

Représentation d'Image par Bandelettes et Application à la Compression

Erwan LE PENNEC, Stéphane MALLAT

CMAP / Ecole Polytechnique
91128 PALAISEAU

lepenneccmapx.polytechnique.fr, mallatcmapx.polytechnique.fr

Résumé – Les représentations actuellement utilisées en traitement des images sont basées sur des transformées séparables. Celles-ci ne capturent pas la régularité géométrique des images le long des contours, bien que ceci soit un aspect essentiel des images. Nous proposons ici la construction d'une nouvelle représentation permettant de capturer à la fois cette régularité le long des contours et la régularité de zones. Elle est basée sur une nouvelle famille de bases, les bandelettes, vivant le long de contours et permettant de capturer les singularités le long de ceux-ci.

Abstract – The image representation currently used in image processing are based on separable transformations. They do not capture the geometrical regularity of images along contours, although this is an essential aspect of images. The construction of a new representation allowing the capture of both the regularity along the contours and the regularity of zone is proposed. It is based on a new family of bases, the bandelets, that live along contours and allow to capture the regularity along them.

1 Images et bandelettes

Les ondelettes orthogonales ou biorthogonales permettent une représentation efficace des zones de régularités homogènes des images, que ce soit les singularités ponctuelles, les textures homogènes ou les zones uniformément régulières. Cependant, elles ne sont pas adaptées à la représentation des singularités se déplaçant le long de contours réguliers.

Une exploitation de cette régularité le long des contours doit permettre une amélioration du codage[3]. De nombreuses représentations basées sur les contours ont déjà été proposées [1, 2, 6, 8] mais l'absence de bases orthonormées rendait difficile leur optimisation.

La représentation en bandelettes des images proposée ici est une représentation multicouche : une couche de contours représentée avec une nouvelle famille de bases, les bandelettes, et un résidu de régularité homogène représenté en ondelettes.

Les bandelettes sont de nouvelles bases orthonormées permettant une représentation efficace des singularités se déplaçant le long d'une courbe régulière.

1.1 Bandelettes

Les bandelettes sont une extension le long d'une courbe d'une famille de fonctions monodimensionnelles $\{g_n(x)\}_n$ permettant de reconstruire efficacement une fonction au voisinage de $x = 0$. Cette famille peut être choisie parmi, par exemple, les ondelettes fovéales[7], les ondelettes orthogonales sur l'intervalle ou bien encore les *footprints*[4].

Dans un repère orthonormé $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, soit \mathcal{C} une courbe verticale paramétrée par $(x = c(y), y)$ où c est une fonction régulière (voir partie gauche de la figure 1). Chaque coupe horizontale (à $y = y_0$ fixé) donne un signal monodi-

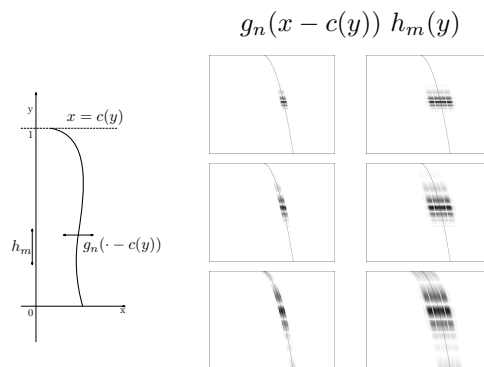


FIG. 1 – Exemples de bandelettes le long d'une courbe

mensionnel. On peut alors centrer la famille de fonctions $\{g_n(x)\}_n$ en $c(y_0)$ en la translatant. On obtient par produit scalaire une famille de coefficients dépendant de la position verticale

$$w_n^c(y_0) = \langle f(x, y_0), g_n(x - c(y_0)) \rangle. \quad (1)$$

De par le choix de $\{g_n(x)\}_n$, ces coefficients permettent de reconstruire la singularité de f le long de la courbe \mathcal{C} .

Si cette courbe est placée sur un contour régulier de part et d'autre, les coefficients de (1) varient régulièrement en fonction de y_0 . Cette régularité peut être exploitée en décomposant ces coefficients selon y dans une base $\{h_m(y)\}_m$ adaptée de l'intervalle, par exemple une base d'ondelettes orthogonales.

Les coefficients ainsi obtenus

$$\begin{aligned} b_{n,m}^c &= \langle w_n^c(y), h_m(y) \rangle \\ &= \langle f(x, y), g_n(x - c(y))h_m(y) \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

sont les produits scalaires de $f(x, y)$ avec une famille de

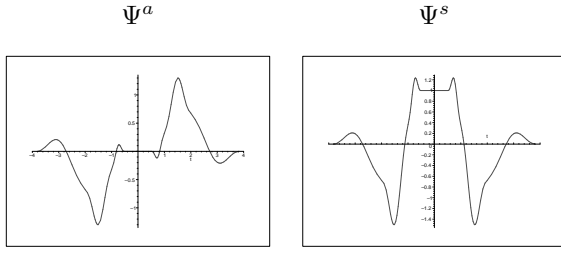


FIG. 2 – Exemple d'ondelettes fovéales

fonctions

$$\mathcal{B} = \left\{ g_n(x - c(y)) h_m(y) \right\}_{n,m}, \quad (3)$$

appelées bandelettes car leur support est dans une bande autour de la courbe \mathcal{C} .

L'orthogonalité des fonctions $\{g_n\}_n$ et $\{h_m\}_m$ implique l'orthogonalité de la famille de bandelettes \mathcal{B} .

Bien que le repère $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ puisse être quelconque a priori, on peut se restreindre à des repères *horizontaux*, où \mathbf{e}_1 est horizontal et \mathbf{e}_2 vertical, ou des repères *verticaux*, où \mathbf{e}_1 est vertical et \mathbf{e}_2 horizontal.

1.2 Bandelettes et ondelettes fovéales

Dans la suite, $\{g_n\}_n$ est une famille d'ondelettes fovéales et $\{h_m\}_m$ est une base d'ondelettes orthogonales.

Une famille d'ondelettes fovéales est constituée de toutes les dilatations dyadiques d'une ondelette symétrique Ψ^s et d'une ondelette antisymétrique Ψ^a centrées. Ces fonctions peuvent être choisies de sorte que la famille

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_n^a(t) = 2^{-n/2} \Psi^a\left(\frac{t}{2^n}\right), \\ \Psi_n^s(t) = 2^{-j/2} \Psi^s\left(\frac{t}{2^n}\right) \end{array} \right\}_{-\infty < j \leq J} \quad (4)$$

soit orthonormée et permette de reconstruire une singularité au voisinage de $x = 0$ [7]. La figure 2 donne un exemple d'ondelettes fovéales.

La partie droite de la figure 1 présente quelques bandelettes obtenues avec ces ondelettes fovéales $g_n(x)$ et des ondelettes orthogonales $h_m(y)$.

Les propriétés de reconstruction des singularités des ondelettes fovéales se transmettent aux bandelettes. Si f est régulière à gauche et à droite d'une courbe \mathcal{C} alors le résidu obtenu comme différence entre la fonction originale et la projection dans la base de bandelettes est régulier le long de la courbe. Les coefficients de bandelettes permettent donc de reproduire les contours en capturant leur partie singulière.

2 Une méthode constructive d'approximation en bandelettes

Pour représenter une image à l'aide des bandelettes, il faut être capable de détecter les singularités afin de placer des bases de bandelettes le long des contours. Ces bandelettes permettent d'obtenir une image de contours, appelée projection en bandelettes, telle que le résidu, différence entre l'image originale et la projection en bandelettes soit régulier sauf en quelques points isolés. Ce résidu

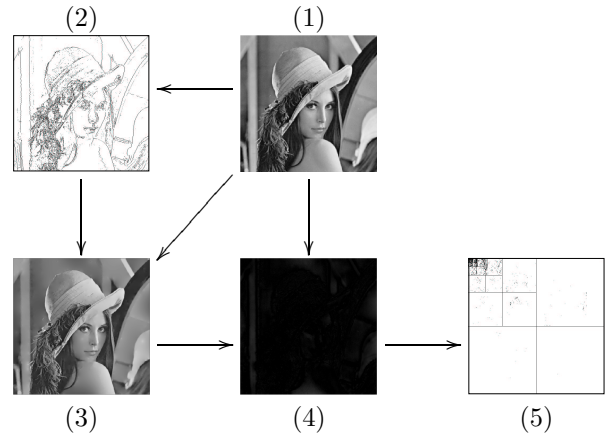


FIG. 3 – Représentation en bandelettes ((1) image originale, (2) contours, (3) projection en bandelettes, (4) résidu et (5) transformée en ondelette du résidu)

est représenté en ondelettes bidimensionnelles séparables. La figure 3 donne la représentation en bandelette d'une image : l'image originale (1) permet d'obtenir une carte de contours (2), des coefficients en bandelettes permettant d'obtenir la projection en bandelettes (3) et un résidu (4) codé en ondelettes (5).

Nous présentons ici une méthode permettant d'obtenir une approximation en bandelettes optimale de l'image.

2.1 Détection des contours

La détection des contours dans l'image se fait le long des lignes et des colonnes à l'aide des ondelettes fovéales. Elle donne des contours horizontaux et verticaux ainsi qu'une précision déterminant des tubes autour de ceux-ci.

On définit, pour les lignes horizontales et pour toute échelle b , l'énergie E_b

$$E_b(x_0, y_0) = |\langle f(x, y_0), \Psi_b^a(x - x_0) \rangle|^2 + |\langle f(x, y_0), \Psi_b^s(x - x_0) \rangle|^2 \quad (5)$$

et l'énergie résiduelle R_b à cette même échelle b

$$R_b(x_0, y_0) = \sum_{n < b} E_n(x_0, y_0). \quad (6)$$

Des zones de contours horizontaux sont détectées comme des voisinage de taille $C2^b$ de maximum de l'énergie E_b sur un voisinage de taille 2^b à la première échelle b où l'énergie résiduelle R_b devient plus petite qu'un paramètre ϵ^2 . Ces maxima ne sont conservés que si E_b est supérieure à ϵ^2 .

Ces zones sont alors chaînées pour former des tubes. En partant d'une zone non traitée de largeur minimale $C2^b$, on la relie à ses voisins tant que le maxima à cette échelle 2^b reste à l'intérieur des zones de contours. On obtient ainsi un tube de largeur $C2^b$ et on itère le procédé pour obtenir les autres contours.

L'application de la même procédure sur les colonnes verticales donnent des contours verticaux. Les contours horizontaux et verticaux sont alors combinés pour former des contours disjoints verticaux ou horizontaux comme l'illustre la figure 4.

Ces contours sont codés sous la forme d'un point de départ et d'un point d'arrivée ainsi que d'une fonction de

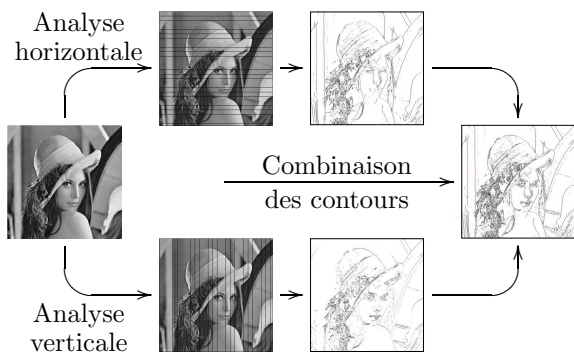


FIG. 4 – Détection des contours

position $x = c(y)$ ou $y = c(x)$ entre ces deux points. Enfin cette fonction est décomposée dans une base, par exemple une base d'ondelettes orthonormées.

2.2 Approximation de la géométrie et des bandelettes

On cherche à obtenir la meilleure représentation possible avec le moins de coefficients possibles pour cela il va falloir approcher à la fois la géométrie via les contours, les profils de singularités via les bandelettes et le résidu via les ondelettes.

Les contours sont approchés en fonction de la largeur de tube 2^b obtenue lors de la détection et les coefficients de bandelettes de la représentation sont calculés sur ces contours approchés. Le résidu est calculé à partir de la projection en bandelettes obtenue à partir de ces coefficients de bandelettes.

Chaque contour est situé dans un tube de largeur 2^b déterminé lors de la détection. L'approximation de la géométrie est faite en seuillant les coefficients d'ondelettes de la courbe avec le plus grand seuil permettant de rester dans le tube.

Les coefficients de bandelettes sont calculés le long de cette courbe approchée et sont seuillés avec le plus grand seuil possible rendant l'erreur d'approximation inférieure au produit de la longueur de la courbe par le paramètre ϵ^2 .

Enfin pour le résidu, on procède de même en seuillant les coefficients d'ondelettes avec le plus grand seuil garantissant une erreur inférieure au produit de la somme des longueurs de toutes les courbes par le paramètre ϵ^2 .

On obtient alors une approximation de l'image initiale pour laquelle on peut relier le nombre de coefficients utilisés et l'erreur en norme quadratique.

2.3 Décroissance de l'erreur d'approximation

La qualité d'approximation d'une telle procédure se mesure par la vitesse de décroissance de l'erreur entre l'image f et l'image f_M obtenues à l'aide de M coefficients.

Si l'on suppose que f est une image uniformément de classe C^α en dehors d'un ensemble de contours de longueur totale finie et de régularité C^s avec $\alpha \geq s$, on montre que les bandelettes permettent d'obtenir une erreur qui décroît

en

$$\|f - f_M\|_2^2 = O(M^{-s}) \quad (7)$$

alors qu'une approximation en ondelettes classiques ne permet dans ce cas qu'une décroissance en

$$\|f - f_M\|_2^2 = O(M^{-1}). \quad (8)$$

Les bandelettes permettent donc de capturer la régularité le long des contours. La vitesse de décroissance dépend maintenant de la régularité géométrique des contours.

3 Application à la compression et expérimentation numérique

3.1 Application à la compression

A bas débit, la qualité d'un algorithme de compression par transformée dépend de la qualité d'approximation avec peu de coefficients différents de zéro de cette représentation[5].

L'algorithme de compression en bandelettes se déduit de l'algorithme d'approximation en bandelettes en remplaçant les seuillages par des quantifications et permet d'exploiter les propriétés d'approximation puisque les coefficients mis à zéro dans la quantification correspondent à des coefficients non conservés dans l'approximation.

Les bandelettes possèdent deux avantages sur les ondelettes : d'une part, la représentation en bandelettes permet une meilleure approximation avec M termes que la représentation en ondelettes et d'autre part la partie géométrique des bandelettes permet un codage plus efficace de la position des coefficients conservés le long des contours, or le codage de la position des coefficients conservés occupe une grande partie du budget de bits dans la compression.

En effet dans la décomposition en bandelettes, les coefficients de bandelettes et d'ondelettes sont des coefficients dans une base orthonormée de l'image ou de son résidu, tandis que les coefficients de géométrie servent à spécifier les bases de bandelettes employées. Ces coefficients sont donc comparables à ceux servant à spécifier la position des coefficients conservés dans les bases orthonormées.

3.2 Expérimentation numérique

L'algorithme d'approximation a déjà fait l'objet d'une implémentation alors que la partie compression est encore en développement.

La figure 5 donne les résultats de l'application de l'algorithme à l'image de Lena. Les capacités d'approximation de la représentation en bandelettes sont comparées à celle de la représentation en ondelettes, le nombre de coefficients considérés est d'une part la somme du nombre de coefficients de bandelettes et du nombre de coefficients d'ondelettes dans la représentation en bandelettes et d'autre part le nombre de coefficients en ondelettes dans la représentation en ondelettes.

Ces résultats montrent la supériorité de la représentation en bandelettes sur la représentation en ondelettes puisque cette dernière nécessite plus de coefficients pour



Bandelettes
2474 coeff.



Ondelettes
4257 coeff.

FIG. 5 – Comparaison entre la représentation en bandelettes et en ondelettes à PSNR égaux (PSNR = 30,46 db)

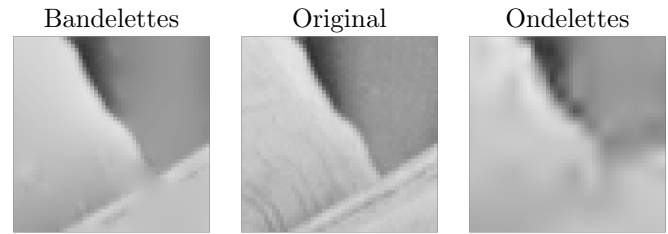


FIG. 6 – Agrandissement des approximations à PSNR égaux

obtenir le même PSNR. De plus, la qualité visuelle est supérieure en bandelettes comme le souligne la figure 6 qui présente un agrandissement du bord du chapeau pour l'image originale et pour les approximation en bandelettes et en ondelettes avec le même PSNR.

4 Conclusion

La représentation en bandelettes représente efficacement les contours des images grâce aux bases orthogonales de bandelettes ainsi que les zones de régularité homogène sous la forme d'un résidu décomposé en ondelettes. Le cadre orthonormé permet d'obtenir des résultats théoriques sur les capacités d'approximation de cette représentation montrant leur intérêt par rapport aux bases d'ondelettes bidimensionnelles séparables. Il reste cependant encore à confirmer ces éléments par des résultats numériques de compression.

Références

- [1] S. Carlsson. Sketch based coding of grey level images. *Signal Processing*, 15(1) :57–83, 1988.
- [2] Y. W. Choi et T. Nguyen. Implicit coding for very low bit rate image compression. Dans *Int. Conf on Image Processing*, 1998.
- [3] D. Donoho. Wedgelets : nearly-minimax estimation of edges. rapport technique, Tech. Rep. no. 515, Statistics Department, Stanford Univ., 1997.
- [4] P.L. Dragotti et M. Vetterli. Wavelet transform footprints : catching singularities for compression and denoising. Dans *Int. Conf on Image Processing*, Vancouver, Septembre 2000.
- [5] F. Falzon et S. Mallat. Analysis of low bit rate image transform coding. *IEEE Transaction on Signal Processing*, Janvier 1998.
- [6] J. Froment et S. Mallat. Second generation compact image coding with wavelets. Dans C. K. Chui, éditeur, *Wavelets : A Tutorial in Theory and Applications*. Academic Press, New York, 1992.
- [7] E. Le Pennec et S. Mallat. Image compression with geometrical wavelets. Dans *Int. Conf on Image Processing*, Vancouver, Septembre 2000.
- [8] A. Mertins. Image compression via edge-based wavelet transform. *Optical Engineering*, 38(6) :991–1000, Juin 1999.