

# Comparaison des approches de perturbation et alphabet fini pour l'analyse des filtres adaptatifs

Yousra BEN JEMAA<sup>1,2</sup>, Hichem BESBES<sup>1,3</sup>, Meriem JAIDANE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>L.S.Télécoms, ENIT,

Campus Universitaire, B.P 37, Le Belvédère, 1002 Tunis, TUNISIE

<sup>2</sup>L.S.S SUPELEC,

Plateau de Moulon 91192 GIF sur YVETTE, Paris, France

<sup>3</sup>Ecole Supérieure des Communications de Tunis,

Km 3.5, route de Raoued, cité El Ghazala 2083 TUNISIA.

hichem.besbes@supcom.rnu.tn, meriem.jaidane@enit.rnu.tn

**Résumé** – Dans cette étude, nous comparons les résultats de deux approches d'évaluation de performances de l'algorithme du gradient stochastique (GS), pour des pas d'adaptation élevés. Nous montrons, sur un exemple précis, que les résultats relatifs à l'approche de perturbation représentent effectivement une décomposition en série entière du résultat exact obtenu dans le contexte alphabet fini de l'entrée.

**Abstract** – In this paper, we compare the results of two analysis approaches of LMS algorithm: perturbation expansion methods and finite alphabet approach. On a particular example, we show that, the results issued from perturbation expansion methods, are effectively a Taylor expansion of exact results obtained by the finite alphabet approach

## 1 Introduction

L'algorithme du gradient stochastique (GS) est l'algorithme le plus utilisé en transmission numérique du fait de sa simplicité d'implantation et de sa stabilité numérique.

Les études menées pour l'analyse du comportement d'un tel algorithme mènent à des résultats approximatifs et donc ne permettent pas une conception optimale d'un système de transmission dans toutes les situations.

Deux nouvelles approches ont été développées dans le but d'étudier d'une manière exacte le comportement du GS sans recourir à des hypothèses simplificatrices, parfois irréalistes sur le signal d'entrée. La première est dite approche de développement par perturbation [1, 2] et la seconde est nommée approche exacte [3, 4].

Bien qu'elles soient basées sur des idées et des principes totalement différents, ces deux approches permettent d'analyser les performances du GS pour des pas d'adaptation élevés. La première fournit un développement de la matrice de covariance du vecteur déviation par rapport au pas d'adaptation à n'importe quel ordre, alors que la deuxième profite du caractère alphabet fini de l'entrée et détermine d'une façon exacte les paramètres de contrôle de l'algorithme.

Le but de cette étude est de montrer que ces deux méthodes aboutissent aux mêmes résultats dans un contexte

alphabet fini de l'entrée.

La mise à jour des paramètres d'un filtre adaptatif piloté par l'algorithme GS peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{cases} e_k &= y_k - H_k^T X_k, \\ H_{k+1} &= H_k + \mu X_k e_k, \end{cases} \quad (1)$$

où  $X_k = [x_k, \dots, x_{k-L+1}]^T$  de longueur  $L$ , représente le signal d'entrée et où  $\mu$  est le pas d'adaptation supposé ici constant. L'observation  $y_k$  supposée scalaire est définie par  $y_k = X_k^T F + b_k$  où  $F$  est la réponse impulsionnelle du canal et  $b_k$  est le bruit d'observation supposé centré, indépendant et identiquement distribué. L'erreur a priori  $e_k = y_k - H_k^T X_k$  est définie comme la différence entre l'observation et le signal reconstruit à chaque itération et  $H_k$  est le vecteur paramètre du filtre adaptatif.

Le comportement de l'algorithme peut être décrit par l'évolution de la Déviation Quadratique Moyenne  $DQM = Tr(E(V_k V_k^T))$  où  $V_k = H_k - F$ .

La récursion entre  $E(V_{k+1} V_{k+1}^T)$  et  $E(V_k V_k^T)$  n'est pas simple à établir. En effet, nous avons :

$$E(V_{k+1} V_{k+1}^T) = \mu^2 E(b_k^2) E(X_k X_k^T) + E((I - \mu X_k X_k^T) V_k V_k^T (I - \mu X_k X_k^T)^T) \quad (2)$$

Du fait que  $X_k$  et  $V_k$ , sont des variables dépendantes, la résolution de cette équation est difficile à mener. Pour surmonter ces difficultés, différentes approches ont été proposées [2, 4, 6], nous présenterons, dans ce qui suit, deux approches développées dans ce sens.

## 2 Approche de développement par perturbation [1,2]

Afin d'évaluer la *DQM*, il est possible de décomposer le vecteur  $V_k$  selon un terme transitoire et un terme permanent :

$$V_k = V_k^t + \mu V_k^f, \quad (3)$$

où  $V^t$  est relative au régime transitoire et  $V^f$  est relative au régime permanent.

Si les conditions de convergence de l'algorithme sont satisfaites,  $V_k^t$  tend vers zéro à l'infini. On montre ainsi qu'en régime permanent, la *DQM* sera égale à  $\mu^2 \text{Tr} \left( E(V_k^f V_k^{fT}) \right)$ .

L'idée de base de la méthode de développement par perturbation consiste donc, à décomposer le vecteur  $V_k^f$  en  $n$  sous processus dont les équations de récursion sont faciles à manipuler.

Cette décomposition est donnée comme suit :

$$V_k^f = J_k^{(0)} + J_k^{(1)} + \dots + J_k^{(n)} + S_k^{(n)} \quad (4)$$

où les processus sont définis par :

$$\begin{aligned} J_{k+1}^{(0)} &= (I - \mu R) J_k^{(0)} + X_k b_k, \\ J_{k+1}^{(r)} &= (I - \mu R) J_k^{(r)} + \mu Z_k J_k^{(r-1)}, \\ S_{k+1}^{(n)} &= (I - \mu X_k X_k^T) S_k^{(n)} + \mu Z_k J_k^{(n)}, \end{aligned} \quad (5)$$

avec :

$$\begin{aligned} J_0^{(0)} &= 0 \\ J_k^{(r)} &= 0, \quad 0 \leq k < r \\ S_k^{(n)} &= 0, \quad 0 \leq k < r \end{aligned}$$

et où  $Z_k = R - X_k X_k^T$  et  $R = E(X_k X_k^T)$ .

En adoptant cette démarche et en négligeant les termes d'ordre supérieur, la décomposition en  $\mu$  jusqu'à l'ordre trois de  $E(V_k^f V_k^{fT})$  est donnée par :

$$\begin{aligned} E(V_k^f V_k^{fT}) &= E(J_k^{(0)} (J_k^{(0)})^T) + E(J_k^{(0)} (J_k^{(1)})^T) \\ &\quad + E(J_k^{(0)} (J_k^{(2)})^T) + E(J_k^{(1)} (J_k^{(1)})^T) \\ &\quad + E(J_k^{(0)} (J_k^{(3)})^T) + E(J_k^{(1)} (J_k^{(2)})^T) \end{aligned} \quad (6)$$

On a donc à résoudre le système d'équation précédent. Le but de cette étude est de comparer le résultat obtenu par cette méthode de perturbation avec la décomposition en  $\mu$  issue du résultat exact obtenu dans le contexte alphabet fini de l'entrée.

## 3 Approche alphabet fini

Dans le contexte alphabet fini de la transmission numérique, les vecteurs  $X_k$  de dimension  $L$  appartiennent à un alphabet fini  $\mathcal{A} = \{W_1, W_2, \dots, W_N\}$  tel que  $N = q^L$ . De ce fait, le vecteur  $X_k$  peut être décrit par une chaîne de Markov  $\{\theta(k) : k \in Z^+\}$  à nombre fini d'états définis sur  $\{1, 2, \dots, N\}$  et de matrice de transition  $P = [p_{ij}]$ .

L'idée de base développée [3, 4] pour l'évaluation de la *DQM* dans le contexte alphabet fini est la suivante : étant donné que le vecteur de l'observation de l'entrée appartient à un alphabet fini de cardinal  $N$ , la détermination

de la *DQM* se fait à partir des  $N$  composantes suivantes :

$$E(V_k V_k^T) = \sum_{j=1}^N Q_j(k) \quad (7)$$

telles que :

$$Q_j(k) = E(V_k V_k^T \mathbf{1}_{(\theta(k)=j)}) \quad (8)$$

où  $\mathbf{1}_{(\theta(k)=j)}$  est la fonction indicatrice qui vaut 1 quand  $\theta(k) = j$  et zéro ailleurs.

Dans le cas où le bruit d'observation est i.i.d, nous montrons sans hypothèse d'indépendance du vecteur observations  $X_k$  et du vecteur déviation  $V_k$ , que les moments d'ordre deux du vecteur déviation sont solutions du système suivant :

$$\tilde{Q}(k+1) = \Gamma \tilde{Q}(k) + \tilde{Z}(k) \quad (9)$$

où

$$\Gamma = (P^T \otimes I_{L^2}) \text{diag}(M_i^T \otimes M_i) \quad (10)$$

$$\tilde{Q}(k) = [\text{vec}(Q_1(k))^T, \text{vec}(Q_2(k))^T, \dots, \text{vec}(Q_N(k))^T]^T \quad (11)$$

$M_i = I_L - \mu W_i W_i^T$  et  $\tilde{Z}(k)$  est un vecteur dépendant de l'alphabet et de la puissance du bruit.

A partir de la résolution de l'équation générale (9), nous pouvons déterminer exactement la *DQM* en régime permanent par :

$$DQM = \sum_{i=1}^N \text{tr}(Q_i) \quad (12)$$

Il est à noter que la détermination de la *DQM* est faite sans aucune hypothèse simplificatrice irréaliste.

Dans ce qui suit, nous allons comparer les résultats obtenus par les deux approches sur un exemple précis.

## 4 Comparaison des approches

Dans ce paragraphe, nous comparons les résultats issus des deux approches sur un exemple particulier de longueur du filtre et entré ayant des statistiques données. Nous nous situons dans le cas d'un filtre d'ordre  $L = 1$ , le signal d'entrée appartient à l'alphabet  $\{\pm 1, \pm 3\}$ , de matrice de transition  $P$  :

$$P = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Le bruit d'observation  $b_k$  est supposé gaussien, centré, i.i.d et de puissance  $E(b_k^2) = 1$ .

La détermination d'un développement jusqu'à l'ordre trois en  $\mu$  de la *DQM* par la méthode de perturbation (résolution de (6)) conduit dans ce cas particulier à [5] :

$$DQM = \frac{1}{2}\mu + \frac{41}{20}\mu^2 + \frac{1381}{200}\mu^3 + O(\mu^4) \quad (13)$$

Le calcul exact de la *DQM* par l'approche alphabet fini dans ce cas particulier conduit à :

$$DQM = \frac{\mu(10 + 90\mu - 255\mu^2 - 1188\mu^3 + 1845\mu^4)}{20 + 98\mu - 1188\mu^2 + 45\mu^3 + 8190\mu^4 - 3321\mu^5} \quad (14)$$

Un développement à l'ordre 3 en  $\mu$  de la solution exacte (14), donne effectivement le même résultat (13) obtenu avec l'approche de perturbation.

Il est à signaler que l'approche de développement par perturbation ne traite que le régime permanent. Les calculs deviennent de plus en plus complexes au fur et à mesure que l'ordre de la décomposition augmente. Dans ce cas, la résolution d'un ensemble d'équations de Lyapunov nécessitent un calcul lourd, surtout si l'on dépasse l'ordre deux de la décomposition.

Quant à l'approche alphabet fini, la taille de la matrice  $\Gamma$  augmente considérablement, lorsque l'ordre du filtre ou le nombre d'éléments dans l'alphabet augmente. A titre d'exemple, pour un filtre de longueur  $L = 1$  et un alphabet  $\{\pm 1\}$ , la dimension de  $\Gamma$  est  $(2 \times 2)$  et pour  $L = 3$  et l'alphabet  $\{\pm 1, \pm 3\}$ , cette dimension atteint  $(576 \times 576)$ . Mais cette approche présente l'avantage d'être exacte.

Pour valider les résultats trouvés, dans le cas de l'exemple précédent, nous avons réalisé des simulations de Monte-Carlo sur 10 réalisations. La figure suivante montre l'évolution de la DQM en fonction du pas d'adaptation.

La décomposition à l'ordre 3 donne des approximations meilleures pour les pas élevés que la décomposition à l'ordre 2, ce qui était prévisible, alors que l'approche alphabet fini est exacte.

Notons que l'écart qui subsiste entre les simulations et cette dernière approche est lié au faible nombre de réalisations utilisé.

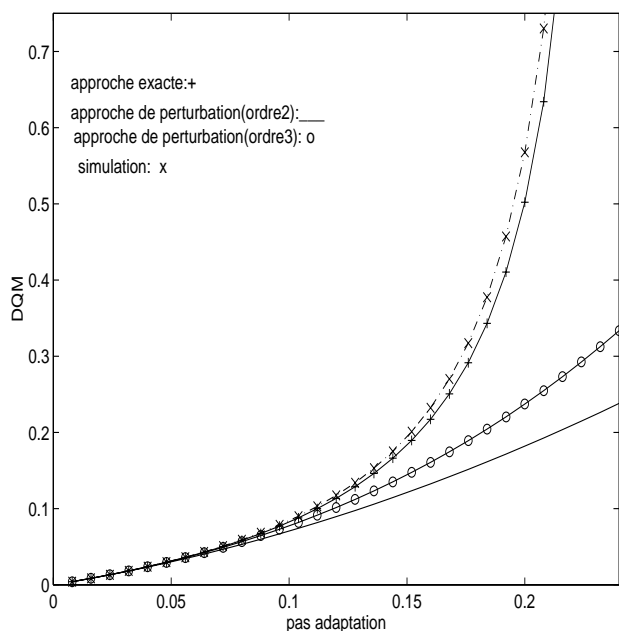


FIG. 1: Evolution de la  $DQM$  en fonction de  $\mu$  : Comparaison entre les approches perturbations et l'approche exacte

## 5 Conclusion

L'objet de cette étude est de comparer deux approches d'analyse des filtres adaptatifs, valables pour des pas d'adaptation élevés. On montre ainsi que l'approche de perturbation donne, en effet, un développement limité en  $\mu$  du calcul exact obtenu dans le contexte alphabet fini.

## Références

- [1] R. Aguech, E. Moulines and P. Priouret, "On a Perturbation Approach for the Analysis of Stochastic Tracking Algorithms", Soumis à SIAM, 1998.
- [2] A. Perrier, "Développement et analyse de performance d'algorithmes de type gradient stochastique", Thèse Ecole Nationale Supérieure de Télécommunications, Paris, décembre 1995.
- [3] H. Besbes, M. Jaidane-Saidane and J. Ezzine, "On Exact Convergence Results of Adaptive Filters : the Finite Alphabet Case", Accepté au Journal de EurasiP, juillet 1998.
- [4] H. Besbes, "Filtrage adaptatif dans le contexte alphabet fini. Application à l'identification de canaux non linéaires et non stationnaires", Thèse de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, Février 1999.
- [5] Y. Ben Jemâa, "Analyse de performances de quelques algorithmes adaptatifs en alphabet fini", DEA, Automatique et Traitement du Signal, Université Paris XI, SUPELEC, Sept. 1998.
- [6] S.C. Douglas, W. Pan "Exact Expectation Analysis of the LMS Adaptive Filter", IEEE Trans. Signal Processing Vol 43, N12 pp 2863-2871, Décembre 1995.

