

Extension de la méthode de Cholesky pour la synthèse d'un signal 2-D à incréments autosimilaires ¹

Y. Berthoumieu¹, X. Moreau², M. Guglielmi³ et A. Oustaloup²

¹Laboratoire IXL UMR 5818

²Laboratoire d'Automatique et de Productique (L.A.P.) E.P. 2026
E.N.S.E.R.B./Université de Bordeaux I
351, Cours de la libération 33405 Talence Cedex

³Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes(IRCyN) UMR 6597
Ecole Centrale de Nantes/Université de Nantes/Ecole des Mines de Nantes
1 rue de la Noë, 44072 Nantes Cedex 03

berthoumieu@ixl.u-bordeaux.fr, moreau@lap.u-bordeaux.fr,
Michel.Guglielmi@ircyn.ec-nantes.fr, oustaloup@lap.u-bordeaux.fr

Résumé - Dans un contexte de synthèse de profil routier, cet article présente l'extension d'une méthode de synthèse monodimensionnelle à la génération d'un terrain fractal auto-similaire 2-D. L'objectif est de fournir un terrain dont la dimension fractale est isotrope en terme d'évolution spatiale. La méthode de synthèse s'appuie sur une décomposition de Cholesky. Nous montrons en outre le lien qu'il existe entre les matrices issues de la décomposition selon l'élongation longitudinale et transversale.

Abstract - In the road profile synthesis framework, this article presents an extension of a monodimensional synthesis method in order to generate a 2-D self-similar landscapes. The purpose is to obtain a surface which the fractal dimension is an isotropic feature along all dimensions. The method to generate this surface is based on the Cholesky factorisation. Moreover, we show the relation between matrices obtained after the factorisation according the longitudinal and transversal profile.

1. Introduction

Suite à de nombreuses études [1] [2], l'élongation d'un profil de route est assimilé à un processus stochastique ayant un caractère fractal lié à sa mémoire longue. Dans le cadre de la conception optimisée d'une suspension, thème privilégié au sein de l'équipe CRONE [3], il paraît intéressant de pouvoir générer des excitations possédant un caractère statistique autosimilaire. Conformément à cet objectif, la possibilité de synthèse bidimensionnelle d'un terrain permet de généraliser l'excitation aux niveaux des quatre points de contacts que sont les roues. L'étude des méthodes de synthèse de signaux 1-D, qui se rapprochent du mouvement brownien fractionnaire (Mbf), a permis de montrer que certaines méthodes étaient plus ou moins robustes vis-à-vis de la restitution des propriétés statistiques et spectrales recherchées. Une méthode présentant un bon compromis mise en œuvre/performance a été proposée par Lundahl [4] pour les signaux monodimensionnels. Dans ce contexte, le présent article propose une extension de cette méthode dans le cas de la génération d'un terrain afin de pouvoir contrôler la propriété sur les statistiques d'ordre deux, avantage premier de cette approche. Dans une première partie, nous rappelons les principales propriétés du signal de référence. Puis, nous présentons la méthode de Cholesky 2-D que nous proposons. La dernière partie de notre article est relative à la présentation

des résultats. Nous y trouvons notamment les mesures relatives au coefficient de Hurst suivant plusieurs directions de lecture du profil de la surface générée. Nous montrons par ce biais l'isotropie de la dimension fractale. Les méthodes d'évaluation du paramètre longue mémoire sont spatiales avec le test d'Higuchi [5] et fréquentielle avec une mesure de la pente de la densité spectrale de puissance du processus généré.

2. Propriétés

Un Mouvement brownien fractionnaire (Mbf) isotrope est un processus gaussien à moyenne nulle noté $B(t_x, t_y)$ qui satisfait les relations suivantes:

$$B(0,0)=0$$

$$E\{[\Delta B(r_x, r_y)]^2\} = f(r_x, r_y)\sigma^2 \quad (1)$$

$$f(r_x, r_y) = \left(\sqrt{r_x^2 + r_y^2}\right)^{2H} \quad (2)$$

où $\Delta B(r_x, r_y) = B(t_x + r_x, t_y + r_y) - B(t_x, t_y)$ est appelé incrément du Mbf et où H est le coefficient de Hurst à valeur dans l'intervalle [0,1]. Ce paramètre contrôle la rugosité du

¹ Ce travail est parrainé par le Gdr Automatique « la dérivation non entière en isolation vibratoire »

signal et permet donc de générer des terrains de différents types. H est lié à la dimension fractale par la relation $D = 3 - H$. En outre, le paramètre σ^2 est la variance du signal.

Les équations (1) et (2) constituent les conditions d'autosimilarité isotrope en deux dimensions. Elles entraînent l'insensibilité des variances des incréments à leur direction d'évolution, les rendant seulement fonction de leur longueur. Dans le cadre de la génération d'un terrain anisotrope, les extensions de ces relations sont proposées dans les travaux de Pesquet-Popescu [6]. Sur le plan de la corrélation, la propriété d'autosimilarité a pour conséquence la stationnarité des fonctions d'autocorrélation des incréments spatiaux. Cet état de fait va nous fournir un point de départ pour la méthode de synthèse stochastique car le Mbf est lui-même un processus non-stationnaire. Dans le cas 2-D, nous devons tenir compte des incréments qui vont exprimer l'isotropie par rapport à une évolution spatiale du paramètre de Hurst. Pour cela, nous allons introduire des incréments qui vont représenter une évolution longitudinale, transversale et diagonale. Les deux premiers seront appelés incréments du premier ordre et le troisième incrément du second ordre. Cet incrément du second ordre a été introduit par Kaplan [7]. Il permet de considérer un voisinage quart de plan causal pour la reconstruction. Les incréments du premier ordre du fBm deux dimensions (2-D) sont :

$$I_x(m, n) = B(m+1, n) - B(m, n) \quad (3)$$

$$I_y(m, n) = B(m, n+1) - B(m, n) \quad (4)$$

avec (m,n) représentant la position spatiale du pixel (ligne/colonne). Le nombre de pixels est donné par N, nous avons alors :

$$0 \leq m \leq N - 1 \text{ et } 0 \leq n \leq N - 1.$$

L'incrément du second ordre du Mbf 2-D est défini comme :

$$I_2(m, n) = I_y(m+1, n) - I_y(m, n) = I_x(m, n+1) - I_x(m, n)$$

ce qui s'exprime en fonction des échantillons du Mbf :

$$I_2(m, n) = B(m+1, n+1) + B(m, n) - B(m, n+1) - B(m+1, n) \quad (5)$$

Notons que les échantillons du Mbf $B(m, n)$ peuvent être calculés pour $m \geq 0$ et pour $n \geq 0$ en utilisant les valeurs des incréments du premier et second ordre comme nous le verrons dans le paragraphe 3 de notre article. Les incréments du premier et du second ordre sont stationnaires. Leurs fonctions d'autocorrélation discrètes respectives sont les suivantes :

- pour les incréments le long des lignes :

$$r_{I_x}(m, n) = E\{I_x(k, l)I_x(k+m, l+n)\} = \frac{\sigma^2}{2} [f(m+1, n) + f(m-1, n) - 2f(m, n)] \quad (6)$$

- pour les incréments le long des colonnes :

$$r_{I_y}(m, n) = \quad (7)$$

$$\frac{\sigma^2}{2} [f(m, n+1) + f(m, n-1) - 2f(m, n)]$$

- pour les incréments du second ordre :

$$r_{I_2}(m, n) =$$

$$\frac{\sigma^2}{2} [2[f(m+1, n) + f(m-1, n) + f(m, n+1) + f(m, n-1)] - [f(m+1, n+1) + f(m+1, n-1) + f(m-1, n+1) + f(m-1, n-1)] - 4f(m, n)] \quad (8)$$

Si nous exprimons maintenant leurs matrices d'autocorrélation, nous savons que pour une processus 2-D réel nous obtenons une forme bloc-toeplitz donnée par la relation :

$$R_I = \begin{bmatrix} r_o & r_1 & \cdots & r_{L-1} \\ r_1 & r_o & & \\ \vdots & & \ddots & r_1 \\ r_{L-1} & \cdots & r_1 & r_o \end{bmatrix} \quad (9)$$

avec

$$r_i = \begin{bmatrix} r_I(0, i) & r_I(1, i) & \cdots & r_I(L-1, i) \\ r_I(1, i) & r_I(0, i) & & \\ \vdots & & \ddots & r_I(1, i) \\ r_I(L-1, i) & \cdots & r_I(1, i) & r_I(0, i) \end{bmatrix}$$

Les matrices R_{I_x} , R_{I_y} et R_{I_2} sont alors des matrices de dimensions (L,L,L,L).

2. Méthode de Cholesky 2-D

Par définition, une matrice d'autocorrélation est une matrice définie positive, elle admet une factorisation régulière et unique de Cholesky. Nous pouvons donc introduire pour chacune des matrices :

$$R_{I_x} = T_x^T T_x \quad R_{I_y} = T_y^T T_y \quad R_{I_2} = T_2^T T_2 \quad (10)$$

Cette décomposition génère des matrices T qui sont triangulaires supérieures. A ce stade de la mise en équation, nous pouvons utiliser les différentes matrices T comme des matrices de passage comme suit :

$$\underline{y} = T^{-T} \underline{I} \quad (11)$$

où les vecteurs \underline{y} et \underline{I} représentent deux vecteurs d'observation d'un processus 2-D défini sur L lignes et L colonnes. Les processus générateurs sont, dans ce cas, les incréments du premier et du second ordre. En reconsidérant, les matrices d'autocorrélation, nous obtenons alors :

$$R_y = E\{\underline{y} \underline{y}^T\} = T^{-T} E\{\underline{I} \underline{I}^T\} T^{-1} = \mathfrak{S}_L$$

où \mathfrak{S}_L est la matrice identité de taille (L,L,L,L) . Cette relation entraîne donc que les différents processus engendrés par les trois incréments sont donc des processus gaussiens blancs, centrés et de variance unité.

D'après les trois relations que l'on peut déduire de (11), associées successivement à I_x , I_y et I_2 , nous pouvons synthétiser les différents incréments en vue de générer le processus autosimilaire 2-D. En effet, nous avons les relations :

$$B(0,0) = 0 \quad (12)$$

$$B(m,0) = B(m-1,0) + I_x(m-1,0)$$

$$B(0,n) = B(0,n-1) + I_y(0,n-1)$$

$$B(m,n) =$$

$$B(m,n-1) + B(m-1,n) - B(m-1,n-1) + I_2(m-1,n-1)$$

3. Relations entre les incréments

3.1 Incréments du premier ordre

L'obtention du Mbf 2-D passe donc par le calcul des trois matrices de passage T_x , T_y et T_2 . Afin de réduire le coût calculatoire, nous proposons de mettre en évidence la relation qu'il existe entre T_x et T_y . D'après les relations (5) et (6), nous avons :

$$r_{I_x}(m,n) = r_{I_y}(n,m)$$

Ceci nous permet d'écrire la relation matricielle suivante :

$$R_{I_y} = G_L R_{I_x} G_L$$

où G_L est une matrice de permutation définie par la relation :

$$G_L = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L E_{i,j}^L \otimes E_{j,i}^L$$

avec $E_{i,j}^L$ la matrice élémentaire de taille (L,L) définie par la seule valeur non-nulle égale à 1 positionnée en (i,j) et \otimes le produit de Kronecker. Notons que nous avons :

$$G_L = G_L^T = G_L^{-1}$$

En posant $T_x G_L = QR$ et après quelques manipulations algébriques, nous obtenons la relation permettant d'engendrer une matrice triangulaire supérieure :

$$T_y = QT_x G$$

Les matrices Q et R sont respectivement une matrice unitaire et une matrice triangulaire supérieure associée à la décomposition de $T_x G_L$. La matrice Q peut facilement se calculer car elle correspond à une succession limitée de rotations de Givens.

3.2 Incréments du second ordre

Les incréments du second ordre peuvent être calculés à partir des incréments du premier ordre. Les relations matricielles permettant d'obtenir les valeurs des incréments du second ordre sont données par les égalités suivantes :

$$\underline{I}_2 = H_2 \underline{I}_x = H_1 \underline{I}_y$$

$$\text{où } H_1 = G_{L-1} H_2 G_L$$

La matrice H_i est une matrice rectangulaire représentant les différences successives des pixels sur une même ligne.

5. Synthèse d'un champ autosimilaire

Le principal problème pour la synthèse est la non-possibilité de connaître simultanément les processus générateurs associés à chacun des incréments. Ce problème n'est pas rencontré en monodimensionnel mais est crucial en bidimensionnel. En outre, conformément au groupe d'équations récursives (12), si nous prenons des vecteurs indépendants pour générer les deux incréments du premier ordre, nous allons engendrer une erreur d'initialisation sur les bords. Après analyse, nous avons mis en valeur le fait que cette erreur se propage sous la forme d'un rehaussement moyen du profile suivant la dimension opposée à celle qui sert de base à la génération de l'incrément du second ordre. En enlevant la valeur moyenne de ces lignes, ou respectivement de ces colonnes suivant l'incrément qui a servis à générer l'incrément du second ordre, nous faisons disparaître ces traînages dans l'image synthétisée. Cependant, la régularité du profile sur lequel a été enlevé le traînage chute. Pour éviter cela, nous synthétisons les deux surfaces que nous associons par la suite.

7. Exemples et validation

Comme le montre la figure n°1, notre méthode de synthèse génère des champs qui présentent bien une rugosité décroissante lorsque le paramètre de longue mémoire croit. Les valeurs mesurées par Higuchi et par l'évaluation de la pente de la densité spectrale moyennée sont données dans le tableau ci-dessous.

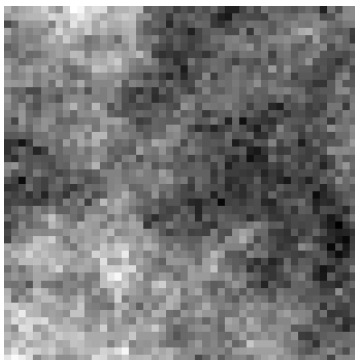
Orientation	0°	45°	90°
Higuchi	0.205	0.1996	0.208
DSP	0.187	0.202	0.2137

6. Conclusion

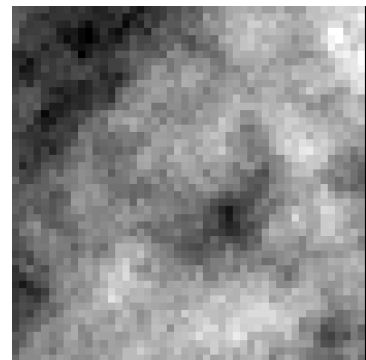
Dans cet article, nous nous sommes intéressés à la synthèse d'un signal autosimilaire en imagerie. Cette étude a pour contexte la génération de terrain ayant une caractéristique fractale. Nous nous sommes particulièrement attachés à réaliser une étude rigoureuse permettant de garantir une isotropie dans l'évolution du paramètre de Hurst suivant les directions d'évolution sur le terrain. En outre, nous avons montré qu'il existait des relations matricielles liant les différents incréments et permettant de réduire la complexité de l'extension proposée dans cet article de la méthode de Cholesky.

Références

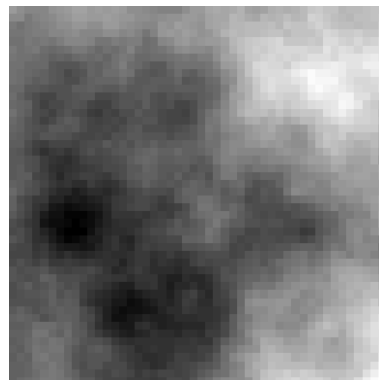
- [1] C.J. Dodds, J.D. Robson *The description of road surface roughness* Journal of sound and vibration (1973) , 175-183.
- [2] M. Guglielmi, J.L. Levy-vehel *Analysis and simulation of road profile by means of fractal model* AVCS'98 – IEEE International Conference in Advances in vehicle Control Safety, Amiens, July 1998.
- [3] A. Oustaloup, X. Moreau and M. Nouillant *The CRONE suspension*. Control Engineering Practice, a Journal of the International Federation of Automatic Control, Vol. 4, N°8, pp. 1101-1108.
- [4] T. Lundahl, W.J. Ohley, S.M. Kay, R. Siffert *Fractional brownian motion : a maximum likelihood estimator and its applications to image texture* IEEE Transactions on medical imaging, vol MI-5 (n°3), 152-161 1986.
- [5] T. Higuchi *Approach to an irregular time series on the basis of the fractal theory* Physica D, vol 31 1988 pp 227-283.
- [6] B. Popescu, P. Larzabal *2D self-similar processes with stationary fractional increments* Fractals engineering Springer verlag, pp138-152, arcachon.
- [7] L. Kaplan, C.C. Jay Kuo *An improved method for 2D self-similar image synthesis* IEEE transactions on image processing, vol. 5, n°5, 754-761, 1996.



H = 0.2



H = 0.5



H = 0.8

FIG. 1 : Exemples de synthèse pour différentes valeurs de H.