

Restauration par champs de Markov 3D à potentiels convexes appliquée aux images tomographiques*

Nicolas VILLAIN¹, Yves GOUSSARD¹, Jérôme IDIER², Stéphane BRETTE²

¹Institut de génie biomédical, École Polytechnique de Montréal
C.P. 6079, Succ. Centre-Ville, Montréal (QC) H3C 3A7, CANADA

²Laboratoire des Signaux et Systèmes, École Supérieure d'Électricité
Plateau de Moulon, 91192 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE

{villain,goussard}@grbb.polymtl.ca, {jerome.idier,stephane.brette}@lss.supelec.fr

Résumé – Nous présentons une méthode de restauration d’images par champs de Markov 3D que nous avons développée pour obtenir la très grande précision requise pour fabriquer des prothèses personnalisées du genou. Dans le contexte bayésien du maximum *a posteriori*, les images des coupes du fémur à restaurer sont modélisées par des champs aléatoires de Markov qui permettent de traduire les caractéristiques locales des images. En raison de la géométrie particulière du problème, nous avons développé un modèle *a priori* où l’interaction entre les coupes successives est aussi prise en compte sous la forme d’un champ de Markov 3D. Ainsi, le comportement d’un pixel est conditionné par celui des 8 pixels qui l’entourent dans le plan de coupe et par les 2 pixels les plus proches des coupes voisines. Le choix de potentiels de Gibbs convexes et l’hypothèse d’un bruit blanc gaussien et centré conduisent alors à un critère 3D convexe dont l’optimisation peut être faite directement par une méthode spécialement adaptée pour réduire le nombre d’opérations. La précision de la restauration et, plus encore, de la segmentation qui en découle est primordiale dans notre cas. La méthode a donc été testée sur des images tomographiques de fantômes de dimensions connues et, enfin, sur de vraies images de coupes du fémur. La méthode présentée permet une convergence rapide avec un faible volume de calculs et la restauration offre une précision plus grande que les méthodes utilisées actuellement.

Abstract – We present a method for image restoration based on 3D Markov Random Fields. We developed this method in order to achieve the high precision required to make custom-fitted knee prostheses. In the Bayesian context of maximum a posteriori, images of femur slices are modeled by random Markov fields that render local properties in the images. Due to the geometry of the problem, we developed an a priori model in which the interaction between successive slices is also taken into account by the means of a 3D Markov field. Therefore, a given pixel’s behavior is conditioned by these of its 8 nearest neighbors in the projection plane and by the 2 nearest pixels of the neighboring slices. The choice of convex Gibbs potentials and the assumption of white Gaussian noise thus lead to a convex 3D criterion. Its minimization can be done directly by a method specially chosen with numerical cost reduction in mind. The accuracy of the restoration and, even more, of the following segmentation is crucial in our case. The method was tested first on CT images of phantoms of known dimensions, and then on CT images of a femur. The presented method achieves fast convergence at a small numerical cost and image enhancement with higher accuracy than existing methods.

1 Introduction

La méthode qui fait l’objet de cette communication a été développée dans le cadre d’un projet visant à concevoir et fabriquer des prothèses personnalisées du genou. Pour ce faire, les caractéristiques géométriques de l’articulation sont extraites d’une série de coupes tomographiques à rayons X. Cependant, la précision requise pour la fabrication des implants dépasse celle des images fournies par les tomographes disponibles actuellement. Il est alors nécessaire de corriger les distorsions introduites par le tomographe grâce à une étape préalable de restauration d’images. La méthode de restauration présentée ici répond donc aux objectifs suivants: (1) améliorer la résolution

des images (particulièrement au niveau de discontinuités) de manière à atteindre la précision requise (inférieure à 1 mm); (2) permettre le traitement de données tridimensionnelles (3D) avec un volume de calculs raisonnable.

Le problème de restauration étant mal posé, la méthode que nous proposons utilise un modèle *a priori* de l’image à restaurer. En raison de la nature 3D des données et de la nécessité de préserver les discontinuités, un modèle markovien 3D a été retenu. Afin d’obtenir une méthode numériquement efficace, ce modèle est défini par des potentiels d’interaction convexes entre paires de voxels. Le critère qui en découle peut alors être optimisé par une méthode locale de type Gauss-Seidel dont une mise en œuvre efficace est obtenue en utilisant des propriétés de dualité convexe. Une réduction du volume de calculs peut être obtenue sous une hypothèse supplémentaire de séparabilité de la réponse impulsionnelle (PSF) qui caractérise les distorsions introduites par le tomographe. Il en résulte

*Ce travail a été soutenu financièrement par le ministère des Affaires étrangères français et par le ministère des Affaires internationales du Québec par l’intermédiaire du programme de coopération internationale en sciences de l’ingénieur, projet PV P 40 n° 7

une méthode de restauration d'images dont la complexité numérique est suffisamment faible pour permettre le traitement de données 3D et dont la précision atteint les objectifs fixés. De plus, la méthode étant développée sous des hypothèses très générales, son champ d'application dépasse celui de la restauration d'images tomographiques.

2 Hypothèses

L'approche générale consiste à introduire des informations sous forme probabiliste et à estimer l'image par maximum *a posteriori* (MAP). Les étapes permettant d'aboutir au critère MAP sont présentées ci-dessous.

2.1 Modèle de dégradation

En première approximation, le tomographe à rayons X peut être considéré comme un système linéaire. Dans le cas d'objets de petites dimensions tels que ceux auxquels nous nous intéressons, la dégradation, qui est locale et varie peu [1], peut être représentée par une PSF invariante.

L'équation d'observation devient alors une simple convolution qui peut s'exprimer sous la forme matricielle :

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad (1)$$

où \mathbf{y} , \mathbf{x} et \mathbf{b} sont des vecteurs qui contiennent respectivement les valeurs discrétisées de la série d'images tomographiques, de l'objet 3D et du bruit d'observation. \mathbf{H} désigne la matrice de convolution construite à partir de la PSF.

De plus, dans nos conditions expérimentales (mode axial), la distance entre deux coupes est plus grande que l'épaisseur du faisceau de rayons X et la PSF peut donc être considérée comme bidimensionnelle (2D). Cela permet en pratique de séparer l'équation d'observation en une série de convolutions 2D où seul l'objet original est réellement 3D et ainsi d'alléger les calculs.

2.2 Modèles probabilistes

Le choix de ces modèles n'est pas seulement dicté par la fidélité de description du processus physique, mais aussi par des considérations de mise en œuvre. Ainsi, afin que le volume de calculs soit compatible avec un traitement 3D, notre objectif est d'obtenir un critère convexe. Il est alors possible d'utiliser des techniques de minimisation simples sans problème de convergence vers un minimum local.

Le bruit est supposé gaussien, centré, indépendant et de variance σ_b^2 . Cette hypothèse, vérifiée en première approximation, se prête bien à l'obtention d'un critère convexe et à l'approche semi-quadratique que nous développons ci-après.

Pour l'objet original, une représentation par un champ de Markov 3D a été adoptée. La distance entre deux images tomographiques consécutives étant plus grande que la distance entre voxels d'une même coupe, un modèle à huit voisins dans la coupe courante auxquels s'ajoutent les deux plus proches voisins des coupes adjacentes a été retenu. Un tel voisinage, illustré à la figure 1, engendre des cliques allant jusqu'à 4 éléments mais, pour limiter la complexité du

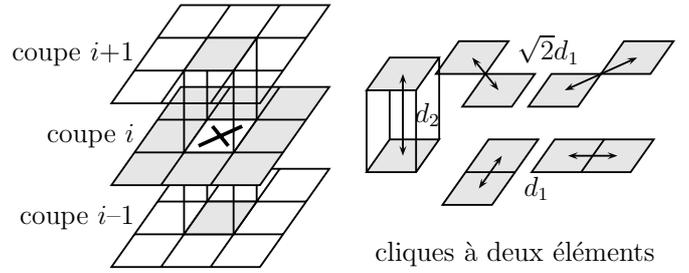


FIG. 1: Géométrie du champ de Markov utilisé : voisinage 3D et cliques prises en comptes.

critère, seules les interactions entre paires de voxels voisins (*pairwise interactions* [2]) sont prises en compte. La loi de probabilité du modèle *a priori* peut alors se mettre sous la forme :

$$p(\mathbf{x}) \propto \exp\{-\lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(u_c)\}, \quad (2)$$

où u_c représente la différence entre les voxels de la clique c normalisée par la distance entre leurs centres (ce qui est un approximation du gradient), et où φ est une fonction dite de pénalité. Pour obtenir un critère convexe tout en évitant de pénaliser trop fortement les discontinuités, la fonction de pénalité retenue est convexe et présente un comportement du type quadratique vers 0 et linéaire vers $+\infty$. Son expression exacte est la suivante :

$$\varphi(u) = \sqrt{1 + (u/\delta)^2}, \quad (3)$$

où δ est un facteur d'échelle. Les fonctions de ce type offrent généralement un bon compromis entre qualité de restauration et simplicité de mise en œuvre [3].

Avec de tels modèles, la log-vraisemblance *a posteriori* prend pour expression :

$$J(\mathbf{x}) = \|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2 / 2\sigma_b^2 + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} \varphi(u_c), \quad (4)$$

où φ est définie par (3). Le critère J est convexe et sa minimisation ne pose que des problèmes techniques dus au grand volume de données à traiter simultanément en 3D. Nous avons donc porté un soin particulier au choix d'un algorithme efficace.

3 Optimisation

En raison du caractère local de la PSF et des interactions dans le modèle *a priori*, la maximisation du critère par rapport à un voxel ne fait intervenir qu'un petit nombre de voxels voisins. Les algorithmes itératifs locaux de type Gauss-Seidel sont donc bien adaptés au calcul de la solution. Cependant, le calcul explicite du minimum du critère par rapport à un voxel n'est en général pas possible. Pour surmonter cette difficulté, dans le cas où le potentiel de clique, défini en (3), vérifie les conditions techniques suivantes :

$$\varphi \text{ est paire, continue en } 0 \text{ et } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_*, \quad (5)$$

$$\varphi(\sqrt{\cdot}) \text{ est strictement concave sur } \mathbb{R}_+. \quad (6)$$

on peut introduire par des techniques de dualité convexe un critère augmenté $K(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ faisant appel à des variables

auxiliaires \mathbf{l} tel que $J(\mathbf{x})$ et $K(\mathbf{x}, \mathbf{l})$ atteignent leur minimum *global* pour la même valeur de \mathbf{x} [4, 3]. En effet, si les conditions (5) et (6) sont remplies, en notant ψ l'opposée de la conjuguée concave de $\varphi(\sqrt{\cdot})$ [5] et en introduisant une variable auxiliaire l_c par clique c , on construit le critère augmenté :

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = \frac{\|\mathbf{y} - \mathbf{H}\mathbf{x}\|^2}{2\sigma_n^2} + \lambda \sum_{c \in \mathcal{C}_2} (l_c u_c^2 + \psi(l_c)), \quad (7)$$

tel que :

$$\min_{\mathbf{l}} K(\mathbf{x}, \mathbf{l}) = J(\mathbf{x}). \quad (8)$$

De plus, sous des hypothèse généralement vérifiées dans la pratique, K est lui aussi convexe à un changement de variable près, ce qui assure qu'une minimisation itérative par rapport aux variables \mathbf{l} et \mathbf{x} conduira à l'estimée cherchée [6]. La procédure consiste donc à minimiser K alternativement par rapport aux variables \mathbf{l} puis par rapport aux voxels \mathbf{x} .

Ceci n'est intéressant que si la minimisation conjointe de K par rapport à \mathbf{x} et \mathbf{l} est plus simple que celle de J par rapport à \mathbf{x} . Or on remarque que, comme fonction de \mathbf{l} , K peut s'écrire sous la forme d'une somme $\sum_{c \in \mathcal{C}_2} K_c(l_c, u_c)$ dont chaque terme est minimisé indépendamment par :

$$\hat{l}_c = \frac{\varphi'(u_c)}{2u_c}. \quad (9)$$

La minimisation par rapport aux variables auxiliaires est donc immédiate et peu coûteuse numériquement. Par ailleurs, K est quadratique par rapport aux voxels \mathbf{x} , ce qui permet d'exprimer explicitement son minimum local m_s par rapport à un voxel donné x_s :

$$m_s = x_s + \frac{[\mathbf{H}^t \mathbf{y}]_s - [\mathbf{H}^t \mathbf{H} \mathbf{x}]_s + 2\sigma_n^2 \sum_{c \ni s} l_c u_c}{[\mathbf{H}^t \mathbf{H}]_{s,s} + 2\sigma_n^2 \sum_{c \ni s} l_c}, \quad (10)$$

où $[v]_i$ et $[M]_{i,j}$ représentent respectivement l'élément i du vecteur \mathbf{x} et l'élément (i, j) de la matrice \mathbf{M} .

K pouvant être minimisé explicitement par rapport aux variables élémentaires x_s et l_s , une procédure de type Gauss-Seidel est bien adaptée au calcul de la solution. Notons que, K étant quadratique par rapport aux variables x , il est possible d'accélérer la convergence par sur-relaxation, c'est-à-dire en adoptant une équation de remise à jour de la forme :

$$x_s \leftarrow x_s^{\text{new}} = x_s + \alpha(m_s - x_s), \quad 1 < \alpha < 2, \quad (11)$$

où la valeur de m_s est donnée par (10). Notons aussi que sous une hypothèse de séparabilité de la PSF (vérifiée dans le cas des tomographes à rayons X), le calcul préalable de quantités invariantes permet de réduire d'un ordre de grandeur le calcul de ce terme [7]. Cette technique permet alors d'aboutir à une procédure de restauration d'images 3D présentant un excellent compromis entre volume de calcul et précision des résultats.

4 Résultats

Pour évaluer la précision des images restaurées, nous avons conçu un fantôme de dimensions connues comparables à celles d'un genou. Un résultat de restauration est

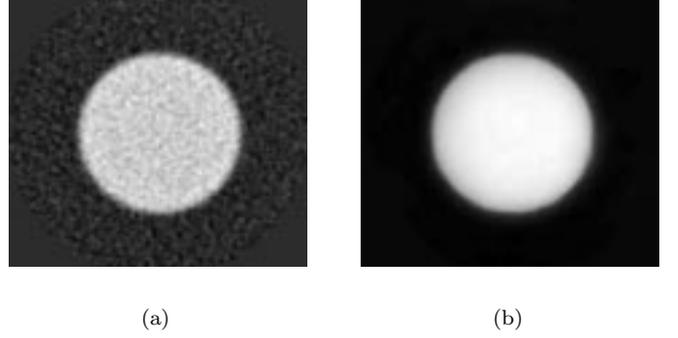


FIG. 2: Fantôme en PVC (ellipsoïde de dimensions connues) : (a) image de scanner 320×320 ; (b) image restaurée.

présenté à la figure 2. En accord avec le modèle *a priori*, on observe sur l'image restaurée de larges zones uniformes et les contours de l'objet sont définis avec une plus grande précision que sur l'image brute.

Pour mesurer le gain apporté par le traitement 3D comparé au traitement indépendant de chaque image tomographique, nous avons extrait par seuillage les contours des images restaurées. La figure 3 illustre l'écart entre ces contours et les vraies dimensions du fantôme. Cette comparaison montre qu'on réduit de moitié de l'écart maximal en appliquant le traitement 3D. Il devient alors possible d'obtenir les contours de la surface de l'objet dans les plans de coupe avec un écart inférieur à la valeur de 1 mm requise pour la fabrication de prothèses personnalisées. Ce gain justifie amplement un temps de calcul supérieur de 30% en moyenne pour le traitement 3D. Ainsi, le traitement d'une série d'images tomographiques, constituée typiquement d'une trentaine de coupes espacées de 2 mm, nécessite environ 10 min sur un PC Pentium 300, ce qui est raisonnable.

Après cette validation quantitative, nous avons appliqué notre méthode à une série d'images tomographiques d'un moulage de fémur. Sur les quelques exemples de restauration présentés à la figure 4, on observe encore une nette amélioration de la définition des bords. Les images ainsi restaurées servent ensuite de base à des méthodes de plus haut niveau (notamment le krigeage) dont le but est de définir la surface osseuse dans tout l'espace à partir de l'information obtenue dans les plans de coupe comme illustré à la figure 5.

5 Conclusion

Nous avons présenté une méthode de restauration d'images tomographiques basée sur un modèle markovien 3D de l'objet à restaurer. L'utilisation de potentiels convexes alliée à une approche duale de la minimisation conduit à un excellent compromis entre qualité de restauration et simplicité de mise en œuvre. Pour un coût numérique légèrement plus élevé que le traitement indépendant de chaque image, il est alors possible de traiter une série d'images en trois dimensions, ce qui permet d'introduire plus d'information géométrique sur le modèle et d'obtenir

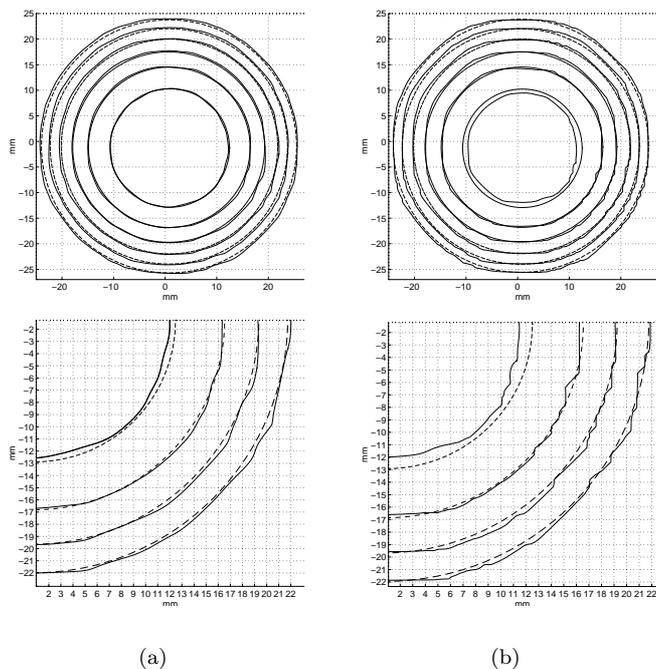


FIG. 3: Contours obtenus à partir d’une série de coupes consécutives du fantôme de la figure 2 (et comparés aux contours exacts en pointillés) : (a) avec notre modèle 3D ; (b) avec la même méthode appliquée à un modèle 2D.

une précision supérieure. Cette méthode nous a permis de répondre aux contraintes de la conception de prothèses du genou, mais, par sa flexibilité, elle peut s’adapter à de nombreux problèmes similaires.

Références

- [1] S. Doré and Y. Goussard, “Experimental determination of CT point spread function anisotropy and shift-variance”, in *19th Annual International Conference of the IEEE-EMBS*, Chicago, IL, octobre 1997, pp. 788–791.
- [2] J. E. Besag, “On the statistical analysis of dirty pictures (with discussion)”, *J. Roy. Statist. Soc. B*, vol. 48, no. 3, pp. 259–302, 1986.
- [3] P. Charbonnier, L. Blanc-Féraud, G. Aubert, and M. Barlaud, “Deterministic edge-preserving regularization in computed imaging”, *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 6, no. 2, pp. 298–311, février 1997.
- [4] S. Geman and G. Reynolds, “Constrained restoration and recovery of discontinuities”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. PAMI-14, no. 3, pp. 367–383, mars 1992.
- [5] D. Luenberger, *Optimization by vector space methods*, Wiley, New York, NY, 1 edition, 1969.
- [6] J. Idier, “Convex edge-preserving criteria and interacting dual processes for image restoration”, *submitted to IEEE Trans. Image Processing*, 1999.
- [7] S. Brette and J. Idier, “Optimized single site update algorithms for image deblurring”, in *Proc. Intl. Conf. Image Proc.*, Lausanne, Switzerland, 1996.

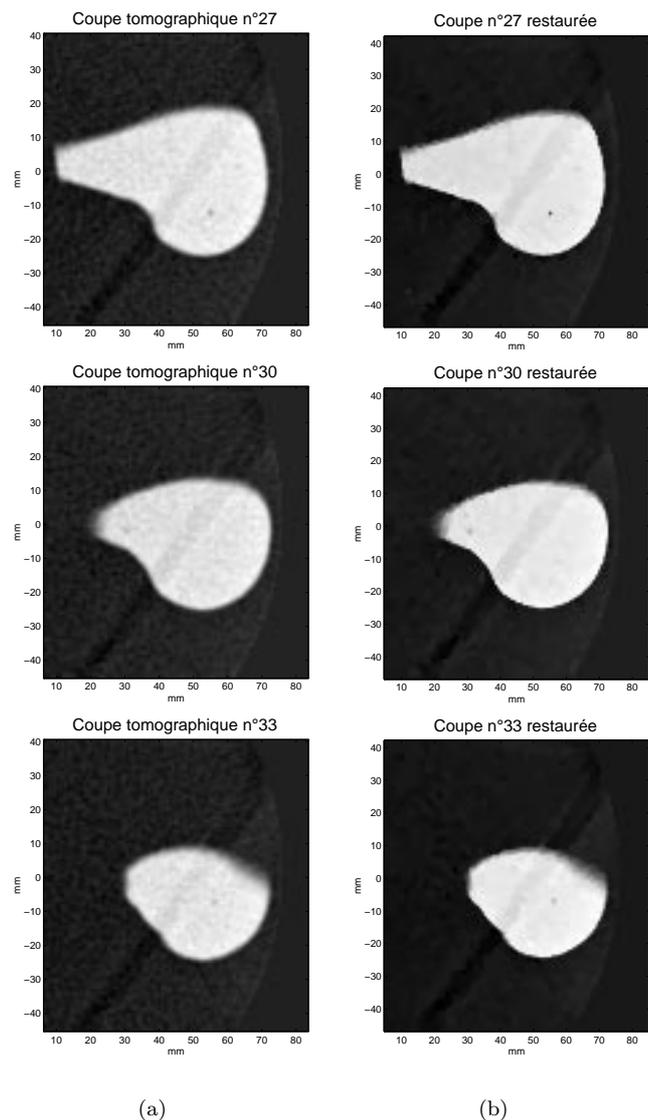


FIG. 4: Moulage d’un fémur : (a) images de scanner ; (b) images restaurées.

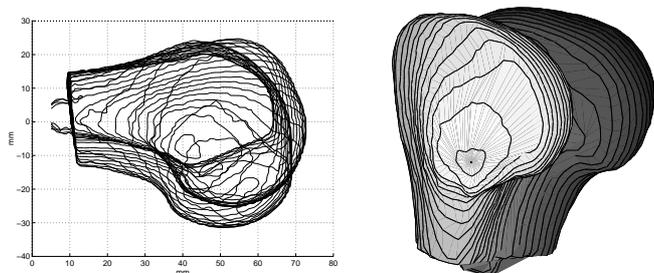


FIG. 5: Contours et surface du moulage du fémur obtenus à partir de la série d’images tomographiques présentée à la figure 4(b).