

# Vers des distributions affines multilinéaires

Pierre-Olivier AMBLARD<sup>1</sup>, Olivier MICHEL<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LIS, UPRESA CNRS 5083, Groupe Non Linéaire  
ENSIEG, BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Physique, UMR CNRS 5672, ENS Lyon  
46 allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07, France

Bidou.Amblard@lis.inpg.fr, omichel@physique.ens-lyon.fr

**Résumé** – Le but de ce papier est de discuter de la notion d'interaction non linéaire entre échelles. Cette notion est fondamentale pour l'étude de problèmes en physique non linéaire, comme par exemple l'étude de la cascade d'énergie en turbulence pleinement développée. La discussion est centrée autour de la définition de représentation temps-multiéchelle. Une réponse simple, appelée biscalogramme, met en lumière les difficultés levées par la notion d'interaction entre échelle. Nous illustrons ce point par quelques simulations. De plus, deux classes générales différentes sont proposées, la première fondée sur des propriétés de covariances affines, la seconde par des propriétés d'invariance-covariance.

**Abstract** – The aim of the paper is to provide a discussion on the notion of nonlinear interaction between scales. This notion is extremely important in the study of nonlinear physical phenomena, such as the study of the energy cascade in fully developed turbulence in fluids. The discussion is centered on the tentative definition of higher-order time-multiscale distributions. A simple answer which we call the biscalogram enlightens the main difficulty arising in our attempt to define nonlinear interactions between scales. Some simulations illustrate that point. Furthermore, two different classes of higher-order time-multiscale distributions are proposed, the first one based on a set of affine covariance properties, the other on a set of invariance-covariance properties.

## 1 Motivations

Une image traditionnelle de la turbulence est la cascade de Richardson, dans laquelle les gros tourbillons se cassent pour donner naissance à de plus petits, qui se cassent à leur tour... Dans cette vision, l'énergie se transfère des objets de grandes tailles vers les objets de petites tailles. De plus, le mécanisme de transfert d'énergie, encore très mal compris, est géré par l'équation fortement non linéaire de Navier-Stokes. L'étude de cette cascade revient donc à examiner des interactions non linéaires entre des structures vivant à des échelles différentes. Pour introduire la notion d'échelle, les physiciens utilisent les incréments d'un signal, et depuis récemment, la théorie des ondelettes.

Les ondelettes ont montré leur efficacité pour l'étude des signaux fractals puis multifractals. Pour l'estimation de la dimension fractale d'un signal, des analyses statistiques d'ordre 2 effectuées sur les coefficients en ondelette suffisent. Par contre, l'analyse de signaux multifractals nécessite l'utilisation de statistiques d'ordre supérieur. Les multifractals aléatoires sont fondamentalement non gaussiens. Caractériser un signal multifractal peut par exemple passer par l'étude des statistiques  $E[TO(a, t)^q]$ , où  $TO(a, t)$  est le coefficient en ondelette du signal à l'échelle  $a$  et au temps  $t$ . Le comportement de la statistique en fonction de  $a$  et de  $q$  renseigne sur la multifractalité. Toutefois, ces quantités sont des statistiques à un point, et ne permettent pas l'étude des liens statistiques éventuels entre échelles. Le but de ce papier est de proposer une réflexion sur ce thème et de développer quelques outils susceptibles de répondre à la question.

Un autre point de vue, moins pragmatique, consiste à généraliser les techniques d'ordre 2 aux ordres supérieur. Si cette généralisation est maintenant bien établie dans le cadre des signaux stationnaires, un effort reste à fournir dans le cas non stationnaire. Nous illustrons ce fait sur la figure (1). A l'ordre 2, les représentations temps-fréquence covariantes par translations constituent la classe de Cohen, et les représentations temps-échelles covariantes par translations (des groupes concernés) définissent la classe affine, d'intersection non nulle avec la classe de Cohen [1, 2]. On montre de plus que ces deux classes peuvent être générées à l'aide de la représentation de Wigner-Ville *via* des transformations ad-hoc. La classe de Cohen a été généralisée aux ordres supérieurs pour conduire à une classe générale des représentations multilinéaires temps-multifréquence [3, 4]. Par contre, la généralisation de la classe affine à une classe de représentations multilinéaires temps-multiéchelle reste à faire. Nous donnerons dans ce papier des tentatives de constructions mais sans apporter de réponses définitives.

La construction de représentations temps-multiéchelle est très difficile pour la simple raison que la notion d'interaction non linéaire entre échelles est très mal ou pas comprise. Ce fait sera illustré dans le paragraphe 2, où nous proposons une première solution appelée biscalogramme. Les deux paragraphes suivants proposent des classes générales fondées sur des covariances et invariances de type affine. Dans toute la suite, nous nous limiterons à l'ordre 3, l'extension aux ordres supérieurs ne posant pas de problèmes plus difficiles.

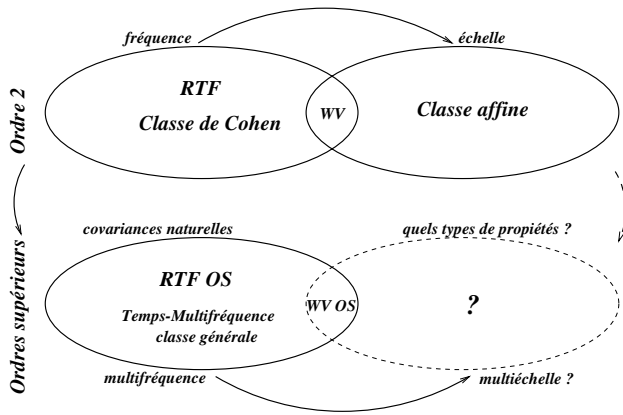


FIG. 1: Du temps-fréquence(-échelle) bilinéaire vers le temps-multifréquence(-multiéchelle)

## 2 Biscalogrammes

Une première définition possible de distribution du troisième ordre, temps-bifréquence, peut être obtenue par une généralisation brutale de la définition du bispectre stationnaire. En se rappelant que le bispectre de signaux aléatoires examine les interactions statistiques entre trois fréquences  $\nu_1, \nu_2$  and  $\nu_1 + \nu_2$  et leurs phases respectives (conditions de résonance), la définition du bispectrogramme est  $B_x(t, \nu_1, \nu_2) = S_x(t, \nu_1)S_x(t, \nu_2)S_x^*(t, \nu_1 + \nu_2)$  où  $S_x$  est la transformée de Fourier à court terme [4]. Pour des signaux aléatoires non stationnaires, cette définition doit s'entendre en termes de moyenne d'ensemble.

Définir un distribution temps-biéchelle peut s'effectuer de la même manière à l'aide de la transformée en ondelette. Toutefois, les conditions de résonance à trois fréquences que cherche un bispectre ne sont pas définies clairement en termes d'échelle. Cette remarque nous conduit à introduire une fonction  $f(a_1, a_2)$  des échelles  $a_1$  et  $a_2$  appelée "fonction d'interaction entre échelles". Le biscalogramme est alors défini par

$$SC_x(t, a_1, a_2) = WT_x(t, a_1)WT_x(t, a_2)WT_x^*(t, f(a_1, a_2))$$

Le choix de  $f$  est restreint aux fonctions permettant au biscalogramme de vérifier les propriétés de covariances affines souhaitées

$$\begin{aligned} SC_{x(t-\tau)}(t, a_1, a_2) &= SC_x(t - \tau, a_1, a_2) \\ SC_{x(t/a)/\sqrt{a}}(t, a_1, a_2) &= SC_x\left(\frac{t}{a}, \frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}\right) \end{aligned}$$

La transformée en ondelette respecte ces covariances, et on établit alors facilement que le biscalogramme vérifie les covariances si et seulement si  $f$  est solution de l'équation homogène de degré -1 [6]

$$f\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}\right) = \frac{f(a_1, a_2)}{a} \quad (1)$$

Les solutions de cette équation sont du type  $f(a_1, a_2) = a_1 l\left(\frac{a_1}{a_2}\right), a_2 k\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$ , dont les moyennes d'ordre  $\alpha$ ,

$$f_\alpha(a_1, a_2) = (\beta a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha)^{1/\alpha}$$

sont solutions. Le choix de  $\alpha = -1$  conduit à la définition de la moyenne harmonique, qui permet de retrouver l'interprétation de l'échelle comme inverse de la fréquence.

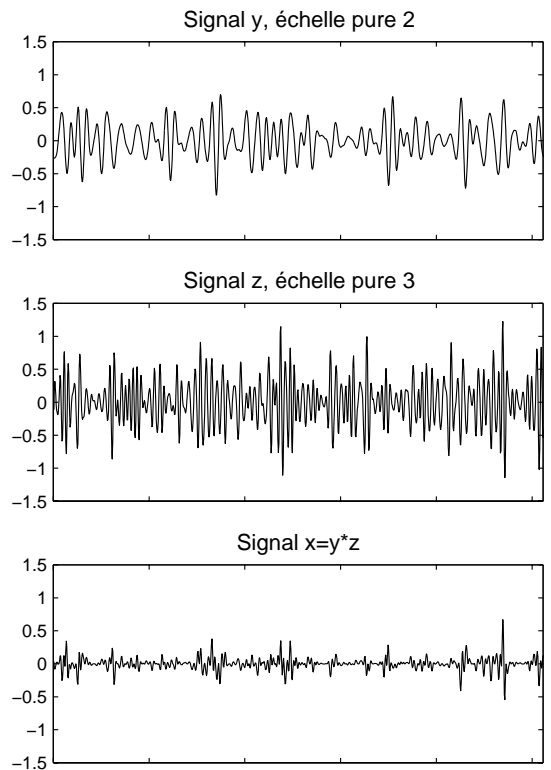


FIG. 2: Signaux "échelle pure" interagissant quadratiquement.

Bien que la simplicité d'une telle approche puisse apparaître séduisante, elle conduit à de nombreuses difficultés d'interprétation de  $SC_x$ . En effet, si le bispectre permet de détecter les couplages de phase quadratiques, l'interprétation physique de la présence de valeurs significatives dans  $SC_x$  reste peu claire; l'interaction non linéaire de deux fréquences fait apparaître de nouvelles fréquences dans le spectre, alors que l'interaction de deux ondelettes n'admet en général pas de représentation simple dans la même base d'ondelettes.

Pour illustrer ce fait, nous présentons sur la figure (2) deux signaux "échelle pure"  $y$  et  $z$ . Ces signaux ne vivent qu'à une échelle, *i.e.* leurs coefficients de détails dans une décomposition en ondelettes orthogonales sont nuls sauf à une échelle (dans l'exemple,  $y$  et  $z$  sont respectivement aux échelles 2 et 3, et leurs détails sont des bruits blancs gaussiens indépendants).

Le signal  $x = yz$  est alors créé pour illustrer une interaction quadratique entre échelles. La décomposition en ondelettes de  $x$  est dévoilée figure (3) –les ondelettes utilisées en analyse et en synthèse sont des Daubechies 9–.

Cette petite illustration permet de mettre en lumière nos difficultés par rapport au biscalogramme :

- l'interaction quadratique entre deux échelles pures donne naissance à un signal vivant sur une large gamme d'échelles (figure 3).

- L'équation (1) permet de décrire un type d'interaction, mais ne permet pas de décider si une échelle provient d'une interaction non-linéaire ou si elle pré-existe.

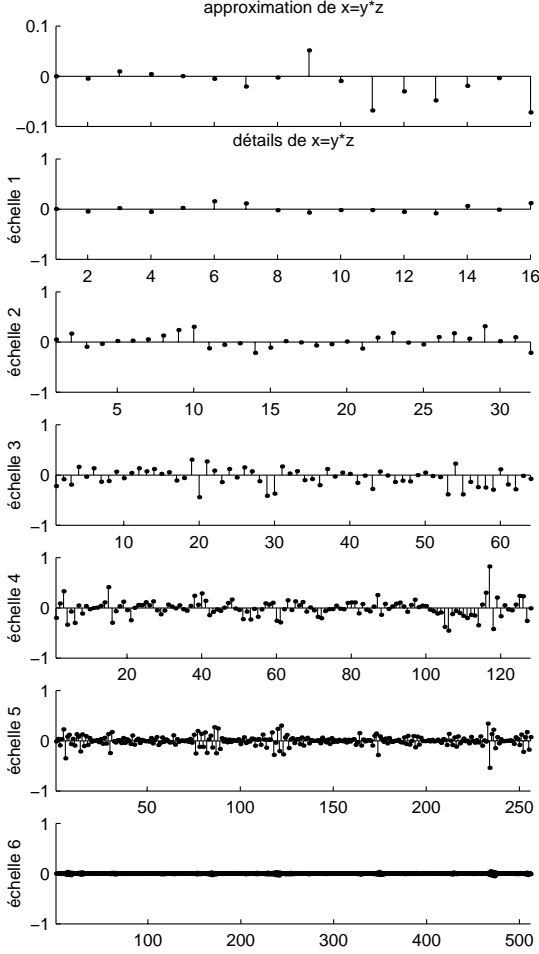


FIG. 3: Coefficients en ondelette du signal  $x$  provenant de l'interaction quadratique entre deux signaux "échelle pure".

### 3 Classe affine d'ordre trois

Une représentation temps-biéchelle est une forme trilineaire du signal analysé  $x(t)$  et s'écrit génériquement selon

$$T_x(t, a_1, a_2) = \int k(t, a_1, a_2; u_1, u_2, u_3) x(u_1) x(u_2) x(u_3) du_1 du_2 du_3 \quad (2)$$

Une telle généralité est inexploitable, mais peut être réduite en imposant des propriétés souhaitables. Nous imposons ici les propriétés de covariances affines

$$T_{x(t-\tau)}(t, a_1, a_2) = T_x(t - \tau, a_1, a_2) \quad (3)$$

$$T_{x(t/a)/\sqrt{a}}(t, a_1, a_2) = T_x\left(\frac{t}{a}, \frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}\right) \quad (4)$$

La propriété (3) de covariance par translation temporelle contraint le noyau  $k$  à satisfaire

$$k(t + \tau, a_1, a_2; u_1 + \tau, u_2 + \tau, u_3 + \tau) = k(t, a_1, a_2; u_1, u_2, u_3), \forall \tau$$

qui montre que  $k$  est intrinsèquement de dimension 5 sous cette covariance. On pose

$$t_1 = t - \frac{1}{3} \sum_i u_i, t_2 = u_1 - u_3, t_3 = u_2 - u_3$$

et il existe alors une fonction  $l$  telle que

$$T_x(t, a_1, a_2) = \int l(a_1, a_2; t_1, t_2, t_3) x(u_1) x(u_2) x(u_3) du_1 du_2 du_3$$

La covariance par dilatation/compression (4) impose alors

$$l(a_1, a_2; t - \frac{1}{3} \sum_i u_i, u_1 - u_3, u_2 - u_3) = \frac{1}{a\sqrt{a}} l\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}; \frac{t}{a} - \frac{1}{3} \sum_i \frac{u_i}{a}, \frac{u_1 - u_3}{a}, \frac{u_2 - u_3}{a}\right)$$

pour tout  $a$ , et donc nécessairement pour  $a = a_1$ . En conséquence, le noyau  $k$  vérifie nécessairement, sous les covariances affines,

$$k(t, a_1, a_2; u_1, u_2, u_3) = \frac{1}{a_1 \sqrt{a_1}} m\left(\frac{a_2}{a_1}; \frac{t}{a_1} - \frac{1}{3} \sum_i \frac{u_i}{a_1}, \frac{u_1 - u_3}{a_1}, \frac{u_2 - u_3}{a_1}\right)$$

Le noyau dépend donc du rapport d'échelles  $a_2/a_1$  et satisfait l'équation homogène  $f(a_1, a_2) = \frac{1}{a\sqrt{a}} f\left(\frac{a_1}{a}, \frac{a_2}{a}\right)$ . Le noyau ne peut par conséquent pas être simplifié davantage et il apparaît qu'il est dépendant des échelles analysées. . . Ceci montre que si la classe de Cohen des distributions temps-fréquence peut facilement être étendue aux ordres supérieurs, la classe des distributions affines ne peut pas (sauf à renoncer à l'unicité de la représentation, qui impose que le noyau soit indépendant des échelles analysées).

Les éléments de la classe affine d'ordre trois ainsi définie peuvent se mettre sous la forme

$$T_x(t, a_1, a_2) = \int \Pi\left(\frac{a_1}{a_2}; \frac{t - \theta}{a_2}, a_2 \nu_1, a_2 \nu_2\right) W_x(\theta, \nu_1, \nu_2) d\theta d\nu_1 d\nu_2$$

où  $W_x(\theta, \nu_1, \nu_2)$  est la représentation de Wigner-Ville d'ordre trois [3, 4], et où  $\Pi$  est une fonction homogène de degré 1/2 en  $a_1, a_2$  (échanger  $a_1 \leftrightarrow a_2$  donne une autre paramétrisation toute aussi acceptable).

Comme sous produits, des solutions à noyau indépendant des échelles analysées peuvent être proposées. En effet, une fonction de trois variables qui sont des rapports bien choisis des variables de  $\Pi$  peut satisfaire les contraintes précédentes. Ainsi,

$$k(a_1, a_2; t_1, t_2, t_3) = \frac{1}{(a_1 a_2)^{3/4}} f\left(\frac{t_1}{\sqrt{a_1 a_2}}, \frac{t_2}{a_1}, \frac{t_3}{a_2}\right)$$

est un choix admissible de noyau et correspond à la distribution

$$T_x(t, a_1, a_2) = \int f\left(\frac{t_1}{\sqrt{a_1 a_2}}, \frac{t_2}{a_1}, \frac{t_3}{a_2}\right) x(u_1) x(u_2) x(u_3) \frac{du_1 du_2 du_3}{(a_1 a_2)^{3/4}}$$

Introduire  $u_1 = \theta + (2\tau_1 - \tau_2)/3$ ,  $u_2 = \theta + (2\tau_2 - \tau_1)/3$ ,  $u_3 = \theta - (\tau_1 + \tau_2)/3$  permet alors d'écrire

$$T_x(t, a_1, a_2) = \int \frac{1}{(a_1 a_2)^{3/4}} f\left(\frac{t - \theta}{\sqrt{a_1 a_2}}, \frac{\tau_1}{a_1}, \frac{\tau_2}{a_2}\right) \times x\left(\theta + \frac{2\tau_1 - \tau_2}{3}\right) x\left(\theta + \frac{2\tau_2 - \tau_1}{3}\right) x\left(\theta - \frac{\tau_1 + \tau_2}{3}\right) d\tau_1 d\tau_2 d\theta$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} \Pi_1(t, \nu_1, \nu_2) = \\ (a_1 a_2)^{1/4} \int f(t, \alpha_1, \alpha_2) e^{2i\pi(\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2)} d\alpha_1 d\alpha_2 \end{aligned}$$

on obtient finalement

$$\begin{aligned} T_x(t, a_1, a_2) = & \int \Pi_1\left(\frac{t-\theta}{\sqrt{a_1 a_2}}, a_1 \nu_1, a_2 \nu_2\right) \\ & \times W_x(\theta, \nu_1, \nu_2) d\theta d\nu_1 d\nu_2 \end{aligned}$$

qui appartient à la classe générale puisque  $\Pi(x, y, z, t) = \Pi_1(y/\sqrt{x}, xz, t)$ .

Les distributions de cette classe générale, bien que construites de façon axiomatique, ont les mêmes problèmes que le biscalogramme quand à leur interprétation physique.

## 4 Et Mellin...

Le paragraphe précédent utilise la covariance des distributions par rapport aux dilatations/compressions. Or, il est bien connu que les fonctions propres des opérateurs de dilatation/compression sont les "chirps" hyperboliques  $t^{2i\pi a}$  [7, 8]. Ceci conduit naturellement à l'utilisation de la transformée de Mellin. De plus, les "chirps" hyperboliques sont des fonctions orthogonales de  $L^2(\mathbb{R}^{+*}, dt/t)$  et forment un ensemble fermé pour la multiplication. Ces remarques donnent des éléments de réponses aux questions levées au paragraphe 2.

Notons maintenant que  $\mathbb{R}$  doté de l'addition et  $\mathbb{R}^{+*}$  avec la multiplication sont des groupes équivalents, puisque liés par une application bijective. Nous utilisons alors cette remarque pour définir une représentation temps-biéchelle de Wigner-Ville (pour des signaux définis sur  $\mathbb{R}^{+*}$ ) en partant de la représentation temps-bifréquence de Wigner-Ville et en changeant brutalement les lois de composition ( $+$   $\leftrightarrow$   $\times$ ) et la transformation (Fourier  $\leftrightarrow$  Mellin). La représentation temps-biéchelle de Wigner-Ville est alors définie par

$$\begin{aligned} Ws_x(t, a_1, a_2) = & \int_0^\infty x(tu_1^{2/3} u_2^{-1/3}) \\ & x(tu_2^{2/3} u_1^{-1/3}) x^*(tu_2^{-1/3} u_1^{-1/3}) u_1^{-2i\pi a_1} u_2^{-2i\pi a_2} \frac{du_1 du_2}{u_1 u_2} \end{aligned}$$

et étend les travaux de Marinovic effectué à l'ordre 2 [9]. Une classe générale est alors définie par convolution affine en temps et convolution standard en échelle pour conduire à

$$\begin{aligned} T_x(t, a_1, a_2, a_3) = \\ \int F\left(\frac{t}{u}, a_1 - \alpha_1, a_2 - \alpha_2\right) Ws_x(u, \alpha_1, \alpha_2) \frac{d\alpha_1 d\alpha_2 du}{u} \end{aligned}$$

Puisque cette construction utilise l'équivalence de groupes, la théorie développée en [4] pour la construction axiomatique des représentations temps-bifréquence peut être transposée facilement ici. En considérant des "inter-représentations"  $Ws_{x,y,z}(t, a_1, a_2)$  de trois signaux différents de  $L^2(\mathbb{R}^{+*})$ , et l'ensemble de propriétés d'invariance-covariance

$$\begin{aligned} T_{x(at), y(at), z(at)}(t, a_1, a_2) &= T_{x,y,z}(at, a_1, a_2) \\ T_{x(t)t^{2i\pi\lambda}, y(t), z(t)t^{2i\pi\lambda}}(t, a_1, a_2) &= T_{x,y,z}(t, a_1 - \lambda, a_2) \\ T_{x(t), y(t)t^{2i\pi\lambda}, z(t)t^{2i\pi\lambda}}(t, a_1, a_2) &= T_{x,y,z}(t, a_1, a_2 - \lambda) \end{aligned}$$

on obtient la classe générale présentée ici.

## 5 Conclusions

Nous avons montré les problèmes que posent la construction de représentations temps-multiéchelle. A notre sens, le plus fondamental est la compréhension (ou la définition) de la notion d'interaction non linéaire entre échelles.

Malgré ces difficultés, des approches de constructions sont possibles, mais conduisent à des représentations difficilement interprétables physiquement.

Il est évident que l'application de telles représentations à des problèmes physiques concrets nécessite encore un effort considérable.

## Références

- [1] O. Rioul, P. Flandrin, Time-scale energy distributions: A general class extending the wavelet transform, IEEE trans. on SP, 40, 7, pp 1746-1757, 1992.
- [2] J. Bertrand, P. Bertrand, A class of affine Wigner functions with extended covariances properties, J. Math. Phys, 33, 7, pp 2515-2527, 1992.
- [3] J. Fonollosa, C. Nikias, Wigner higher order moment spectra: definition, properties, computation and application to transient detection, IEEE trans. on SP, 41, 1, pp 245-266, 1993.
- [4] P.O. Amblard, J.L. Lacoume, A deductive construction of third-order time-frequency distributions, Signal Processing, 36, pp 277-286, 1994.
- [5] R. Murray, A. Papandreou-Suppappola, G.F. Boudreaux-Bartels, New higher-order affine time-frequency representations, Proc. of IEEE symp. on TFTS analysis, pp 325-328, Pittsburgh, october 1998.
- [6] J. Aczel, J. Dhombres, Functional equations in several variables, Cambridge University Press, 1989
- [7] R. Baraniuk, Beyond time-frequency analysis: energy densities in one and many dimension, IEEE Trans on SP, 46, 9, pp 2305-2314, 1998.
- [8] L. Cohen, Time-frequency analysis, Prentice-Hall, 1995
- [9] N. Marinovic, The Wigner distribution and the ambiguity function: generalizations, enhancement, compression and some application, PhD Thesis, The City Univ. of N.Y., 1986.