

Problème de décomposition d'un signal aléatoire détérioré par la présence de termes perturbateurs

Philippe COURMONTAGNE

MS-GESSY, ISITV, Université de Toulon et du Var
Avenue G. Pompidou, BP 56, 83162 La Valette du Var Cedex
colline@isitiv.univ-tln.fr

Résumé – Nous proposons dans cet article un nouveau traitement permettant d'extraire le signal d'intérêt contenu dans une observation détériorée par la présence d'un signal perturbateur. Le signal utile est restauré en considérant une famille de fonctions liées aux fonctions propres associées au signal utile, au signal perturbateur et à l'observation. Ces fonctions sont choisies à l'aide d'une étude sur la distance quadratique moyenne entre le signal restauré et le signal utile. Nous présentons des simulations dans le cas de signaux bidimensionnels stationnaires.

Abstract – We present in this article a new processing that allows signal filtering. The signal of interest is restored considering a family of functions depending on the eigenfunctions of the signal, of the noise and of the noise-corrupted signal. Computer simulations are given on two-dimensional stationary signals.

1 Introduction

L'extraction de l'information, représentée par un signal aléatoire dit signal utile, présent dans une observation détériorée par la présence d'un signal perturbateur aléatoire est un problème classique en traitement du signal et de l'image. Diverses méthodes ont été proposées en réponse à ce problème. Certaines ont pour finalité la maximisation du rapport signal à bruit [1], d'autres ont pour critère de qualité l'écart quadratique moyen entre le signal restauré et le signal utile [3]. La méthode présentée dans ce papier s'inscrit dans cette seconde catégorie. Le traitement proposé met en jeu la décomposition d'un signal aléatoire suivant le développement de Karhunen-Loève [4]. Aussi, dans une première partie, nous rappelons brièvement le formalisme du développement de Karhunen-Loève. Puis nous développons, dans une seconde partie, le principe de restauration d'un signal utile monodimensionnel, détérioré par la présence de termes perturbateurs. Dans une troisième partie, cette méthode est étendue au cas d'un signal bidimensionnel. Enfin, nous présentons, dans une quatrième, des expérimentations sur des signaux bidimensionnels stationnaires. La méthode proposée s'apparentant au filtrage de Wiener, ces deux méthodes ayant le même critère de qualité, nous comparons nos résultats et ceux obtenus par filtrage de Wiener.

2 Le développement de Karhunen-Loève

Soit $S(t)$ un signal aléatoire, stationnaire au 2^{ème} ordre, centré, défini sur l'intervalle $D = [\Leftrightarrow T; T]$ et soit $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ une séquence infinie de variables aléa-

toires centrées et décorréelées :

$$E\{s_n s_m\} = E\{s_n^2\} \delta_{n,m}$$

$\delta_{n,m}$ représentant le symbole de Kronecker.

Le principe du développement de Karhunen-Loève consiste en la décomposition du signal aléatoire $S(t)$ en une série de fonctions déterministes orthogonales pondérées par des variables aléatoires décorréelées :

$$S(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N s_n \Phi_n^S(t) \quad \forall t \in D \quad (1)$$

Dans cette expression, les fonctions $\Phi_n^S(t)$ représentent les fonctions de base.

Les variables aléatoires s_n sont obtenues par projection du signal $S(t)$ sur la base de fonctions déterministes $\{\Phi_n^S(t)\}$:

$$s_n = \int_D S(t) \Phi_n^S(t) dt \quad (2)$$

Compte tenu de l'orthogonalité des fonctions $\Phi_n^S(t)$, de la décorrélation des s_n et en notant $\Gamma_{SS}(t \Leftrightarrow t')$, l'autocorrélation du signal, on peut montrer que la décorrélation des variables s_n est assurée lorsque les $\Phi_n^S(t)$ sont solutions de :

$$\int_D \Gamma_{SS}(t \Leftrightarrow t') \Phi_n^S(t') dt' = \lambda_n^S \Phi_n^S(t) \quad \forall t \in D \quad (3)$$

Cette équation intégrale est connue sous l'appellation d'équation intégrale homogène de seconde espèce de Fredholm [2]. Et nous avons $E\{s_n^2\} = \lambda_n$.

3 Restauration du signal utile en présence de termes perturbateurs

Considérons un signal aléatoire observé dont le signal d'intérêt est détérioré par la présence d'un signal pertur-

bateur. Nous nous intéressons, dans cette partie, au problème posé par la restitution du signal utile. Nous considérons pour la suite avoir une connaissance *a priori* quant à l'autocorrélation du signal utile et du signal perturbateur.

3.1 Décomposition simultanée du signal utile et du bruit

Soit :

$$Z(t) = S(t) + B(t) \quad \forall t \in D \quad (4)$$

où $Z(t)$, $S(t)$ et $B(t)$ désignent respectivement l'observation, le signal utile et le signal perturbateur. Ces signaux sont aléatoires, centrés et stationnaires au 2^{ème} ordre. Le signal d'intérêt et le bruit sont supposés indépendants. Nous désirons développer l'observation en une série de la forme :

$$Z(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [s_n \Phi_n^S(t) + b_n \Phi_n^B(t)] \quad (5)$$

Dans cette expression, $\Phi_n^S(t)$ et $\Phi_n^B(t)$ désignent les fonctions propres du signal et du bruit. Elles sont orthogonales et de norme unité et sont obtenues par résolution des équations intégrales de Fredholm dont les noyaux sont respectivement l'autocorrélation du signal $\Gamma_{SS}(t \leftrightarrow t')$ et celle du bruit $\Gamma_{BB}(t \leftrightarrow t')$. Les séquences $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$ et $\{b_1, b_2, \dots, b_n, \dots\}$, constituées des coefficients de décomposition s_n et b_n , constituent deux séquences infinies de variables aléatoires centrées et conjointement décorréliées. En considérant les développements de Karhunen-Loève du signal utile et du signal perturbateur, nous pouvons décrire les variables aléatoires s_n à l'aide de la relation (2) et les variables aléatoires b_n par la relation suivante :

$$b_n = \int_D B(t) \Phi_n^B(t) dt \quad (6)$$

Ainsi, le signal et le bruit sont décomposés en une série de fonctions déterministes avec pour coefficients de décomposition des variables aléatoires décorréliées de variance respective λ_n^S et λ_n^B . Les fonctions de base sont obtenues par résolution d'une équation intégrale de Fredholm dont le noyau représente l'autocorrélation du processus étudié. A présent que nous sommes en mesure de développer l'observation suivant la relation (5), nous allons nous intéresser au problème posé par la restitution du signal utile présent au sein de l'observation.

3.2 Restauration du signal utile

En notant $\tilde{Z}(t)$ et $\tilde{S}(t)$ les signaux aléatoires obtenus en ne retenant que les M premiers termes de leur développement en série de fonctions, une opération de filtrage peut consister à déterminer les fonctions de base du signal utile et du bruit telles que l'erreur quadratique $\epsilon(t)$ entre $\tilde{Z}(t)$ et $\tilde{S}(t)$ soit minimale :

$$E \left\{ \left(\tilde{Z}(t) \leftrightarrow \tilde{S}(t) \right)^2 \right\} = \epsilon(t)$$

Cette dernière relation peut être réécrite comme suit :

$$E \left\{ \left(\tilde{S}(t) + \tilde{B}(t) \leftrightarrow \tilde{S}(t) \right)^2 \right\} = \epsilon(t)$$

$$\Leftrightarrow E \left\{ \left(\tilde{B}(t) \right)^2 \right\} = \epsilon(t)$$

En substituant au signal perturbateur $\tilde{B}(t)$ la série le décrivant, nous obtenons :

$$E \left\{ \left(\sum_{n=1}^M b_n \Phi_n^B(t) \right)^2 \right\} = \epsilon(t)$$

Soit :

$$\sum_{n=1}^M \sum_{m=1}^M E \{ b_n b_m \} \Phi_n^B(t) \Phi_m^B(t) = \epsilon(t)$$

En intégrant cette dernière relation par rapport à t sur l'intervalle D du plan, nous obtenons pour expression de l'erreur quadratique moyenne $\bar{\epsilon}$ entre $\tilde{Z}(t)$ et $\tilde{S}(t)$:

$$\sum_{n=1}^M \lambda_n^B = \bar{\epsilon}$$

Cette dernière relation montre la nécessité de ne conserver que les M fonctions propres $\Phi_n^B(t)$ associées aux valeurs propres λ_n^B minimales.

De la même manière, il est possible de montrer l'intérêt de ne conserver que les fonctions propres $\Phi_n^S(t)$ associées aux valeurs propres λ_n^S maximales, dans le but évident de rendre le plus grand possible l'écart entre $\tilde{Z}(t)$ et $\tilde{B}(t)$.

Une opération de filtrage de l'observation $Z(t)$ pourrait ainsi consister à ne retenir que les fonctions de décomposition $\Phi_n^S(t)$ du signal utile associées aux plus grandes valeurs propres λ_n^S , et à ne retenir que les fonctions $\Phi_n^B(t)$ associées aux plus petites valeurs propres λ_n^B . C'est à dire, ne conserver que les fonctions propres associées aux valeurs propres vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_{Q_S}^S \geq \text{seuil}_S \\ \lambda_{Q_B}^B \leq \text{seuil}_B \end{cases}$$

les valeurs propres λ_n^S ayant été préalablement ordonnées par valeurs décroissantes et les valeurs propres λ_n^B par valeurs croissantes.

En désignant par Q la valeur minimale entre Q_S et Q_B , l'observation filtrée sera reconstruite comme suit :

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{n=1}^Q [s_n \Phi_n^S(t) + b_n \Phi_n^B(t)] \quad (7)$$

Nous avons pu voir que la détermination des variables aléatoires s_n et b_n nécessitait d'avoir une connaissance *a priori* du signal utile et du bruit, ce qui est absurde dans un problème de filtrage, où seule l'observation est une donnée accessible. Aussi n'allons nous plus décomposer l'observation suivant la relation donnée en (5), mais de la façon suivante :

$$Z(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N z_n \Phi_n^Z(t) \quad (8)$$

Dans cette expression, les coefficients de décomposition z_n représentent des variables aléatoires décorréées et $\Phi_n^Z(t)$ des fonctions déterministes orthogonales et de norme unité. Ces fonctions sont obtenues par résolution de l'équation intégrale de Fredholm avec pour noyau l'autocorrélation $\Gamma_{ZZ}(t \leftrightarrow t')$ de l'observation. Les variables z_n sont obtenues par projection de l'observation sur ces fonctions propres :

$$z_n = \int_D Z(t) \Phi_n^Z(t) dt \quad (9)$$

Nous allons pour la suite rechercher le lien unissant ces fonctions $\Phi_n^Z(t)$ avec les fonctions $\Phi_n^S(t)$ et $\Phi_n^B(t)$. Considérons, à présent, l'espérance mathématique du produit des variables aléatoires z_m par l'observation $Z(t)$, donnée par la relation (5), il vient :

$$E\{z_m Z(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N [E\{z_m s_n\} \Phi_n^S(t) + E\{z_m b_n\} \Phi_n^B(t)]$$

Compte tenu des relations (2) et (9) et de l'indépendance du signal utile et du bruit, nous pouvons écrire pour expression de l'espérance mathématique $E\{z_m s_n\}$:

$$E\{z_m s_n\} = \lambda_n^S \int_D \Phi_n^S(t) \Phi_m^Z(t) dt$$

De même, nous pouvons montrer que l'espérance mathématique du produit des b_n et des z_m s'écrit :

$$E\{z_m b_n\} = \lambda_n^B \int_D \Phi_n^B(t) \Phi_m^Z(t) dt$$

Si bien que l'espérance mathématique $E\{z_m Z(t)\}$ devient :

$$E\{z_m Z(t)\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left[\lambda_n^S \Phi_n^S(t) \int_D \Phi_n^S(t') \Phi_m^Z(t') dt' + \lambda_n^B \Phi_n^B(t) \int_D \Phi_n^B(t') \Phi_m^Z(t') dt' \right]$$

En considérant la relation (9), nous pouvons également montrer que cette espérance est égale à :

$$E\{z_m Z(t)\} = \lambda_m^Z \Phi_m^Z(t)$$

Finalement, compte tenu de ces deux dernières relations et de la troncature des séries proposée dans l'expression (7), nous pouvons définir une base de fonctions $\{\tilde{\Phi}_n^Z(t)\}$ telle que :

$$\tilde{\Phi}_m^Z(t) = \sum_{n=1}^Q \left[\lambda_n^S \Phi_n^S(t) \int_D \Phi_n^S(t') \Phi_m^Z(t') dt' + \lambda_n^B \Phi_n^B(t) \int_D \Phi_n^B(t') \Phi_m^Z(t') dt' \right] \frac{1}{\lambda_m^Z} \quad (10)$$

Dans ces conditions, le signal utile pourra être restauré en utilisant la relation suivante :

$$\tilde{Z}(t) = \sum_{n=1}^Q z_n \tilde{\Phi}_n^Z(t) \quad (11)$$

Cette dernière relation garantit l'obtention d'une distance quadratique moyenne minimale entre le signal utile et le signal restauré.

4 Cas d'un signal bidimensionnel

Considérons à présent le signal utile $S(x, y)$ détérioré additivement par la présence du signal $B(x, y)$:

$$Z(x, y) = S(x, y) + B(x, y) \quad \forall (x, y) \in D \times D$$

En appliquant un raisonnement similaire à celui proposé dans le cas de signaux monodimensionnels, nous pouvons montrer que l'observation filtrée $\tilde{Z}(x, y)$ peut être obtenue par reconstruction :

$$\tilde{Z}(x, y) = \sum_{n=1}^Q z_n \tilde{\Phi}_n^Z(x, y) \quad (12)$$

Dans cette expression, les coefficients de décomposition z_n représentent des variables aléatoires décorréées, déterminées par la relation suivante :

$$z_n = \int_D \int_D Z(x, y) \Phi_n^Z(x, y) dx dy \quad (13)$$

Les fonctions de base $\tilde{\Phi}_n^Z(x, y)$ de la relation (12) sont données par la relation suivante :

$$\tilde{\Phi}_m^Z(x, y) = \frac{1}{\lambda_m^Z} \sum_{n=1}^Q [C_{n,m}^{S,Z} \Phi_n^S(x, y) + C_{n,m}^{B,Z} \Phi_n^B(x, y)] \quad (14)$$

où les coefficients $C_{n,m}^{S,Z}$ et $C_{n,m}^{B,Z}$ représentent :

$$C_{n,m}^{\dots,Z} = \lambda_n^{\dots} \int_D \int_D \Phi_n^{\dots}(x', y') \Phi_m^Z(x', y') dx' dy'$$

avec $\dots = S$ ou B .

Les fonctions $\Phi_n^S(x, y)$, $\Phi_n^B(x, y)$ et $\Phi_n^Z(x, y)$ correspondent aux fonctions propres solutions des équations intégrales de Fredholm bidimensionnelles dont les noyaux sont respectivement l'autocorrélation du signal utile $\Gamma_{SS}(x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y')$, du signal perturbateur $\Gamma_{BB}(x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y')$ et de l'observation $\Gamma_{ZZ}(x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y')$.

5 Expérimentations

La méthode proposée s'apparente au filtrage de Wiener ; effectivement ces deux méthodes ont pour critère de qualité l'écart quadratique moyen entre le signal bruité et le signal souhaité.

Nous avons donc effectué différentes expérimentations sur des signaux bidimensionnels représentatifs de textures, afin de comparer ces deux méthodes.

Nous présentons figure 1 le signal d'intérêt et figure 2 les signaux observés. Pour chacune de ces observations, nous avons appliqué notre traitement ainsi que le filtrage de Wiener afin de restituer le signal utile. Les résultats obtenus sont présentés figures 3.a et 3.b pour le filtrage de Wiener et figures 3.c et 3.d pour notre traitement (noté KLF). Afin de pouvoir comparer les différents résultats, nous avons calculé, pour chaque cas de figure, les rapports signal à bruit avant et après traitement, ainsi que l'erreur quadratique moyenne (notée $\bar{\epsilon}$) entre le signal utile et le signal restauré. Ces différents résultats sont présentés

tableau 1. L'étude de ces différents résultats montre que la méthode de filtrage proposée est plus performante que le filtrage classique de Wiener. Dans tous les cas, l'aspect directif du signal utile est restitué, mais cette restitution est plus fidèle dans le cas du filtrage KLF. En effet, une étude comparative des résultats présentés dans le tableau 1 montre que notre traitement permet d'obtenir de meilleurs rapports signal sur bruit et erreurs quadratiques moyennes qu'avec le filtrage de Wiener.

6 Conclusions

Le traitement présenté dans ce papier permet de restaurer l'information, dit signal utile, contenue au sein d'un signal bruité.

Nous avons vu que le traitement proposé s'apparentait au filtrage de Wiener, ces deux méthodes ayant pour critère de qualité l'écart quadratique moyen entre le signal restauré et le signal bruité. La grande différence entre ces deux méthodes étant que Wiener recherche la projection optimale sur une droite, alors que nous recherchons la projection optimale sur un hyperplan. Les expérimentations effectuées ont révélé que ce traitement s'avérait être plus performant que le filtrage de Wiener, que ce soit d'un point de vue rapport signal à bruit ou d'un point de vue erreur quadratique moyenne, et ceci dans le cas de signaux bidimensionnels stationnaires, de densité spectrale de puissance connue.

Références

- [1] J.-F. Cavassilas, B. Xerri, *Extension de la notion de filtre adapté. Contribution à la détection de signaux courts en présence de termes perturbateurs*, Traitement du Signal, Vol. 10, N° 3, pp. 215-221, 1993.
- [2] M. Krasnov, A. Kisselev, G. Makarenko, *Equations intégrales*, Editions de Moscou, 1977.
- [3] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes*, Mc Graw-Hill, 1984.
- [4] H.L. Van Trees, *Detection, estimation and modulation theory*, Part I, John Wiley & Sons, 1968.

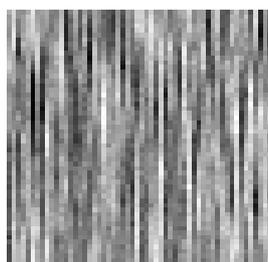


FIG. 1: Signal utile

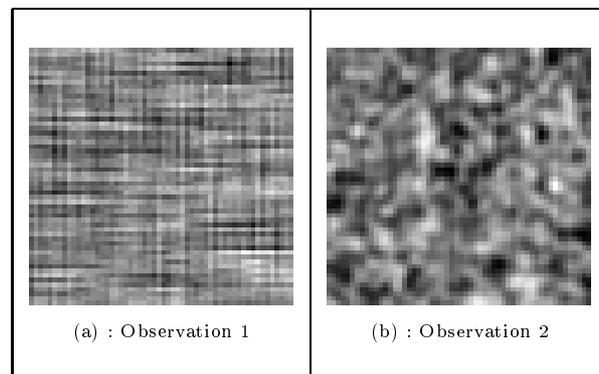


FIG. 2: Observations

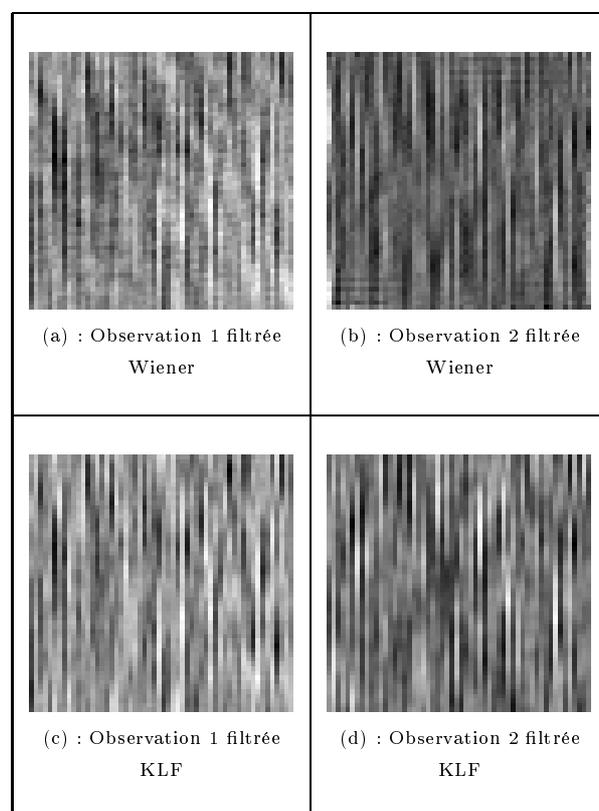


FIG. 3: Signal utile restauré

TAB. 1: Rapport signal sur bruit (dB) et erreur quadratique moyenne

	$\frac{S}{B} \Big _{natif}$	$\frac{S}{B} \Big _{Wiener}$	$\frac{S}{B} \Big _{KLF}$	$\bar{\epsilon}_{Wiener} \times 10^{-4}$	$\bar{\epsilon}_{KLF} \times 10^{-4}$
Z_1	$\Leftrightarrow 5.7$	5.6	8.7	12	7
Z_2	$\Leftrightarrow 18.6$	$\Leftrightarrow 1.4$	2.5	36	21