

Bancs de filtres à 3 canaux et analyse échelle-espace non linéaire

Amel BENAZZA-BENYAHIA¹, Jean-Christophe PESQUET², Badara POUYE²

¹SUP'COM, LSTélécoms

Route de Raoued 3.5 Km Cité-El-Ghazala 2083 Ariana Tunisie

²LSS (CNRS/UPS)

Supélec, Plateau de Moulon, 91192, Gif sur Yvette Cedex, France

ben.yahia@planet.tn, Jean-Christophe.Pesquet@lss.supelec.fr

Résumé – Dans cet article, nous traitons du problème de la conception des opérateurs intervenant dans un banc de filtres non linéaires. L'originalité du travail réside dans le fait que nous utilisons comme moyen de conception des filtres non linéaires des analyses multi-échelles construites à partir d'équations aux dérivées partielles. Notre démarche nous amène à la mise en place d'une nouvelle structure de banc de filtres non linéaires à 3 canaux garantissant une reconstruction parfaite. Par ailleurs, nous nous intéressons à l'analyse, au moyen de la décomposition considérée, d'un signal particulier, qui présente une discontinuité. Enfin, des résultats de simulation montrent le caractère prometteur de cette structure d'analyse dans le contexte du débruitage de signaux.

Abstract – In this paper, we are interested in designing appropriate operators associated to nonlinear bank filters. The main contribution of this study consists in using for such design, a multiscale analysis built from partial differential equations. We propose a new structure of nonlinear subband decomposition with 3 subbands ensuring a perfect reconstruction. Furthermore, we study the analysis of a particular signal with a discontinuity by means of the considered structure. Finally, experimental results indicate that promising performances can be expected from such nonlinear structures in the context of signal denoising.

1 Introduction

Les représentations échelle-espace des signaux se sont avérées des outils performants pour l'analyse des signaux comme en attestent les travaux sur la vision par ordinateur [1]. En effet, de telles représentations permettent une description des structures contenues dans le signal et facilitent la détection de transitions. Les premières représentations échelle-espace qui ont été proposées, correspondent à une analyse *linéaire* : le signal est lissé graduellement à l'aide d'un filtre passe-bas dont le noyau dépend de l'échelle considérée [2]. Par la suite, des analyses échelle-espace *non linéaires* ont été envisagées [3]. Récemment, un intérêt croissant s'est manifesté pour des analyse multi-échelles non linéaires exploitant des bancs de filtres [4]. Une approche possible consiste à concevoir des extensions non linéaires des décompositions linéaires en sous-bandes [4]. En effet, les bancs de filtres constituent des outils importants en traitement du signal et des images, dont l'utilité a été démontrée dans de nombreuses applications, notamment le débruitage et la compression. Des extensions non linéaires des analyses en sous-bandes usuelles ont été réalisées dans des travaux récents [5], l'objectif étant de mieux prendre en compte les ruptures ou les contours présents dans les signaux 1D ou 2D. Ces structures non linéaires reposent sur des opérateurs de transition inter-échelles agissant de la résolution la plus fine à la plus grossière. Il en résulte des coefficients d'approximation du signal à une échelle donnée et des détails résiduels qui corespondent

aux informations perdues entre deux niveaux de résolution consécutifs. Une large classe d'opérateurs pouvant être utilisée, on se heurte toutefois, au problème du choix des opérateurs intervenant dans ces analyses. Dans le cas linéaire, la théorie des ondelettes [6] fournit des arguments pour la conception de bancs de filtres, en établissant des liens entre le continu et le discret. Dans ce travail, nous proposons d'utiliser l'approche échelle-espace (*scale-space*) s'appuyant sur une classe particulière d'équations aux dérivées partielles comme fil conducteur pour la détermination d'un banc de filtres non linéaires.

Cet article est organisé comme suit. Dans la partie 2, nous établissons le lien entre l'approche échelle-espace et la structure de décomposition non linéaire en sous-bandes. Dans la partie 3, nous nous intéressons à l'analyse d'un signal particulier au moyen de la structure de décomposition considérée. Enfin, dans le paragraphe 4, nous fournissons des résultats expérimentaux dans le contexte du débruitage.

2 Décomposition non linéaire en sous-bandes

Nous partons d'une nouvelle structure (FIG. 1) de banc de filtres inspirée des travaux décrits dans [5]. La structure représentée sur la FIG. 1 conduit au système suivant

d'équations :

$$\begin{cases} y' = -\mathcal{A}_y[y] + \mathcal{G}_-(\mathcal{A}_x[x]) \\ x' = \mathcal{A}_x[x] - \mathcal{H}_-(y') + \mathcal{H}_+(z') \\ z' = \mathcal{A}_z[z] - \mathcal{G}_+(\mathcal{A}_x[x]) \end{cases} \quad (1)$$

Il s'agit d'une décomposition en 3 sous-bandes. Cette structure garantit une reconstruction parfaite, sous la condition que les opérateurs \mathcal{A}_x , \mathcal{A}_y , et \mathcal{A}_z soient injectifs [5]. En effet, l'étape de synthèse du signal se traduit facilement par le système suivant d'équations :

$$\begin{cases} x = \mathcal{A}_x^{-1}[x' + \mathcal{H}_-(y') - \mathcal{H}_+(z')] \\ z = \mathcal{A}_z^{-1}[z' + \mathcal{G}_+(\mathcal{A}_x[x])] \\ y = \mathcal{A}_y^{-1}[-y' + \mathcal{G}_-(\mathcal{A}_x[x])] \end{cases} \quad (2)$$

Par ailleurs, dans la théorie échelle-espace, un signal continu $x(t)$ a une représentation $c(t, s)$ qui, à l'échelle $s \geq 0$, est définie [7, 2] comme la solution de l'Equation aux Dérivées Partielles (EDP) suivante :

$$\frac{\partial c(t, s)}{\partial s} = \mathcal{F}[c](t, s), \quad (3)$$

où \mathcal{F} désigne un opérateur différentiel. On choisit comme condition initiale :

$$c(t, 0) = x(t). \quad (4)$$

Une classe assez intéressante d'EDP est celle suggérée dans [9] qui est définie par :

$$\mathcal{F}[c](t, s) = \frac{\partial [F(\partial c(t, s)/\partial t)]}{\partial t}, \quad (5)$$

où $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction «force» bien choisie. En discrétisant les équations (3) et (5) et en posant :

$$\tilde{c}(k, j) = c(k\Delta t, j\Delta s), \quad \bar{F}(u) = \frac{\Delta s}{\Delta t} F\left(\frac{u}{\Delta t}\right), \quad (6)$$

avec $0 < \Delta t \ll 1$ et $0 < \Delta s \ll 1$, nous arrivons à :

$$\tilde{c}(k, j+1) = \tilde{c}(k, j) + \bar{F}(\tilde{c}(k+1, j) - \tilde{c}(k, j)) - \bar{F}(\tilde{c}(k, j) - \tilde{c}(k-1, j)). \quad (7)$$

En décimant par un facteur 2 l'équation (7), nous obtenons :

$$\tilde{c}(2k, j+1) = \tilde{c}(2k, j) + \bar{F}(\tilde{d}(2k, j+1)) - \bar{F}(\tilde{d}(2k-1, j+1)), \quad (8)$$

en définissant comme suit les coefficients $\tilde{d}(k, j+1)$:

$$\tilde{d}(k, j+1) = \tilde{c}(k+1, j) - \tilde{c}(k, j). \quad (9)$$

La relation liant $(\tilde{d}(2k-1, j+1), \tilde{c}(2k, j+1), \tilde{d}(2k, j+1))$ à $(\tilde{c}(2k-1, j), \tilde{c}(2k, j), \tilde{c}(2k+1, j))$ est identique à celle existant entre (y', x', z') et (y, x, z) dans la structure représentée en FIG. 1 avec \mathcal{G}_- , \mathcal{G}_+ , \mathcal{A}_x , \mathcal{A}_y , et \mathcal{A}_z réduits à l'identité et \mathcal{H}_- et \mathcal{H}_+ égaux à \bar{F} . Il existe donc une relation entre la classe considérée d'analyse échelle-espace et la décomposition non linéaire en 3 sous-bandes. Nous avons présenté un résultat similaire dans [10] en recourant cependant à une approximation qui conduit à un comportement sous-optimal de l'opérateur de transition inter-échelles, dans les zones homogènes du signal.

A ce point, la question qui se pose est de savoir s'il est possible d'obtenir une décomposition non redondante.

Notons d'abord que la redondance d'une structure de décomposition en sous-bandes correspond au rapport entre le nombre de sous-bandes en sortie sur le nombre de composantes polyphase utilisées en entrée. La structure précédente correspond à ainsi une redondance de l'ordre de 3/2 puisque seules les composantes d'indices pairs et impairs du signal $\tilde{c}(k, j)$ sont utilisées pour le calcul des sous-bandes à l'échelle plus grossière $j+1$. A l'échelle $j+1$, nous pouvons envisager une décimation par un facteur 3. L'équation (7) devient alors

$$\tilde{c}(3k, j+1) = \tilde{c}(3k, j) + \bar{F}(\tilde{d}(3k, j+1)) - \bar{F}(\tilde{d}(3k-1, j+1)), \quad (10)$$

en gardant la même définition que dans l'équation (9) pour $\tilde{d}(k, j+1)$. Il apparaît que le triplet $(\tilde{d}(3k-1, j+1), \tilde{c}(3k, j+1), \tilde{d}(3k, j+1))$ est lié au triplet $(\tilde{c}(3k-1, j), \tilde{c}(3k, j), \tilde{c}(3k+1, j))$ par les équations de type (1). Ainsi, comme pour la décimation d'un facteur 2, le schéma de la FIG. 1 permet de mettre en œuvre cette analyse à sous-échantillonnage critique.

3 Analyse de signaux discontinus

Pour montrer l'intérêt de la structure non linéaire proposée, intéressons-nous à l'analyse du signal à temps discret $x(k)$ correspondant à la superposition de deux signaux :

$$x(k) = A + \alpha u(k - k_0) + b(k), \quad (11)$$

où k_0 désigne un entier, A et α sont des constantes réelles avec $|\alpha| \gg 1$, $u(k)$ désigne l'échelon unité (tel que $u(k) = 1$ quand $k \geq 0$) et $b(k)$ est un signal tel que :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad |b(k)| \ll 1. \quad (12)$$

Physiquement, ce type de signal $x(k)$ correspond à une transition brusque à la position k_0 , d'amplitude passant de A à $A + \alpha$. Cette transition est perturbée faiblement par le signal $b(k)$. La structure illustrée dans la FIG. 1 permet d'extraire les trois composantes suivantes :

$$\begin{cases} d_-(k) = x(3k-1) - x(3k) \\ d_+(k) = x(3k+1) - x(3k) \\ c(k) = x(3k) + \bar{F}(d_-(k)) + \bar{F}(d_+(k)) \end{cases}, \quad (13)$$

si l'on suppose que \bar{F} est une fonction impaire. Pour mettre en évidence les propriétés des signaux générés, on se restreint à une simple décomposition sur un étage utilisant une fonction force telle que :

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} \bar{F}(u) = 0, \quad (14)$$

et

$$\bar{F}(u) \sim au, \quad \text{quand } u \rightarrow 0, \quad (15)$$

où a désigne une constante réelle. Notons que ces hypothèses sont communément vérifiées dans le cadre des représentations espace-échelle. En effet, en présence de discontinuités, la fonction \bar{F} doit stopper toute «diffusion» tandis que la «diffusion», correspondant à un lissage du

signal, doit intervenir dans les zones homogènes. En combinant les équations (11) et (13), on obtient :

$$\begin{aligned} d_-(k) &= -\alpha\delta(3k - k_0) + b(3k - 1) - b(3k) \\ d_+(k) &= \alpha\delta(3k + 1 - 3k_0) + b(3k + 1) - b(3k) \end{aligned} \quad (16)$$

où $\delta(k)$ désigne la suite de Kronecker.

Trois cas de figure doivent être distingués selon que k_0 est un multiple de 3 ou non. Dans toute la suite, pour tout entier k , on pose :

$$r(k) = ab(3k - 1) + (1 - 2a)b(3k) + ab(3k + 1). \quad (17)$$

Cas I : $k_0 = 3p$. En utilisant l'équation (15), le signal $c(k)$ a le développement limité suivant si $k = p$:

$$c(p) \sim A + \alpha + (1 - a)b(3p) + ab(3p + 1) \quad (18)$$

et, si $k \neq p$:

$$c(k) \sim A + \alpha u(k - p) + r(k). \quad (19)$$

Cas II : $k_0 = 3p + 1$. Un raisonnement similaire conduit à :

$$c(p) \sim A + ab(3p - 1) + (1 - a)b(3p) \quad (20)$$

et, si $k \neq p$,

$$c(k) \sim A + \alpha u(k - p - 1) + r(k). \quad (21)$$

Cas III : $k_0 = 3p - 1$. Dans ce dernier cas, il apparaît que :

$$c(k) \sim A + \alpha u(k - p) + r(k), \quad (22)$$

Contrairement au cas linéaire, la structure de décomposition proposée n'adoucit pas les transitions brusques au niveau du signal d'approximation $c(k)$. Notons que cette propriété se conserve de façon récursive au travers des échelles quand on procède à une analyse multirésolution non linéaire du signal.

De plus, l'effet de la structure d'analyse sur le signal de perturbation $b(k)$ est équivalente à l'action d'un filtre linéaire dont la réponse fréquentielle est donnée par :

$$\hat{h}_b(f) = 1 - 2a + 2a \cos(2\pi f). \quad (23)$$

L'étude de cette réponse fréquentielle permet de fixer la valeur de la constante a intervenant dans (15) de façon à assurer une atténuation maximale des composantes hautes-fréquences provenant de $b(k)$ dans le signal d'approximation $c(k)$. Compte tenu du fait que $\hat{h}_b(1/2) = 1 - 4a$, un choix naturel pour cette constante est $a = 1/4$.

4 Résultats expérimentaux

Pour illustrer notre travail, nous présentons une utilisation du banc de filtres non linéaires ainsi conçu dans une application de débruitage. Pour ce faire, nous appliquons l'analyse multirésolution obtenue sur 3 niveaux de résolution, en employant comme fonction de «force» F , la fonction proposée par de Perona et Malik [8] :

$$F(u) \propto u \exp\left(-\frac{u^2}{K}\right), \quad (24)$$

avec $K > 0$. Les performances de la décomposition non linéaire proposée sont comparées à celles d'un débruitage par ondelettes et à celles d'un débruitage par filtrage médian (FIG. 2). On voit que la méthode préconisée assure à la fois une bonne réjection du bruit et une préservation des discontinuités présentes dans le signal.

Références

- [1] T. Lindeberg, *Scale-Space Theory in Computer Vision*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 1994.
- [2] T. Lindeberg, B. M. ter Haar Romeny, "Linear Scale-space I : Basic Theory", in *Geometry-Driven Diffusion in Computer Vision*, Vol.1, pp. 1 - 38, 1994.
- [3] L. Alvarez, F. Guichard, P.L. Lions, J.M. Morel, "Axiomes et équations fondamentales du traitement d'images", *Compte-Rendu de l'Académie des Sciences*, Paris, Vol. 315, pp. 135-138, 1992.
- [4] O. Egger, W. Li, M. Kunt, "High compression image coding using an adaptive morphological subband decomposition", *Proc. IEEE*, Vol. 83, pp. 272-287, 1995.
- [5] F. J. Hampson, J.-C. Pesquet, "M-band Nonlinear Subband Decomposition with Perfect Reconstruction", *IEEE Transactions on Image Processing*, Vol. 7, NO. 11, pp. 1547 -1560, November 1998.
- [6] S. Mallat, "A Theory For Multiresolution Signal Decomposition : The Wavelet Representation", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 11, pp. 674 - 693, 1989.
- [7] J. J. Koenderink, "The Structure of Images", *Biol. Cyber.*, Vol. 50, pp. 363 - 370, 1984.
- [8] P. Perona, J. Malik, "Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion", *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 12, NO. 7, pp. 629 - 639, July 1990.
- [9] I. Pollak, A. S. Willsky, H. Krim, "Scale-space Analysis by Stabilized Inverse Diffusion Equations", *Technical Report*, Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- [10] B. Pouye, A. Benazza-Benyahia, I. Pollak, J.-C. Pesquet and H. Krim, "Nonlinear Frame-like Decomposition", in *Proceedings of EUSIPCO-98*, Island of Rhodes - Greece, pp. 1393-1396, September 1998.

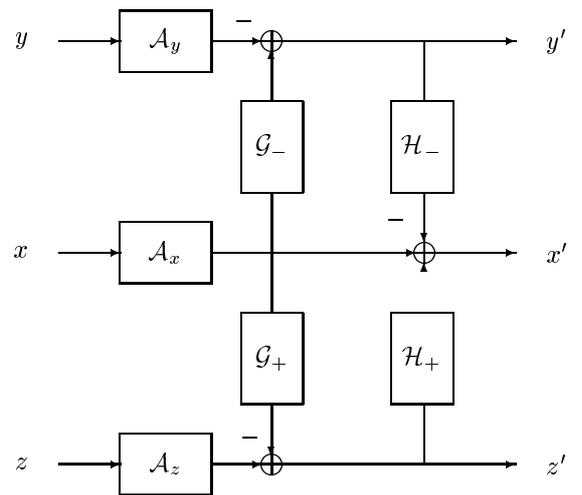


FIG. 1: Structure de décomposition.

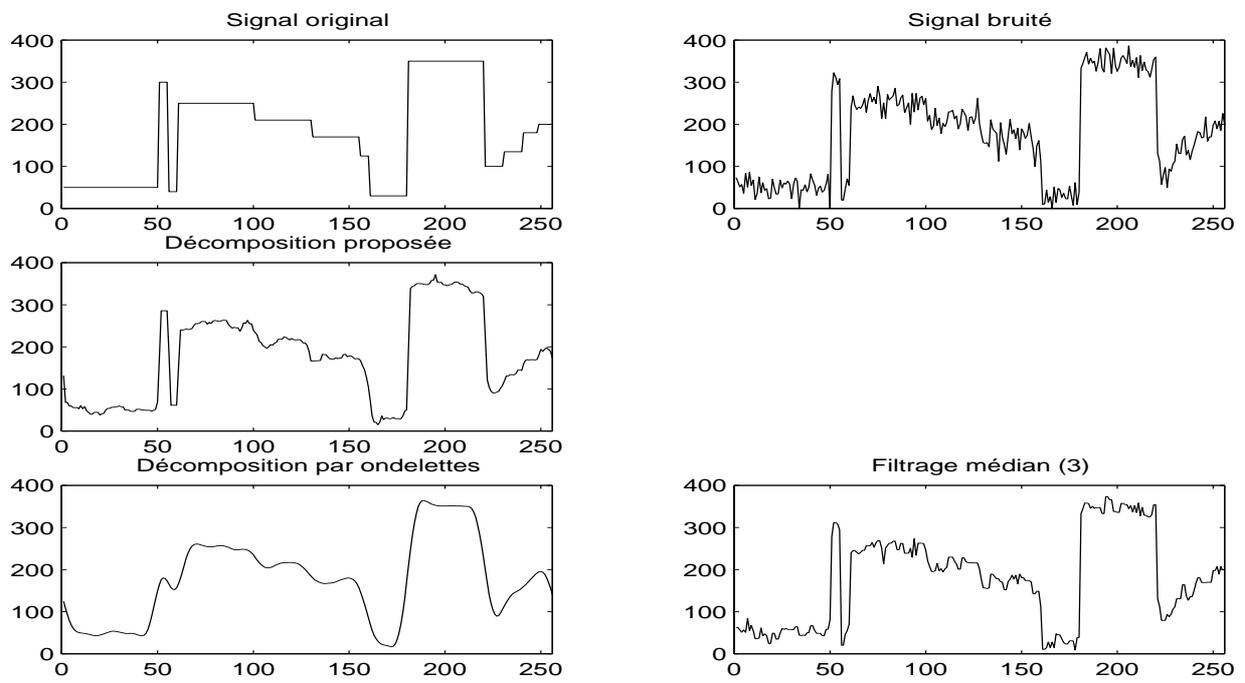


FIG. 2: Débruitage sur un signal de synthèse.