2 + b \quad (3)$$

où (x,y) sont des variables réelles, a et b des paramètres réels. a a été pris constant ($a = -0.42$) et b varie.

Ici à nouveau, nous trouvons le même genre de composantes fréquentielles que pour les 2 récurrences précédentes. La Fig. 17 présente un attracteur chaotique non cyclique ($b = -1.6$), tandis que le spectre de la Fig. 18 montre une périodicité d'ordre 6. Et, conformément à la forme de la DSP pour $b = -1.6$, quand b diminue, un attracteur chaotique cyclique d'ordre 6 apparaît et, par exemple, amène à une orbite périodique d'ordre 6 quand $b = -1.58$ (Fig. 19 et 20).

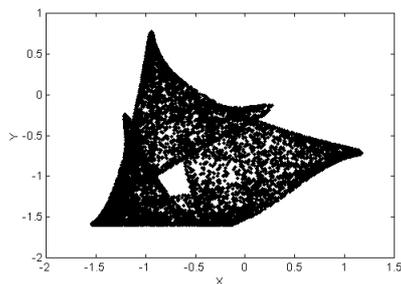


FIG. 17 : Plan de phase (x,y) pour $b = -1.6$

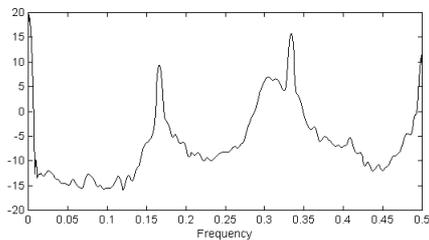


FIG. 18 : DSP de x pour $b = -1.6$

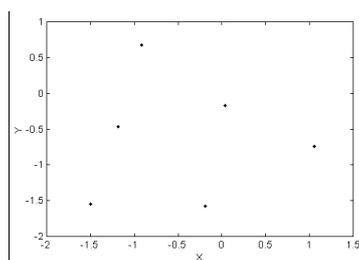


FIG. 19 : Plan de phase (x,y) pour $b = -1.58$

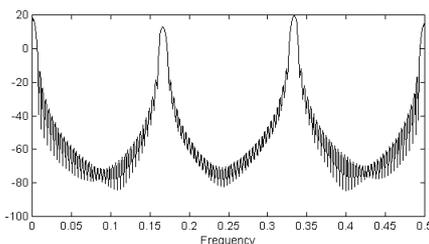


FIG. 20 : DSP de x pour $b = -1.58$

Contrairement aux exemples précédents où on observait un attracteur chaotique cyclique, ici on obtient pour $b = -1.58$ une véritable orbite périodique d'ordre 6.

3. Conclusion

Notre travail s'est attaché aux propriétés fréquentielles des signaux chaotiques. Ainsi, nous avons réalisé une analyse spectrale non paramétrique de 3 récurrences non inversibles de dimension 2.

Les spectres possèdent certaines informations sur la nature des séquences d'itérations qui n'étaient plus fournies ni par le plan de phase ni par la représentation temporelle. Notre première approche des composantes fréquentielles a permis de retrouver le même phénomène pour les 3 récurrences : des composantes périodiques, liées aux bifurcations ayant amené au chaos, peuvent être mises en évidence.

Ceci illustre la possibilité de déterminer plus complètement, à partir d'un signal chaotique donné, le comportement de la séquence de points, et finalement de proposer une modélisation du signal à une échelle appropriée.

Maintenant, l'étape suivante de notre travail serait d'étudier d'autres types d'attracteurs chaotiques, avec différentes évolutions et différentes bifurcations.

Remerciements

Ce travail a été en partie effectué dans le cadre de la collaboration franco-hongroise "BALATON" (projet n° 99030).

Références

- [1] G. Kolumban, M.P. Kennedy & L.O. Chua, "The Role of Synchronization in Digital Communications Using Chaos - Part II: Chaotic Modulation and Chaotic Synchronization", *IEEE Trans. Circuits Syst. I*, vol. 45, no. 11, pp. 1129-1140, 1998.
- [2] C. Mira, L. Gardini, A. Barugola & J.-C. Cathala, "Chaotic dynamics in two-dimensional non invertible maps", *World Scientific*, June 1996.
- [3] D. Fournier-Prunaret & V. Guglielmi, "Bifurcations and attractors in two-dimensional maps of cubic type", *NOLTA99*, Hawaï (USA), 29 Nov. - 2 Dec. 1999.
- [4] L. Gardini, R. Abraham, D. Fournier-Prunaret & R. Record, "A double logistic map", *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 4, no. 1, pp. 145-176, 1994.
- [5] C. Mira, D. Fournier-Prunaret, L. Gardini, H. Kawakami & J.C. Cathala, "Basin bifurcations of two-dimensional non invertible maps. Fractalization of basins", *International Journal of Bifurcation and Chaos in Applied Sciences and Engineering*, vol. 4, no. 2, pp. 343-382, 1994.