

ESTIMATION FREQUENTIELLE ET ECHANTILLONNAGE : LES BONS CHOIX

Alain DUCASSE, Corinne MAILHES, Francis CASTANIÉ

ENSEEIHHT/TéSA

2 rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 07, France

Alain.Ducasse@wanadoo.fr, Corinne.Mailhes@len7.enseeiht.fr

Francis.Castanie@len7.enseeiht.fr

Résumé – Cet article est consacré à l’influence des effets de la fréquence d’échantillonnage sur les erreurs d’estimation fréquentielle par les méthodes Yule-Walker et “Haute Résolution”. L’intérêt de cet article est de mettre en évidence le phénomène suivant : - en fonction de la méthode d’estimation fréquentielle utilisée, la fréquence d’échantillonnage doit être correctement choisie, - ou, inversement, la fréquence d’échantillonnage étant fixée, cet article fournit un guide d’utilisation des différentes méthodes d’estimation fréquentielle. Une conséquence directe de ses résultats peut être d’envisager un *rééchantillonnage du signal* afin de se placer dans des conditions optimales avant toute analyse spectrale.

Abstract – This paper is devoted to the sampling frequency choice effect on frequency estimation errors using Yule-Walker and High Resolving methods. This paper shows that the sampling frequency has to be chosen, depending on the frequency estimation method. Or, rather, the sampling frequency being fixed, this paper can be used as a guide of frequency estimation method choice. Thus, before any spectral analysis, a resampling has to be done in order to perform frequency estimation in an optimal way.

1 Présentation du problème

Nous nous intéressons dans cette étude, à l’estimation des fréquences d’un signal réel bruité $y(n)$, composé de K sinusoïdes non amorties :

$$y(n) = x(n) + w(n) = \sum_{k=1}^K A_k \cos(2\pi f_k n + \phi_k) + w(n) \quad (1)$$

où A_k , ϕ_k et f_k sont respectivement l’amplitude, la phase aléatoire uniformément répartie sur $[0, 2\pi]$ et la fréquence normalisée ($f_k = \frac{F_k}{F_e}$) de la $k^{\text{ième}}$ sinusoïde, F_e étant la fréquence d’échantillonnage. Le bruit $w(n)$ est supposé blanc, centré, de puissance σ_w^2 et indépendant des phases aléatoires ϕ_k .

Le problème de l’estimation des fréquences d’une somme de sinusoïdes dans un bruit blanc a été très largement étudié [1][4]. Un large éventail de méthodes a été proposé. Les équations de *Yule-Walker* sont à l’origine de nombreux estimateurs basés sur la méthode des moindres carrés ou sur la décomposition en valeurs singulières (*SVD*). Un autre type de méthodes dites “*Haute Résolution*” (*HR*) exploite les propriétés des valeurs et des vecteurs propres de la matrice d’autocorrélation. Les méthodes *HR* les plus connues sont appelées *Pisarenko*, *MUSIC* et *ESPRIT*. Cet article est consacré à l’étude des effets de la fréquence d’échantillonnage sur les erreurs d’estimation des fréquences par les méthodes *Yule-Walker* et “*Haute Résolution*”. Dans cet article, la bibliographie est volontairement restreinte : pour un panorama de ces méthodes et une bibliographie étendue (y compris sur les critères de sélection d’ordre), on pourra, par exemple, consulter [4].

Nous allons dans un premier temps, considérer l’estimation par les équations de *Yule-Walker* à l’ordre $p = 2K$ (p est supposé connu) :

$$R_y \hat{\underline{a}} = -\underline{r}_y \quad (2)$$

$R_y = R_x + R_w$ et $\underline{r}_y = \underline{r}_x + \underline{r}_w$ représentant respectivement la matrice et le vecteur des corrélations de y . En introduisant l’erreur sur le vecteur des paramètres \underline{AR} , $\Delta \underline{a} = \hat{\underline{a}} - \underline{a}$ et en utilisant la relation de récurrence liant le signal x ou sa fonction d’autocorrélation, de la forme $R_x \underline{a} = -\underline{r}_x$, l’expression (2) permet d’obtenir :

$$\Delta \underline{a} = -R_y^{-1} (R_w \underline{a} + \underline{r}_w) \quad (3)$$

2 Modélisation AR d’une sinusoïde bruitée

Dans un premier temps, on considère le cas d’une seule sinusoïde bruitée i.e. $K = 1$. L’équation de récurrence d’ordre 2 liant les échantillons $x(n)$ ou $r_x(m)$, est définie par :

$$\begin{aligned} x(n) &= A_1 \cos(2\pi f_1 n + \phi_1) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) \\ r_x(m) &= \frac{A_1^2}{2} \cos(2\pi f_1 m) = -a_1 r_x(m-1) - a_2 r_x(m-2) \end{aligned} \quad (4)$$

avec $a_1 = -2 \cos(2\pi f_1)$ et $a_2 = 1$.

Les 2 paramètres a_1 et a_2 sont estimés à partir de l’approximation du signal bruité par un *AR* d’ordre 2. D’après la relation (3), les erreurs relatives d’estimation des coef-

coefficients AR s'écrivent :

$$\left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right| = \frac{\sigma_w^2 [3P_1 + 2\sigma_w^2]}{(P_1 + \sigma_w^2)^2 - P_1^2 \cos^2(2\pi f_1)}$$

$$\left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right| = \frac{\sigma_w^2 [2P_1 \cos^2(2\pi f_1) + P_1 + \sigma_w^2]}{(P_1 + \sigma_w^2)^2 - P_1^2 \cos^2(2\pi f_1)}$$

$P_1 = A_1^2/2$ représentant la puissance de cette sinusoïde. En dérivant ces erreurs relatives par rapport à la période d'échantillonnage T_e ($f_1 = F_1 T_e$), on obtient le résultat suivant :

- $\left| \frac{\Delta a_1}{a_1} \right|$ et $\left| \frac{\Delta a_2}{a_2} \right|$ ont un unique minimum pour $f_1 = 0.25$,

- cette condition sur la fréquence est indépendante de la puissance du signal et de la puissance du bruit.

Un développement au 1^{er} ordre des relations liant les coefficients estimés \hat{a}_1 et \hat{a}_2 aux pôles permet d'obtenir l'erreur Δf_1 sur la fréquence f_1 :

$$\Delta f_1 \simeq \frac{\Delta a_1}{4\pi \sin(2\pi f_1)}$$

Ainsi, on montre que l'erreur relative $|\Delta f_1/f_1|$ est minimale à la fréquence $f_1 = 0.25$.

3 Modélisation AR d'une somme de sinusoïdes bruitées

3.1 Borne utilisant la valeur propre minimale

Dans le cas d'un signal composé d'une somme de K sinusoïdes bruitées (voir Eq.(1)), l'équation (3) nous permet d'exprimer une borne supérieure de l'erreur relative globale $\frac{\|\Delta \underline{a}\|_2}{\|\underline{a}\|_2}$, $\|\bullet\|_2$ étant la norme euclidienne.

$$\frac{\|\Delta \underline{a}\|_2}{\|\underline{a}\|_2} \leq \|R_y^{-1}\|_2 \|R_w\|_2 \quad (5)$$

La norme $L2$ d'une matrice hermitienne correspond à sa plus grande valeur propre donc :

$$\frac{\|\Delta \underline{a}\|_2}{\|\underline{a}\|_2} \leq \frac{\lambda_{w_{\max}}}{\lambda_{y_{\min}}} \quad (6)$$

où $\lambda_{y_{\min}}$ est la valeur propre minimale de R_y et $\lambda_{w_{\max}}$ la valeur propre maximale de R_w . Le bruit étant supposé blanc, on obtient :

$$\frac{\|\Delta \underline{a}\|_2}{\|\underline{a}\|_2} \leq \frac{\sigma_w^2}{\lambda_{x_{\min}} + \sigma_w^2} \quad (7)$$

où $\lambda_{x_{\min}}$ est la valeur propre minimale de R_x .

3.2 Borne liée au nombre de conditionnement

D'une façon plus générale, l'analyse de la sensibilité de la solution du système (2) peut être abordée sous l'angle de la théorie des perturbations des systèmes linéaires. Considérons $R_y = R_x + \Delta R$ et $\underline{r}_y = \underline{r}_x + \Delta \underline{r}$ où ΔR et $\Delta \underline{r}$ représentent respectivement les perturbations sur la

matrice R_x et sur le vecteur \underline{r}_x , dues au bruit et à l'estimation de la corrélation. L'analyse de ces perturbations [5] conduit au résultat suivant :

S'il existe un réel $\delta < 1$ tel que :

$$\begin{aligned} \|\Delta R\|_2 &\leq \delta \|R_x\|_2 \\ \|\Delta \underline{r}\|_2 &\leq \delta \|\underline{r}_x\|_2 \\ \delta \kappa_2(R_x) &= r < 1 \end{aligned} \quad (8)$$

alors $R_x + \Delta R$ est non singulière et

$$\frac{\|\Delta \underline{a}\|_2}{\|\underline{a}\|_2} \leq \frac{2\delta}{1-r} \kappa_2(R_x) \quad (9)$$

où $\kappa_2(R_x)$ est le nombre de conditionnement de la matrice R_x donné, dans le cas d'une matrice hermitienne, par :

$$\kappa_2(R_x) = \frac{\text{valeur propre maximale de } R_x}{\text{valeur propre minimale de } R_x} = \frac{\lambda_{x_{\max}}}{\lambda_{x_{\min}}} \quad (10)$$

3.3 Etude des bornes

Malheureusement, il est très difficile, voire impossible de calculer les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation R_x pour des ordres supérieurs à 2. Les travaux de Grenander et Szegö [3] suggèrent l'approximation des valeurs propres minimale et maximale respectivement par les valeurs minimale et maximale du spectre. Cette remarque nous permet de comprendre le comportement de $\lambda_{x_{\min}}$. Une démonstration du comportement de $\lambda_{x_{\min}}$ à partir de l'expression du spectre est quasiment impossible, aussi nous nous bornerons à donner une explication visuelle dans le cas de deux sinusoïdes (Fig 1).

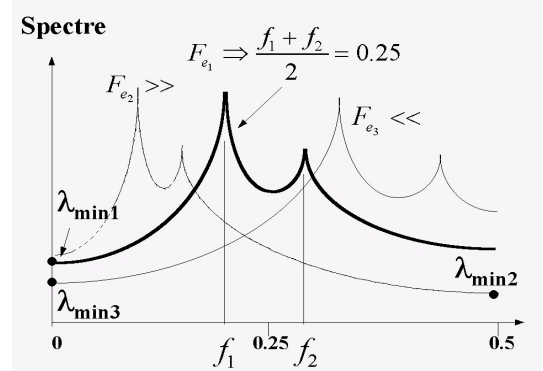


FIG. 1: Variation de la valeur propre minimale en fonction de la fréquence d'échantillonnage.

Du fait de la décroissance du spectre quand $f \rightarrow 0$, $f \rightarrow 0.5$ et localement autour des 2 fréquences des sinusoïdes, il paraît évident que le minimum du spectre est maximal lorsque la fréquence barycentre $f_B = \frac{f_1+f_2}{2}$ se situe autour de 0.25. Le même raisonnement reste valable pour un nombre quelconque de sinusoïdes. L'approximation de $\lambda_{x_{\min}}$ par le minimum du spectre admet donc un maximum autour de 0.25.

D'autre part, si nous nous intéressons à l'évolution du nombre de conditionnement $\kappa_2(R_x)$ en fonction de la fréquence barycentre pondérée par les puissances de chacune des sinusoïdes, on obtient expérimentalement les résultats de la figure 2.

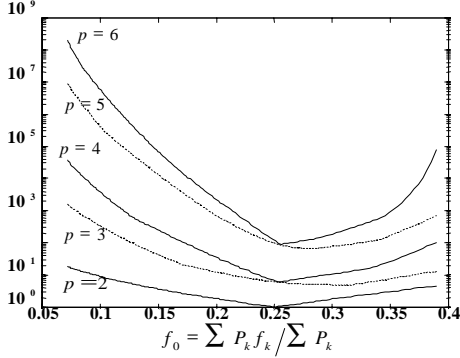


FIG. 2: Nombre de conditionnement $\kappa(p)$ en fonction de f_0 pour un signal composé de 3 sinusoïdes

Cette figure montre tout d'abord que pour $p = 2$, le conditionnement est minimum lorsque $f_0 = 0.25$. Pour des ordres supérieurs à 2, le conditionnement comporte un minimum. En particulier, pour les ordres pairs, le minimum est proche de $f_0 = 0.25$. Cependant cette proximité est très sensible aux écarts entre les fréquences et aux rapports de puissance, et pour d'autres valeurs on peut obtenir un minimum du conditionnement assez éloigné de 0.25 (autour de 0.3 ou 0.2).

D'après les bornes obtenues au paragraphe précédent et les approximations de $\lambda_{x_{\min}}$ et $\lambda_{x_{\max}}$, on peut énoncer le résultat suivant : le nombre de conditionnement est minimal ($\lambda_{x_{\min}}$ maximal) lorsque la fréquence barycentre des fréquences du signal est proche de 0.25. Cela implique que les bornes supérieures de $\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\|}{\|\underline{a}\|}$, (7) et (9), sont minimales autour de 0.25.

Les résultats précédents ont montré l'existence d'un minimum du nombre de conditionnement autour de 0.25. Cela implique que la borne supérieure de $\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\|}{\|\underline{a}\|}$ est minimale autour de 0.25. Cependant cela ne prouve pas l'existence d'un minimum pour $\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\|}{\|\underline{a}\|}$, la seule chose qu'on puisse dire est que la solution de *Yule-Walker* sera moins sensible aux perturbations autour de 0.25. Même en admettant un minimum pour $\frac{\|\Delta_{\underline{a}}\|}{\|\underline{a}\|}$, il est pratiquement impossible de démontrer que cela conduit nécessairement à un minimum de l'erreur relative sur les pôles $\frac{\|\Delta_{\underline{z}}\|}{\|\underline{z}\|}$. Cependant cette hypothèse paraît intuitivement correcte. Nous nous bornerons donc à constater sur un exemple (3 sinusoïdes), l'existence d'un minimum pour les erreurs relatives sur chaque fréquence autour de 0.25.

Ces minima sont très accentués et font qu'il est impossible d'avoir simultanément un minimum d'erreur sur les 3 fréquences. En effet, si la fréquence d'échantillon-

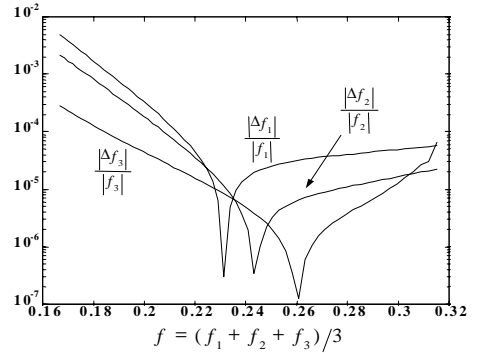


FIG. 3: Erreurs relatives sur les fréquences (signal à trois composantes) en fonction de la fréquence barycentre.

nage est telle qu'on a un minimum d'erreur sur l'une des 3 fréquences, les erreurs sur les 2 autres sont au moins 10 fois plus grandes. Les minima sont aussi présents sur les erreurs relatives globales sur les coefficients AR, sur les pôles et sur les amortissements[2].

Ce comportement du nombre de conditionnement de la matrice d'autocorrélation amène à se poser plusieurs questions sur la sensibilité des systèmes de *Yule-Walker* surdéterminés au sens des moindres carrés ou par des techniques *SVD* (*SVD tronquée*), sur celle des méthodes "Haute Résolution" et sur celle des critères de sélection d'ordre. Les réponses à ces questions se trouvent dans le paragraphe suivant.

4 Méthodes basées sur la matrice d'autocorrélation

4.1 Moindres carrés et SVD

La solution des moindres carrés (*LS*) du système (2) est donnée par :

$$\hat{\underline{a}}_{LS} = -(\hat{R}_y^H \hat{R}_y)^{-1} \hat{R}_y^H \hat{\underline{z}}_y \quad (11)$$

La sensibilité de la solution face aux perturbations \hat{R}_w et $\hat{\underline{z}}_w$ peut se mettre sous la forme [5] [6] :

$$\frac{\|\Delta_{\underline{a}_{LS}}\|}{\|\underline{a}_{LS}\|} \leq C \frac{\|\hat{R}_w\|}{\|\hat{R}_x^H \hat{R}_x\|} \kappa_{LS} \quad (12)$$

où κ_{LS} est le nombre de conditionnement de R_y qui est fonction des valeurs propres minimale et maximale de R_x . Les résultats obtenus sur les valeurs propres du système *Yule-Walker* sont donc applicables. Le nombre de conditionnement κ_{LS} est minimum lorsque f_B est proche de 0.25, ce qui signifie que l'erreur relative de $\hat{\underline{a}}_{LS}$ est minimum lorsque f_B est proche de 0.25.

Dans le cas où le système est résolu au sens des moindres carrés totaux (*TLS*), il a été montré [7] que le nombre de

conditionnement κ_{TLS} est supérieur à κ_{LS} . Malgré une meilleure précision de la solution *TLS* (au sens de la norme de Frobenius), la sensibilité aux perturbations est pratiquement identique à celle de la méthode *LS* et donc avec un minimum de sensibilité autour de 0.25.

Les méthodes s'appuyant sur la *SVD* de la matrice d'autocorrélation, utilisent cette décomposition pour séparer le sous-espace signal du sous-espace bruit. Elles engendrent une réduction de bruit avant de résoudre le système au sens des moindres carrés. La précision de la solution augmente avec ce type de méthodes mais le conditionnement du système reste inchangé.

4.2 Méthodes "Haute Résolution"

Ces méthodes utilisent les vecteurs propres de la matrice \hat{R}_y ou plus précisément une estimation des sous-espaces signal ou bruit. Pour ce type de méthodes, les résultats de la théorie des perturbations ne permettent pas de conclure car on peut montrer que les perturbations sur les valeurs propres ne sont pas liées au signal et à sa fréquence d'échantillonnage. Pour comprendre l'influence de l'échantillonnage, revenons au principe même de ces méthodes : séparer le sous-espace signal du sous-espace bruit. Supposons les valeurs propres de R_y rangées par ordre décroissant : $\hat{\lambda}_{y_1} > \hat{\lambda}_{y_2} > \dots > \hat{\lambda}_{y_p}$. Cette séparation est d'autant plus efficace que la valeur propre $\hat{\lambda}_{y_{2K}} \approx \hat{\lambda}_{x_{2K}} + \sigma_w^2$ est bien séparée de $\hat{\lambda}_{y_{2K+1}} \approx \sigma_w^2$ (pour un signal constitué de K sinusoïdes). Une analyse du comportement de la valeur propre $\hat{\lambda}_{x_{2K}}$ en fonction de l'échantillonnage, permettrait de déterminer l'efficacité des méthodes "Haute Résolution". L'étude de cette valeur propre est difficile, cependant 2 valeurs particulières peuvent être déduites :

- **Lorsque la fréquence d'échantillonnage est très grande par rapport aux fréquences du signal** : les fréquences normalisées f_k sont très proches de zéro ainsi que la fréquence barycentre. On en déduit que l'autocorrélation des sinusoïdes est pratiquement constante et par conséquent une seule valeur propre de R_x est non nulle. Il n'est donc plus possible de séparer les sous-espaces signal et bruit.

- **Lorsque la fréquence d'échantillonnage est à la limite imposée par le théorème de Shannon** : $f_1 < f_2 < \dots < f_K = 0.5$. L'autocorrélation de la sinusoïde de fréquence $f_K = 0.5$ est $(-1)^m \frac{A^2}{2}$ et il suffit donc d'un seul paramètre *AR*, $a_1 = -1$, pour l'estimer. Par conséquent, le rang de la matrice d'autocorrélation R_x est $2K - 1$ et la valeur propre $\lambda_{x_{2K}}$ est nulle.

Ces résultats montrent que si le signal est suréchantillonné ($f_k \rightarrow 0$) ou alors échantillonné à la limite de Shannon ($f_K = 0.5$), la distinction entre les sous-espaces signal et bruit est difficile et par conséquent les méthodes "Haute Résolution" seront moins performantes. Toutefois, des simulations montrent que cette conclusion doit être nuancée : les méthodes *MUSIC* et *ESPRIT* présentent des erreurs relatives plus faibles lorsque l'échantillonnage est proche de la limite de *Shannon*.

4.3 Sélection d'ordre

Lorsque l'on ne connaît pas a priori le nombre de sinusoïdes présentes dans le signal, on fait appel à des estimateurs de l'ordre. Parmi les plus connus, on peut citer le critère d'*Akaike AIC* et le *MDL (Minimum Description Length)*. Tout comme les méthodes "Haute Résolution", le critère *MDL* est sensible à la fréquence d'échantillonnage. Cependant son domaine d'efficacité est plus vaste que dans le cas des méthodes d'estimation des fréquences, décrites précédemment [2].

5 Conclusion

En conclusion, cet article présente l'étude des effets de la fréquence d'échantillonnage sur les erreurs d'estimation des fréquences par les méthodes *Yule-Walker* et "Haute Résolution". Nous avons obtenu plusieurs résultats importants, qui peuvent servir de **guide** dans l'utilisation des différentes méthodes d'estimation spectrale :

- L'estimation des fréquences d'une somme de sinusoïdes bruitées par les méthodes basées sur les équations de *Yule-Walker (Moindres Carrés et Moindres Carrés Totaux)* présente un minimum d'erreur lorsque la fréquence barycentre des fréquences du signal est proche de 0.25.

- Les méthodes "Haute Résolution" ont un maximum d'efficacité lorsque la fréquence d'échantillonnage est proche de la limite de *Shannon*.

- Les critères d'ordre basés sur les valeurs propres de la matrice d'autocorrélation sont inefficaces lorsque le signal est suréchantillonné ou échantillonné à la limite de *Shannon*.

Enfin, le choix de la fréquence d'échantillonnage n'étant pas toujours confié au traicteur de signaux, cet article montre que le rééchantillonnage du signal ou de son autocorrélation permet d'améliorer la précision des estimateurs fréquentiels. De plus, ce rééchantillonnage permet d'améliorer la sélection de l'ordre des modèles. Les simulations montrent clairement l'utilité d'un rééchantillonnage afin d'améliorer non seulement les erreurs d'estimation des fréquences (réduction dans un facteur supérieur à 10, des erreurs relatives sur les fréquences) mais aussi l'estimation du nombre de sinusoïdes [2].

Références

- [1] Stoica P., Moses R., *Introduction to Spectral Analysis*, Prentice-Hall, 1997.
- [2] Ducasse A., *Estimation de sous-harmoniques à l'aide de méthodes paramétriques* Thèse INPT numéro 1269.
- [3] Grenander U., Szego G, *Toeplitz form and their applications* University of California Press, Berkley, 1958.
- [4] Ducasse A., *Estimation de fréquences : panorama des méthodes paramétriques*, T.S.1998, Vol 15, n 2, pp 149-162.
- [5] Lascaux P., *A.N.matricielle*, MASSON 1987.
- [6] Björck A, *Least Squares Methods*, Department of Mathematics, Linköping University, Sweden, 1991.
- [7] Van Huffel S., *The T.L.S. problem*, SIAM, 1991.