

# Estimation des aberrations d'un télescope optique par diversité de phase

Amandine BLANC<sup>1,2</sup>, Laurent MUGNIER<sup>1</sup>, Jérôme IDIER<sup>2</sup>

<sup>1</sup>O.N.E.R.A.,

B.P. 72, 92322 Châtillon Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux et Systèmes(CNRS-SUPELEC-UPS),  
École Supérieure d'Électricité

Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette, France

blanc@onera.fr, mugnier@onera.fr, idier@lss.supelec.fr

**Résumé** – Cet article est consacré à l'estimation des aberrations optiques d'un télescope spatial d'observation de la Terre par diversité de phase. Deux estimateurs sont présentés et comparés à l'aide de simulations. Le premier, déjà utilisé dans la littérature, repose sur la recherche conjointe des aberrations et de l'objet observé par maximisation de la vraisemblance généralisée. Le second est un nouvel estimateur que nous proposons, basé sur la recherche des aberrations seules par maximum de vraisemblance.

**Abstract** – This paper deals with the estimation of the optical aberrations of a space telescope by phase diversity. Two estimators are proposed and compared by means of simulations. The first one, which was already implemented in the literature, is based on a joint estimation of the aberrated phase and the observed object through maximization of the generalized likelihood; the other one is a new approach, based on the sole estimation of the aberrated phase through maximum likelihood.

## 1 Introduction

La présence d'aberrations optiques dans un système d'imagerie (télescope par exemple), qu'elles soient induites par la turbulence atmosphérique ou par les défauts optiques de l'instrument, dégrade la qualité des images enregistrées. Lors de la formation de ces images, ces aberrations donnent naissance à des variations de la phase optique  $\phi$  dans la pupille de l'instrument qui atténuent la fonction de transfert. On cherche à déterminer ces aberrations (c'est-à-dire à reconstruire la carte de phase) à partir de l'image acquise, afin de les corriger. Cette correction peut être effectuée *a posteriori* (restauration d'images) ou en temps réel (optique active ou adaptative).

La réponse impulsionnelle du système ainsi que l'objet observé étant inconnus, retrouver ces aberrations à partir de l'image enregistrée est un problème de déconvolution myope. Or, en l'absence d'hypothèses structurelles fortes sur la phase et sur l'objet, le déficit d'information limite fortement les performances de ce type de méthodes de déconvolution. Une technique simple et facile à mettre en œuvre, pour apporter plus d'information sur la phase, est d'acquérir simultanément plusieurs images liées entre elles par des relations parfaitement connues. Cette méthode s'appelle la diversité de phase[1,2]. Dans la suite, nous nous proposons d'utiliser la diversité de phase pour estimer les aberrations optiques d'un télescope spatial d'observation de la Terre. Le modèle d'imagerie utilisé, ainsi que la diversité de phase seront présentés dans le paragraphe 2. Les travaux menés par différents auteurs [2–4] sur la reconstruction de surface d'onde par diversité de phase sont tous basés sur la recherche conjointe de l'objet

observé et des aberrations par maximisation de la vraisemblance généralisée. Une approche similaire est présentée dans le paragraphe 3. Mais comme nous le verrons, cet estimateur n'offre pas la cohérence statistique souhaitée. C'est pourquoi un nouvel estimateur marginalisé de type maximum de vraisemblance est proposé et présenté dans le paragraphe 4. Une comparaison des performances de ces deux estimateurs est faite, sur la base de simulations, dans le paragraphe 5.

## 2 Modèle d'imagerie et diversité de phase

Dans le domaine isoplanétique (c'est-à-dire le domaine où la réponse impulsionnelle demeure identique en tout point du champ), l'image acquise  $i$  est liée à la réponse impulsionnelle du système  $h$  et à l'objet observé  $o$  par la relation de convolution:

$$i = h * o + n \quad (1)$$

où  $n$  est un bruit additif. De plus, dans l'approximation du champ proche (scintillation négligeable), la réponse impulsionnelle s'écrit :

$$h = |TF(\exp(i\phi))|^2 \quad (2)$$

avec  $\phi$  la phase dans la pupille du télescope et  $TF$  l'opérateur de transformée de Fourier. En pratique, les quantités accessibles sont discrètes du fait de l'échantillonnage des images. On peut donc récrire l'équation (1) sous forme matricielle :

$$i = Ho + n \quad (3)$$

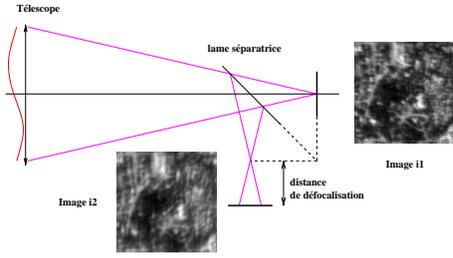


FIG. 1: Principe de la diversité de phase

où  $H$  est une matrice de Toeplitz à blocs Toeplitz correspondant à la convolution par la réponse impulsionnelle  $h$  et où  $i$ ,  $o$  et  $n$  sont désormais les formes discrètes des grandeurs définies précédemment.

Le principe de la diversité de phase repose sur la mesure simultanée de plusieurs images (ici nous nous limiterons à deux). La première image  $i_1$  est acquise dans le plan focal du système optique et la deuxième  $i_2$  dans un plan défocalisé d'une distance  $d$  connue (voir figure 1). Les phases associées à chacun de ces plans d'observation sont liées par la relation :

$$\phi_2 = \phi_1 + \phi_d \quad (4)$$

avec  $\phi_1$  la phase dans le plan focal,  $\phi_2$  celle associée au plan défocalisé et  $\phi_d$  la phase induite par la défocalisation ( $\phi_d$  est parfaitement connue).

Le problème à résoudre est le suivant: à partir des deux images  $i_1$ ,  $i_2$  et de la distance de défocalisation  $d$  et sans connaître l'objet  $o$ , on souhaite estimer les aberrations optiques c'est à dire reconstruire la phase  $\phi_1$ . Comme il a été indiqué dans l'introduction, la connaissance de ces aberrations permet, selon le dispositif expérimental, soit de les corriger en temps réel par un miroir déformable, soit de connaître la réponse impulsionnelle pour effectuer une déconvolution ultérieure de l'image dégradée.

### 3 Estimation conjointe

Nous nous intéressons, tout d'abord, à une reconstruction conjointe de l'objet et des aberrations. Cette approche est basée sur la recherche du Maximum de Vraisemblance Généralisé (MVG) défini ainsi :

$$(\hat{o}, \hat{\phi})_{\text{MVG}} = \arg \max_{o, \phi} f(o|i_1, i_2; \phi, \theta). \quad (5)$$

où  $\theta$  représente les hyperparamètres du problème, et avec  $f(o|i_1, i_2; \phi, \theta) \propto f(i_1|o; \phi, \theta)f(i_2|o; \phi, \theta)f(o; \theta)$ . Le bruit est supposé blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$  (identique pour les deux images). On associe un *a priori* gaussien à l'objet de moyenne  $o_m$  et de matrice de covariance  $R_o$ . Nous supposons la loi de l'objet stationnaire donc que  $R_o$  est une matrice de Toeplitz. Les matrices de Toeplitz peuvent être approximées par des matrices circulantes (cette approximation correspondant à une périodisation). Sous cette hypothèse,  $R_o$ ,  $H_1$  et  $H_2$  sont diagonalisables dans la base des exponentielles de Fourier discrètes. On peut alors écrire le critère à minimiser  $L_{\text{MVG}}(o, \phi) = -\ln(f(o|i_1, i_2; \phi, \theta))$  dans le domaine

de Fourier :

$$L_{\text{MVG}}(o, \phi) \propto \sum_f \left[ \frac{|\tilde{h}_1(f)\tilde{o}(f) - \tilde{i}_1(f)|^2}{\sigma^2} + \frac{|\tilde{h}_2(f)\tilde{o}(f) - \tilde{i}_2(f)|^2}{\sigma^2} + \frac{|\tilde{o}(f) - \tilde{o}_m(f)|^2}{S_o(f)} \right] \quad (6)$$

où le tilde représente la transformée de Fourier discrète de la grandeur,  $f$  la fréquence spatiale et  $S_o$  la densité spectrale de puissance de l'objet.

L'annulation de la dérivée partielle du critère  $L_{\text{MVG}}$  par rapport à l'objet fournit une expression analytique  $\tilde{o}(\phi)$  qui minimise le critère à  $\phi$  fixée. En injectant  $\tilde{o}$  dans le critère, on fait disparaître la dépendance vis-à-vis de l'objet. L'avantage de ce critère  $L'_{\text{MVG}}(\phi) = L_{\text{MVG}}(\tilde{o}(\phi), \phi)$  est de réduire l'espace des solutions à explorer. En revanche,  $L'_{\text{MVG}}$  et  $L_{\text{MVG}}$  ne sont pas convexes et possèdent le même nombre de minima locaux. En effet on montre que  $\frac{\partial L'}{\partial \phi} = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Big|_{o=\tilde{o}(\phi)}$  ainsi  $\phi$  est un extremum de  $L'_{\text{MVG}}$  si et seulement si  $(\tilde{o}(\phi), \phi)$  est un extremum de  $L_{\text{MVG}}$ .

Il reste à préciser le modèle de densité spectrale de puissance de l'objet que nous avons choisi[5] :

$$\begin{aligned} S_o(f) &= E[|\tilde{o}(f) - \tilde{o}_m(f)|^2] \\ &= k/[1 + (f/f_o)^p] - |\tilde{o}_m(f)|^2 \end{aligned} \quad (7)$$

avec  $E$  l'espérance mathématique. Ce modèle est bien adapté aux images terrestres que nous traitons. Il requiert cependant le choix de 3 hyperparamètres  $k$ ,  $f_o$  et  $p$ .

Intéressons-nous aux propriétés de l'estimateur du Maximum de Vraisemblance Généralisé. Il est connu comme étant asymptotiquement biaisé et possédant une variance asymptotique non nulle[6]. Par ailleurs, nous avons cité plus haut le problème de la non-convexité du critère MVG. Enfin, la mise en œuvre de cet estimateur nécessite le choix d'hyperparamètres  $\theta = (\sigma, o_m, k, f_o, p)$ ; or  $\theta$  ne peut pas être estimé en même temps que  $o$  et  $\phi$  (problème de dégénérescence du critère). Ce qui signifie que ces hyperparamètres devront être choisis de façon arbitraire. Pour résoudre ces problèmes, nous nous tournons vers un autre estimateur qui présente de meilleures propriétés.

### 4 Estimation marginale

L'objet observé peut être considéré comme un paramètre de nuisance puisqu'il ne nous importe pas de le reconstruire. Nous proposons, dans la suite, de l'intégrer hors du problème et d'estimer la phase seule ou bien la phase et les hyperparamètres.

L'estimateur du maximum de vraisemblance pour  $\phi$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{\text{MV}} &= \arg \max_{\phi} f(i_1, i_2; \phi, \theta) \\ &= \arg \max_{\phi} \int f(i_1, i_2, o; \phi, \theta) do \end{aligned} \quad (8)$$

Nous avons montré que maximiser  $f(i_1, i_2; \phi, \theta)$  revient à minimiser le critère suivant :

$$L_{\text{MV}}(\phi) \propto \ln |R_I| + (I - m_I)^T R_I^{-1} (I - m_I) \quad (9)$$

Avec  $I = (i_1 \ i_2)^T$ , vecteur concaténant les données,  $m_I = (H_1 o_m \ H_2 o_m)^T$ , celui qui contient les images moyennes,  $R_I$  la matrice de covariance de  $I$  et  $|R_I|$  son déterminant.

Les deux critères  $L_{MV}$  et  $L'_{MVG}$  sont liés par l'identité remarquable [7]:

$$L_{MV} \propto \ln |R_I| + L'_{MVG} \quad (10)$$

Ils ne diffèrent donc que par un terme, qui dans l'espace de Fourier, s'écrit :

$$\begin{aligned} \ln |R_I| &= \sum_f \ln S_o(f) + N^2 \ln \sigma^2 \\ &+ \sum_f \ln \left( |\tilde{h}_1(f)|^2 + |\tilde{h}_2(f)|^2 + \frac{N^2 \sigma^2}{S_o(f)} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

avec  $N^2$  le nombre de pixels dans l'image.

Sous des conditions mathématiques peu restrictives, l'estimateur du maximum de vraisemblance présente un biais et une variance asymptotiques nuls et d'après un théorème de type centrale limite, la nappe de vraisemblance devient de plus en plus gaussienne (donc présente de moins en moins de minima locaux) lorsqu'on augmente la taille des images traitées. En supposant que ces conditions sont réalisées, ce qui fera l'objet d'une étude formelle spécifique, cet estimateur résout asymptotiquement les problèmes que présentent l'estimateur MVG. De plus les hyperparamètres peuvent être estimés en même temps que la phase. En effet, on peut écrire:

$$(\hat{\phi}, \hat{\theta})_{MV} = \arg \max_{\phi, \theta} f(i_1, i_2; \phi, \theta)$$

Les hyperparamètres à estimer sont  $\sigma^2$ ,  $k$ ,  $f_o$  et  $p$  (nous avons supposé l'objet moyen nul). En effectuant le changement de variables  $\mu = \frac{\sigma^2}{k}$ , on peut écrire l'expression analytique de  $\hat{k}$  qui est tel que  $\frac{\partial L_{MV}}{\partial k} \Big|_{k=\hat{k}} = 0$ . Le critère à minimiser s'écrit alors  $L_{MV}(\phi, \mu, f_o, p)$ .

L'estimateur marginalisé que nous proposons a donc, *a priori*, des propriétés asymptotiques intéressantes et permet une estimation «non supervisée» de la phase. Il reste à mettre en œuvre ces deux estimateurs sur la base de traitements de données simulées.

## 5 Simulations

Dans la suite, nous avons décomposé la phase sur la base des polynômes de Zernike, qui forment une base orthonormée sur un support circulaire et qui sont bien adaptés pour décrire les aberrations optiques. La phase a été simulée à partir des 21 premiers polynômes de Zernike (et nous chercherons à reconstruire ces 21 premiers modes); en effet, on peut considérer que les seuls premiers polynômes suffisent à décrire les aberrations qui affectent un télescope spatial. L'amplitude de la phase aberrante ainsi simulée est de  $\frac{\lambda}{8}$  rms. La phase correspondant au plan défocalisé est calculée à partir de la phase plan focal à laquelle on ajoute une défocalisation telle que l'amplitude crête à crête de la défocalisation  $\phi_d$  soit égale à  $2\pi$  radians. Les images simulées (présentées sur la figure 1) sont obtenues par convolution d'une scène terrestre avec les réponses impulsionnelles associées à chaque plan d'observation et bruitées avec deux

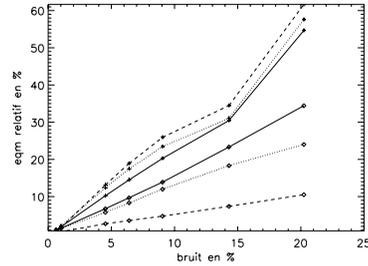


FIG. 2: comparaison de l'erreur quadratique relative en % sur l'estimation des modes avec les hyperparamètres vrais, commise avec l'estimateur MV [losanges] et avec l'estimateur MVG [croix]. En [traits pleins] pour une image  $32 \times 32$  pixels, [pointillés] pour une image  $64 \times 64$ , [tirets] pour une image  $128 \times 128$ .

réalisations différentes d'un bruit blanc gaussien stationnaire. Quant à la minimisation des critères, elle est assurée par un algorithme de type gradient à pas adaptatif.

### 5.1 Comparaison à hyperparamètres «vrais»

Nous présentons, tout d'abord, (voir figure 2) une comparaison des performances des deux estimateurs, pour différents niveaux de bruit et différentes tailles d'images, avec les «vrais» hyperparamètres, c'est à dire ceux obtenus en ajustant le modèle de densité spectrale de puissance  $S_o$  à l'aide de l'objet vrai.

Quel que soit le bruit et la taille de l'image traitée, l'estimateur MV se révèle bien plus performant que l'estimateur MVG pour la reconstruction des modes. Lorsque l'on augmente le nombre de données traitées, l'erreur sur la reconstruction des modes diminue pour l'estimateur MV alors qu'elle reste stable voire augmente avec le MVG; c'est la différence de comportement asymptotique des deux estimateurs que nous avons annoncée dans les paragraphes précédents.

### 5.2 Influence de l'hyperparamètre global

Nous allons à présent faire varier l'hyperparamètre «global»  $\lambda$  défini par  $S'_o = S_o/\lambda$ , et étudier son influence sur la reconstruction des modes et de l'objet (faire varier  $\lambda$  autour de 1 revient à faire varier  $k$  autour de sa valeur «vraie» définie plus haut). Pour être exhaustif, il aurait fallu également faire varier les autres hyperparamètres. La figure 3 présente les erreurs résiduelles sur l'objet et sur les modes après reconstruction par MVG et celles après reconstruction par MV, pour un bruit de 14%.

L'estimateur MV présente une bonne cohérence puisque le meilleur réglage de l'hyperparamètre pour la reconstruction de l'objet  $\lambda_{opt}^o$  correspond au meilleur réglage pour les modes  $\lambda_{opt}^\phi$ , de plus nous verrons dans la sous-section suivante qu'il est possible d'estimer cet hyperparamètre optimal en même temps que les modes. Pour l'estimateur MVG,  $\lambda_{opt}^o$  est égal à 1 alors que  $\lambda_{opt}^\phi$  est approximativement égal à  $1/250$ . Comme nous cherchons à estimer les aberrations sans nous intéresser à l'objet reconstruit, avec l'estimateur conjoint, au vu de nos simulations, il semble que l'on obtienne une meilleure reconstruction des

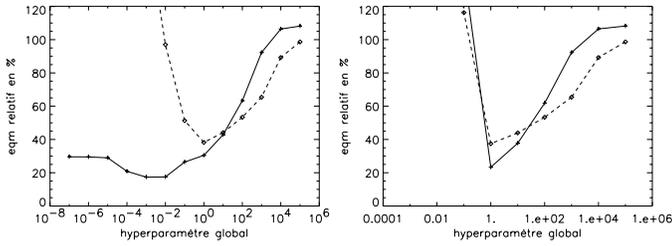


FIG. 3: Comparaison de l'erreur quadratique relative en % sur l'estimation de l'objet [losanges-tirets] et sur l'estimation des modes [croix-trait plein] pour différentes valeurs de  $\lambda$  et un bruit de 14%. Le graphique de gauche correspond à l'estimateur MVG, celui de droite à l'estimateur MV.

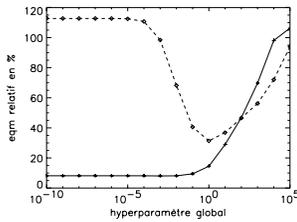


FIG. 4: Comparaison de l'erreur quadratique relative en % sur l'estimation de l'objet [losanges-tirets] et sur l'estimation des modes [croix-trait plein] par l'estimateur MVG pour différentes valeurs de  $\lambda$  et un bruit de 6%.

modes en sous-régularisant. Notons que l'erreur résiduelle sur les modes reconstruits au «meilleur réglage» de l'hyperparamètre pour l'estimation conjointe est légèrement inférieure à celle obtenue avec l'estimation marginale, mais contrairement au  $\lambda_{opt}$  du MV, celui associé au MVG ne peut être estimé de façon réaliste. La figure 4 présente la même comparaison erreur-objet / erreur-modes avec l'estimateur MVG mais pour un bruit plus faible (6%). On observe toujours  $\lambda_{opt}^o \neq \lambda_{opt}^\phi$  mais le meilleur réglage pour les modes correspond à n'importe quel  $\lambda_{opt}^\phi < 1/100$ , c'est-à-dire qu'une sous-régularisation «extrême» donne de bons résultats sur la reconstruction des modes (il est à noter qu'il n'y a plus alors que du bruit dans l'objet reconstruit). Nous avons observé ce comportement surprenant dès lors que le niveau de bruit passe sous un certain seuil (dans nos simulations 10% pour une image  $64 \times 64$  pixels).

### 5.3 Estimation non supervisée

Afin de se placer dans des conditions réalisables en pratique, nous allons comparer l'estimateur du MVG pour une sous-régularisation «extrême» ( $\lambda = 10^{-10}$ ), puisque c'est ainsi que le MVG fournit la meilleure estimation des modes, et nous allons estimer les hyperparamètres en même temps que les modes pour l'estimateur MV. Les résultats, pour différentes tailles d'images et de niveaux de bruit sont présentés figure 5.

L'estimation MV non supervisée donne des résultats presque aussi bons que ceux que l'on avait obtenus avec l'estimateur MV à hyperparamètres «vrais» (voir figure 2). Ces courbes montrent, de plus, que l'estimation marginale

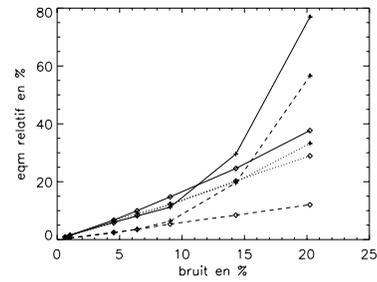


FIG. 5: comparaison de l'erreur quadratique relative en % sur l'estimation des modes par l'estimateur MV [losanges] et par l'estimateur MVG [croix], en non-supervisée. En [traits pleins] pour une image  $32 \times 32$  pixels, [pointillés] pour une image  $64 \times 64$ , [tirets] pour une image  $128 \times 128$ .

«non supervisée» permet une bien meilleure reconstruction des modes que l'estimation conjointe avec régularisation quasi-nulle, lorsque le bruit est important et d'aussi bons résultats pour des niveaux de bruit plus faibles. Pour un coût de calcul quasiment identique, les résultats obtenus avec l'estimateur marginalisé sont également bien plus cohérents d'un point de vue méthodologique.

## 6 Conclusion

Les propriétés des deux estimateurs ont été vérifiées à l'aide des simulations. Le bon comportement du MVG pour une régularisation quasi-nulle reste à expliquer, mais justifie, en partie, ce qui est souvent fait dans la littérature. Toutefois l'estimateur marginalisé que nous avons proposé possède des propriétés statistiques plus intéressantes, facilitant, entre autres, la mise au point de méthodes non supervisées.

## Références

- [1] Gonsalves R. A. *Phase retrieval and diversity in adaptive optics*. Optical Engineering, 21 (5) (1982), pp. 829–832.
- [2] Paxman R. G., Schulz T. J. et Fienup J. R. *Joint estimation of object and aberrations by using phase diversity*. Journal of the Optical Society of America A, 9 (7) (1992), pp. 1072–1085.
- [3] Meynadier L. *Analyse de surface d'onde pour le contrôle actif d'un télescope spatial*. Thèse de doctorat, Université de Nice-Sophia Antipolis (1997).
- [4] Lee D. J., Roggemann M. C., Welsh B. M. et Crosby E. R. *Evaluation of least-squares phase-diversity technique for space telescope wave-front sensing*. Appl. Opt. (décembre 1997), pp. 9186–9197.
- [5] Kattnig A. P. et Primot J. *Model of the second-order statistic of the radiance field of natural scenes, adapted to system conceiving*. Dans *Aeorosense'97 - Visual information processing VI*, vol. 3074, Washington (1997). SPIE, Soc. Photo-Opt. Instrum. Eng.
- [6] Champagnat F. et Idier J. *An alternative to standard maximum likelihood for Gaussian mixtures*. Dans *ICASSP*, pp. 2020–2023, Detroit, U.S.A (mai 1995).
- [7] Goussard Y., Demoment G. et Idier J. *A new algorithm for iterative deconvolution of sparse spike*. Dans *ICASSP*, pp. 1547–1550, Albuquerque, U.S.A. (avril 1990).