

Egalisation de canaux de transmission à l'aide de filtres de Kalman fonctionnant en parallèle

Sylvie Marcos, Rim Amara
Laboratoire des Signaux et Systèmes, CNRS,
Supélec, Plateau de Moulon, 91192 Gif/Yvette cedex, France
marcos@lss.supelec.fr, amara@lss.supelec.fr

Résumé – L'égalisation de canaux de transmission numérique par filtrage de Kalman a déjà été proposée dans la littérature comme alternative à des techniques plus classiques. Cependant, cette solution n'est valable que dans le cas où les signaux sont gaussiens ce qui n'est pas toujours le cas. Partant d'une approximation d'une fonction de densité de probabilité conditionnelle de données à l'aide d'une somme pondérée de fonctions de densité de probabilités gaussiennes, nous proposons ici une nouvelle structure d'égaliseur constituée d'un réseau de filtres de Kalman opérant en parallèle. Nous montrons l'amélioration des performances apportées par cette nouvelle structure dans le cas de canaux de transmission linéaires sévères. Nous analysons le lien entre ce nouvel égaliseur et les égaliseurs bayésiens réalisés à l'aide de réseaux de fonctions de base radiales et récemment présentés dans la littérature.

Abstract – Equalization of transmission channels by Kalman filtering was proposed in the literature as an alternative to some classical techniques. Eventhough, this solution is not applicable in the case of non gaussian signals, case of many signals in digital communications. Using the approximations of the conditionnal probability density function with gaussian sum, we propose, here, a new equalizer-structure based on parallel Kalman filtering. We show, then, the good performance of the new structure in equalizing severe linear channels. We analyze by the way the relationship between this new equalizer and some bayesian equalizers having radial basis function structure, recently presented in the literature.

1 Introduction

L'égaliseur est un filtre, linéaire ou non linéaire, ayant pour rôle d'annuler les distorsions du signal porteur de l'information reçu en bande de base. Ces distorsions se manifestent par des interférences entre symboles et du bruit additif et elles sont dues à la convolution du signal modulé avec la réponse impulsionnelle du canal de transmission. Les travaux portant sur l'égalisation sont nombreux et très variés. Leur principe dépend du choix de la structure du filtre égaliseur, du critère selon lequel il est optimisé et de l'algorithme employé pour réaliser cette optimisation. Dans cet article, nous présentons une approche du problème d'égalisation à partir d'une représentation d'état d'un système de communications numériques en bande de base. Dans ce contexte, l'état correspond à une séquence de longueur finie formée des derniers symboles transmis que nous cherchons à estimer selon un critère d'Erreur Quadratique Moyenne Minimale (EQMM). En effet, il existe un bon nombre d'estimateurs envisageables tels que l'estimateur à Erreur en valeur Absolue Minimale (EAM) et l'estimateur du Maximum *A Posteriori* (MAP) qui, comme l'EQMM, sont fournis par la probabilité *a posteriori* de l'état sachant l'ensemble des observations recueillies à la sortie du canal. Si notre représentation d'état est celle d'un système linéaire et gaussien, l'estimée de l'état au sens de l'EQMM peut être générée récursivement par le filtre de Kalman. Ceci étant, la plupart des signaux de communications numériques ne sont pas gaussiens et nous proposons, dans la section suivante, une idée originale empruntée au filtrage non linéaire, présentée dans [1]

et récemment reprise dans [2] et [3], pour résoudre le problème d'égalisation de canaux de transmission, à savoir *l'approximation de probabilités par une somme pondérée de gaussiennes*. Dans la deuxième partie de ce papier, la formulation du problème d'égalisation à l'aide d'une représentation d'état est explicitée ainsi que la démarche suivie pour aboutir à l'algorithme du Réseau de Filtres de Kalman (RFK). Dans la troisième partie, nous présentons quelques commentaires concernant le fonctionnement du RFK et nous montrons, par simulations, l'intérêt de la structure proposée pour déconvoluer des canaux sévères. Enfin, vu l'intérêt qu'apportent les traiteurs de signaux de jour en jour aux égaliseurs bayésiens, connus pour le critère optimal au sens de la minimisation de la probabilité d'erreur qu'ils utilisent et leur architecture permettant une implantation sous forme de réseau de Fonctions de Base Radiales (FBR), certains éléments d'analyse des liens structurels entre le RFK et ce type d'égaliseurs sont évoqués dans la quatrième partie.

2 Filtrage de Kalman dans le cas de signaux non gaussiens

L'approche du problème d'égalisation que nous allons suivre est donc basée sur l'estimation, selon un critère EQMM, du vecteur d'état formé des M derniers symboles transmis désigné par $\mathbf{D}(k) = [d(k), \dots, d(k-M+1)]^T$. Les symboles $d(k)$ appartiennent à l'ensemble $\gamma = \{d_i, i = 1, \dots, q\}$ qui sera spécifique au type de la modulation uti-

lisée. La représentation d'état du système comporte une équation de transition de l'état donnée par (1) qui est une simple équation de décalage ayant un bruit générateur $\mathbf{w}(k)$ égal à $\mathbf{G}d(k+1)$ et une équation d'observation (2) caractérisée par la sortie bruitée d'un canal non linéaire, éventuellement dynamique :

$$\mathbf{D}(k+1) = F\mathbf{D}(k) + \mathbf{G}d(k+1) \quad (1)$$

$$y(k) = h_k(\mathbf{D}(k)) + b(k) \quad (2)$$

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est la matrice de transition à un pas}$$

et $G = [1, 0, \dots, 0]^T$

où h_k est une fonction non linéaire de l'état et $b(k)$ est un bruit additif. Dans tout ce qui suit, nous nous intéressons au cas de canaux linéaires régis par l'équation (3) et nous supposons que seul le bruit d'observation $b(k)$ est blanc et gaussien $N(0, \sigma_b^2)$:

$$y(k) = \mathbf{C}^T \mathbf{D}(k) + b(k) \quad (3)$$

$\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_{M-1}]^T$ est le vecteur des coefficients de la réponse impulsionnelle du canal. A cause de la non gaussianité du bruit d'état (sous entendu des symboles), nous allons affiner la description mathématique de ce problème pour aboutir à un estimation plus fiable de la densité de probabilité (ddp) *a posteriori* de l'état $p(\mathbf{D}(k)/y^k)$ où $y^k = \{y(0), \dots, y(k)\}$. En effet, l'estimation bayésienne de cette ddp est donnée par la récursion suivante :

$$p(\mathbf{D}(k)/y^k) = \frac{1}{C_k} p(\mathbf{D}(k)/y^{k-1}) p(y(k)/\mathbf{D}(k)) \quad (4)$$

où $C_k = p(y(k)/y^{k-1})$. Sa détermination fait appel visiblement à la vraisemblance de l'observation $p(y(k)/\mathbf{D}(k))$ que nous pouvons facilement calculer si nous connaissons la densité du bruit additif, et la densité prédite pour l'état étant données les observations passées soit $p(\mathbf{D}(k)/y^{k-1})$. Sachant alors, d'après la théorie développée par Sorenson et Alspach dans [1], que toute ddp est approximable par une somme pondérée de gaussiennes, nous pouvons écrire :

$$p(\mathbf{D}(k)/y^{k-1}) = \sum_{i=1}^{\xi'(k)} \alpha'_i(k) N(\mathbf{D}(k) - \mathbf{D}_i(k/k-1), P_i(k/k-1)),$$

où $N(\mathbf{X}, M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(M)}} \exp\{-\frac{1}{2} \mathbf{X}^T M^{-1} \mathbf{X}\}$.

\mathbf{X} est un vecteur aléatoire et M est sa matrice de covariance.

Dans ce cas, on montre par des calculs que la ddp *a posteriori* est aussi une somme pondérée de gaussiennes explicitée par :

$$p(\mathbf{D}(k)/y^k) = \sum_{i=1}^{\xi(k)} \alpha_i(k) N(\mathbf{D}(k) - \mathbf{D}_i(k/k), P_i(k/k)) \quad (5)$$

avec

$$\mathbf{D}_i(k/k) = \mathbf{D}_i(k/k-1) + \mathbf{K}_i(k)(y(k) - \mathbf{C}^T \mathbf{D}_i(k/k-1))$$

$$\begin{aligned} \xi(k) &= \xi'(k) \\ P_i(k/k) &= (I_M - \mathbf{K}_i(k)\mathbf{C}^T)P_i(k/k-1) \\ \sigma_i^2(k/k-1) &= \mathbf{C}^T P_i(k/k-1)\mathbf{C} + \sigma_b^2 \\ \mathbf{K}_i(k) &= \frac{1}{\sigma_i^2(k/k-1)} P_i(k/k-1)\mathbf{C} \\ \alpha_i(k) &= \frac{\alpha'_i(k)\beta_i(k)}{\sum_{j=1}^{\xi'(k)} \alpha'_j(k)\beta_j(k)} \end{aligned}$$

où

$$\beta_i(k) = N(y(k) - \mathbf{C}^T \mathbf{D}_i(k/k-1), \sigma_i^2(k/k-1))$$

Une fois la ddp *a posteriori* de l'état obtenue, nous calculons la ddp prédite pour la prochaine itération en remarquant que :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{D}(k+1)/y^k) &= p(\mathbf{w}(k)/y^k) \\ &= p(\mathbf{D}(k+1) - F\mathbf{D}(k))/y^k \end{aligned}$$

En utilisant encore une fois l'approximation de la ddp du bruit d'état par une somme pondérée de gaussiennes (nous allons supposer que cette ddp est discrète), nous dérivons les équations de prédiction suivantes :

$$\begin{aligned} \xi'(k+1) &= \xi(k)q \\ \alpha'_j(k+1) &= \alpha_i(k)p_l(k) \quad j = (l, i) \\ \mathbf{D}_j(k+1/k) &= F\mathbf{D}_i(k/k) + \mathbf{G}d_l \\ P_j(k+1/k) &= FP_i(k/k)F^T + Q_l(k) \end{aligned}$$

où $p(\mathbf{w}(k)) = \sum_{l=1}^q p_l(k)N(\mathbf{w}(k) - \mathbf{G}d_l, Q_l)$

Ainsi, le vecteur d'état estimé selon l'EQMM, $E(\mathbf{D}(k)/y^k)$, est donné par :

$$\hat{\mathbf{D}}(k) = \sum_{i=1}^{\xi(k)} \alpha_i(k)\mathbf{D}_i(k/k) \quad (6)$$

et par conséquent, la sortie de notre égaliseur, à un retard r près et dans le cas binaire, $\hat{d}(k-r)$, est le signe du $(r+1)^{i\text{ème}}$ élément du vecteur d'état estimé. L'équation (6) prouve que l'estimateur EQMM de l'état est une combinaison convexe de sorties de filtres de Kalman mis en parallèle. La matrice de covariance de l'erreur d'estimation associée à $\hat{\mathbf{D}}(k)$ est :

$$\hat{P}(k) = \sum_{i=1}^{\xi(k)} \alpha_i(k)\{P_i(k) + [\hat{\mathbf{D}}(k) - \mathbf{D}_i(k/k)][\hat{\mathbf{D}}(k) - \mathbf{D}_i(k/k)]^T\}$$

Nous remarquons que la complexité de l'algorithme augmente puisque $\xi(k)$ augmente. Nous verrons dans la section suivante comment la réduire.

3 Le réseau de filtres de Kalman pour l'égalisation : simulations

Pour la mise en oeuvre du RFK dans le cas binaire, les symboles $\{d(k)\}_k$ sont supposés i.i.d de probabilité uniforme $p_l = \frac{1}{2}$. Les Q_l sont choisis égaux à ϵI_M avec ϵ très petit pour que les gaussiennes soient bien localisées autour des $\mathbf{G}d_l$. Pour initialiser l'algorithme, nous choisissons pour $\hat{\mathbf{D}}(0)$ une des 2^M combinaisons de symboles possibles. Plus loin, afin de réduire le nombre de termes dans la somme utilisée pour calculer $p(\mathbf{D}(k)/y^k)$, nous allons forcer cette somme à ne contenir qu'un seul terme après la remise à jour de l'estimation, soit encore $\xi(k) = 1$. Ceci veut dire que les $\mathbf{D}_i(k/k)$ sont forcés à la valeur de l'état estimé $\hat{\mathbf{D}}(k)$, $P_i(k/k)$ à $\hat{P}(k)$ et les $\alpha_i(k)$ à 1 pour la prochaine itération. Cette approximation est possible car la ddp *a posteriori* de $\mathbf{D}(k)$ est supposée être localisée autour de l'estimation EQMM fournie par le RFK. Cette approximation va réduire le nombre de filtres du réseau à 2 et par la même occasion introduire une composante récurrente à la structure suggérée. Nos simulations ont été réalisées pour le canal $\mathbf{C} = [0.4084; 0.8164; 0.4084]^T$ en supposant ses coefficients et σ_b^2 connus. Les résultats de la figure (1) ont été obtenus par moyennage sur 100 réalisations des TEB enregistrés pour une séquence de longueur 10^4 . Les zéros de ce canal sont très proches du cercle unité, ce qui fait que si nous utilisons un filtre transverse et linéaire en les observations pour le déconvoluer, il va falloir augmenter l'ordre de l'égaliseur pour achever une bonne détection des symboles. Nous notons l'amélioration des performances par le RFK par rapport au transverse adapté par le LMS, grâce à sa mémoire infinie, et par rapport à l'égaliseur de Kalman défaillant dans ce cas à cause de la mauvaise hypothèse de signaux gaussiens.

Par ailleurs, nous avons noté que, pour de forts RSB,

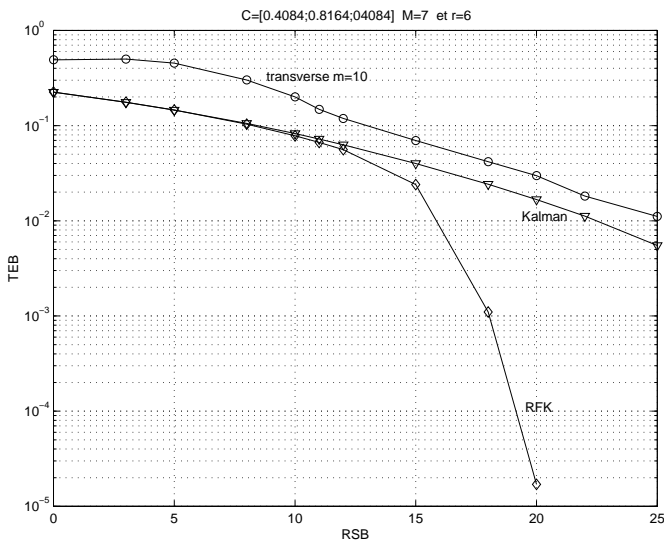


FIG. 1: Comparaison du RFK avec d'autres égaliseurs

le comportement du RFK est piloté par le jeu de pondérations $\{\alpha_i(k)\}_{1 \leq i \leq 2}$, où l'une des pondérations est très

proche de 1 et l'autre est négligeable. Dans ce cas, c'est l'étape de prédiction qui l'emporte sur l'étape de remise à jour des vecteurs d'état (pratiquement les vecteurs d'état prédits et filtrés ont des décisions confondues) et le RFK semble procéder par *classification*. Cette remarque nous a conduits à analyser la similarité entre le RFK et les égaliseurs bayésiens qui opèrent par classification pour produire leur estimation.

4 Comparaison entre le RFK et les égaliseurs bayésiens

Le principe des égaliseurs bayésiens est l'estimation du symbole $d(k-r)$ selon un critère MAP. Plusieurs structures, telles que celles proposées dans [4], [5] et [6], dérivent des estimées en maximisant la probabilité *a posteriori* pour un conditionnement bien déterminé. Dans cette partie, nous allons examiner comment s'établit le lien entre le RFK et ces structures. Pour se faire, nous définissons le vecteur de sortie du canal ou encore le vecteur *état de canal* $\mathbf{y}(k) = [y(k) \dots y(k-m+1)]^T$ où $y(k)$ est la sortie bruitée. Nous posons par ailleurs $\hat{\mathbf{y}}(k) = [\hat{y}(k) \dots \hat{y}(k-m+1)]^T$ le vecteur sortie de canal non bruité. Dans le cas binaire ce vecteur peut prendre 2^{m+M-1} valeurs possibles. En effet, selon la valeur du symbole $d(k-r)$, nous avons un ensemble de vecteurs d'état possibles formant une classe qu'on note :

$$C_i = \{\hat{\mathbf{y}}(k) / d(k-r) = d_i\}$$

L'Egaliseur Bayésien Transverse (EBT) optimal essaie d'attribuer chaque vecteur état de canal à une *classe* en utilisant un critère MAP. Mathématiquement, ceci se traduit par une détection symbole par symbole selon :

$$\hat{d}(k-r) = d_{i_0} \text{ où } i_0 = \arg \max_i p(d_i / \mathbf{y}(k))$$

Dans le cas où les symboles transmis sont i.i.d et où le bruit est blanc et gaussien, la sortie de l'EBT optimal est donnée par (Voir [5]):

$$\hat{d}(k-r) = \text{signe}(\eta_{+1}(k) - \eta_{-1}(k))$$

$$\text{où : } \eta_{+1}(k) = \sum_{\hat{\mathbf{y}}^+(k)} \exp\left\{-\frac{\|\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\mathbf{y}}^+(k)\|^2}{2\sigma_b^2}\right\}$$

$$\eta_{-1}(k) = \sum_{\hat{\mathbf{y}}^-(k)} \exp\left\{-\frac{\|\hat{\mathbf{y}}(k) - \hat{\mathbf{y}}^-(k)\|^2}{2\sigma_b^2}\right\}$$

$\hat{\mathbf{y}}^+(k)$ et $\hat{\mathbf{y}}^-(k)$ étant les vecteurs sorties de canal non bruités possibles correspondant à respectivement $d(k-r) = +1$ et $d(k-r) = -1$. Ainsi, la sortie de l'EBT est aussi une fonction non linéaire de sommes pondérées de gaussiennes. En comparant les deux égaliseurs par simulations, nous avons constaté les bonnes performances du RFK par rapport à l'EBT, ceci peut être expliqué par le fait que l'estimation fournie par le RFK fait appel à tous les échantillons du passé et celui du présent y^k alors que la mémoire de l'EBT est de longueur m . En effet, nous pouvons espérer, selon le modèle (3) qu'on s'est fixé et si les symboles émis sont indépendants, qu'il existe un ordre m à partir

duquel nous pouvons tirer de $\mathbf{y}(k)$ de l'information suffisante pour pouvoir estimer le symbole $d(k-r)$; seulement, pour un canal sévère, ceci ne peut se faire qu'au détriment d'une complexité croissante, un problème auquel le RFK remédie par sa structure récursive qui introduit une mémoire cachée de plus en plus longue. Outre le problème important de complexité, il s'est avéré que l'EBT ne peut achever une bonne détection des ambiguïtés au niveau d'un canal à coefficients symétriques. Par exemple, pour le canal $\mathbf{C} = [0.4084; 0.8164; 0.4084]^T$, et pour les symboles $[1; 1; -1]^T$ et $[-1; 1; 1]^T$, nous avons la même sortie $y(k)$ ce qui peut entraîner des vecteurs état de canal qui sont confondus bien qu'appartenant à deux classes différentes. C'est ainsi que Chen et al. ont eu l'idée, dans [6], d'introduire une information sur les classes C_i pour mieux les séparer. Cette information est donnée par les derniers symboles détectés à un retard r près. Cet égaliseur Bayésien à retours de décisions (BDFE) maximise la probabilité conditionnelle suivante :

$$\hat{d}(k-r) = d_{i_0} \text{ où } i_0 = \arg \max_i \eta_i(k)$$

$$\eta_i(k) = P\{d_i/y(k), \dots, y(k-m+1), \hat{\mathbf{D}}(k-r-1)\}$$

$$\hat{\mathbf{D}}(k-r-1) = \{\hat{d}(k-r-1), \dots, \hat{d}(k-r-n)\}$$

Le conditionnement aussi par le vecteur de décisions $\hat{\mathbf{D}}(k-r-1)$ va résoudre essentiellement ce cas d'ambiguïté, diminuer la longueur de la partie transverse et d'un coup les calculs. Le RFK est une structure sous-jacente au BDFE puisqu'elle sélectionne en fait les vecteurs d'état admissibles à l'instant k à partir du vecteur d'état précédent $\hat{\mathbf{D}}(k-1)$ alors que le BDFE le fait à partir du $\hat{\mathbf{D}}(k-r-1)$. Ceci étant, nous avons pensé à comparer le RFK à une structure faisant appel aussi à la probabilité *a posteriori* à horizon infini qui est le réseau de Fonctions de Base Radiales Récurrents (FBRR). En effet, dans [4], Cid-Sueiro et al. dérivent une méthode pour calculer récursivement et de façon exacte la probabilité *a posteriori* d'une séquence finie de symboles. Dans le cas de symboles binaires i.i.d, l'équation de récursion est donnée par :

$$g_j(k) = \frac{1}{2} f_b(y(k) - \hat{y}_{j,0}) g_{l,0}(k-1) + \frac{1}{2} f_b(y(k) - \hat{y}_{j,1}) g_{l,1}(k-1)$$

où $g_j(k)$ désigne la ddp *a posteriori* de la séquence binaire $j = (i, l)$ sachant y^k , $f_b(\cdot)$ est la ddp du bruit d'observation et \hat{y}_m est la sortie non bruitée du canal correspondant à la séquence binaire m .

Ainsi : $p(d_{i'}/y^k) = \sum_{j/i' \in j} g_j(k)$ et

$$\hat{d}(k-r) = \arg \max_{i'} p(d_{i'}/y^k)$$

À première vue, cet égaliseur, bien que de grande complexité, est susceptible d'être le meilleur du point de vue performances puisqu'il ne fait appel à aucune approximation. Le FBRR et le RFK sont deux solutions qui nous

permettent en fait de calculer, par deux méthodes différentes, la ddp *a posteriori* $p(\mathbf{D}(k)/y^k)$ qui représente leur atout à tous les deux. Par ailleurs, les pondérations $\alpha_i(k)$ et $f_b(y(k) - \hat{y}_i)$ rencontrées dans les deux structures se trouvent être les mêmes si le bruit est gaussien et si jamais le RFK produit une bonne prédiction des états, ce qui correspond à $\sigma_i^2(k/k-1) \simeq \sigma_b^2$.

5 Conclusion

Avec le RFK, nous avons pu traiter le problème d'égalisation à travers une approche, assez récente en champ d'application, à savoir l'*approximation de probabilité par des sommes pondérées de gaussiennes*. Nous avons constaté alors l'amélioration des performances par le RFK par rapport à l'égaliseur transverse et au Kalman simple. Du point de vue structure, nous avons noté que, comparé à certains égaliseurs bayésiens, le RFK s'est avéré être une solution de complexité moindre grâce à l'étape de prédiction qui introduit une mémoire cachée dans l'algorithme comme le ferait un égaliseur DFE, une mémoire capable de déconvoluer des canaux linéaires avec ambiguïté, qui sont des canaux assez sévères. Nous avons remarqué par ailleurs une similarité entre le RFK et le FBRR proposé dans [4] du moment où les deux structures produisent une estimation de la ddp *a posteriori* de l'état à horizon infini. Ajoutons que pour la mise en oeuvre du RFK, les coefficients du canal et la variance du bruit ont été supposés connus. En effet, ils peuvent être estimés de façon adaptative comme c'est proposé dans [2]. Aussi, faut-il examiner la capacité du RFK à déconvoluer des canaux non stationnaires ou/et non linéaires.

Références

- [1] D.L Alspach, H.W Sorenson. *Non linear Bayesian Estimation Using Gaussian sum Approximations*. IEEE Transactions on Automatic control, Vol. 17, Aout 1972.
- [2] S.Marcos. *A network of adaptive Kalman filters for data channel equalization*. submitted to IEEE transactions on signal processing, November 98.
- [3] P.Grohan. *Egalisation adaptative non linéaire. Structures utilisant des filtres de Volterra ou des filtres de Kalman*. Thèse de Doctorat de l'Université de Paris-Sud, Orsay, Septembre 1997
- [4] J. Cid-Sueiro, A.Artés-Rodriguez, A.Figueiras-Vidal. *Recurrent radial basis function networks for optimal symbol by symbol equalization*. Signal Processing 40, 1994.
- [5] S.Chen, B.Mulgrew, P.M.Grant. *A clustering technique for digital communications channel equalization using radial basis function networks*. IEEE Transactions on Neural Networks, Vol. 4, JULY 1993.
- [6] S.chen, B.Mulgrew, S.McLaughlin. *Adaptive Bayesian Equalizer with Decision Feedback*. IEEE Transactions on signal processing, Vol. 41, Septembre 1993.