

Analyse Statistique de SMF pour l'étude des signaux à phase polynômiale.

André FERRARI¹, Gérard ALENGRIN¹, Messaoud BENIDIR²

¹UMR 6525 Astrophysique
Université de Nice Sophia-Antipolis, Parc Valrose,
06108 Nice CEDEX 2, FRANCE

²LSS Supelec
Plateau de Moulon
91190 Gif-sur-Yvette, FRANCE

ferrari@unice.fr, alengrin@unice.fr, benidir@lss.supelec.fr

Résumé – L'algorithme SMF permet d'estimer le coefficient du terme de plus haut degré d'un signal à phase polynômiale et à amplitude constante à partir de moments invariants dans le temps des observations. Cet algorithme fait intervenir des moments d'ordre inférieur à la transformée de phase polynômiale (TPP) et ne nécessite pas de maximisations. La contribution majeure de cette communication est une expression analytique de la variance de l'erreur d'estimation de SMF à fort rapport signal sur bruit. Ce résultat permet de montrer l'efficacité asymptotique de SMF si une dépendance entre le nombre de moments et le nombre d'observations est introduite. En outre, il permet de mettre en évidence la supériorité de SMF par rapport à TPP moyennant un choix judicieux du nombre de moments.

Abstract – The SMF algorithm is designed for the estimation of the higher degree coefficient of a constant amplitude polynomial phase signal. It relies on shift invariant signal moments with lower degrees than the generalized ambiguity function (GAF) and it does not require maximization. The major contribution of the communication is the derivation of an analytic expression of the SMF error variance for high signal to noise ratios. This result proves the asymptotic efficiency of SMF when a dependency between the number of moments and the number of samples is introduced. Moreover, it underscores the superiority of SMF on GAF with an appropriate choice of the number of moments.

1 Introduction

Cette communication est consacrée à l'estimation des paramètres d'un signal bruité à phase polynômiale et à amplitude constante. Ce modèle est suffisamment général pour représenter un nombre important de signaux réels, on pourra se référer par exemple à [5] pour avoir une liste détaillée d'applications faisant intervenir ce type de signal. L'analyse paramétrique des signaux à phase polynômiale a suscité un intérêt croissant ces dernières années, [2, 8, 4]. La solution généralement retenue pour résoudre ce problème est la transformée de phase polynômiale (TPP), [6]. La première étape consiste à transformer le signal en une fréquence pure. Ceci est obtenu itérativement par des différenciations successives de la phase: à chaque itération, la différenciation est obtenue en multipliant l'échantillon à l'instant n par l'échantillon à l'instant $n - \tau$ conjugué. Dans le cas bruité, le coefficient de la phase du plus haut degré est alors estimé par le maximiseur global du périodogramme du signal transformé. Outre sa simplicité, l'estimateur ainsi obtenu possède l'avantage d'être asymptotiquement efficace.

Malgré ces avantages, cette approche présente bien sûr des inconvénients. Le premier est que la réduction fait intervenir des produits de 2^{M-1} termes du signal où M représente le degré de la phase. Pour M élevé, le nombre

important de termes va avoir pour effet une dégradation rapide des performances de la méthode. Le second est bien sûr qu'elle nécessite une maximisation globale.

Afin de palier ces inconvénients, l'algorithme SMF (Stationary Moments Fitting) a été récemment proposé dans [3]. Le principe de cette méthode repose sur le fait que, bien que ce signal soit non stationnaire, certains de ses moments sont invariants par translation. Cette propriété est alors utilisée pour estimer les paramètres de la phase de façon itérative. Dans [3], les performances de l'algorithme ont été étudiées par la méthode de Monte-Carlo. Ces simulations ont montré en particulier que, pour un nombre réduit d'échantillons, les performances de SMF sont supérieures à celles de TPP, [6]. Le but de cette communication est de faire une analyse plus approfondie des performances de SMF, en particulier par l'intermédiaire d'une analyse statistique de la précision.

La section suivante présente un bref rappel de SMF. Une expression analytique de la variance du terme de plus haut degré est donnée dans la deuxième section. Dans la troisième section, ce résultat est d'abord validé et ensuite utilisé pour établir l'efficacité asymptotique de l'estimateur. Enfin, ce résultat est utilisé pour obtenir une sélection optimale des paramètres intervenant dans l'algorithme.

2 L'algorithme SMF

On suppose que y_n est un signal à phase polynômiale d'ordre M , bruité :

$$\begin{aligned} y_n &= A \exp\{j\phi_n\} + w_n \\ &= A \exp\left\{j \sum_{q=0}^M a_q n^q\right\} + w_n, \end{aligned} \quad (1)$$

où w_n bruit blanc complexe Gaussien circulaire $\mathcal{N}_c(0, \sigma_w^2)$ et $a_0 \sim \mathcal{U}(0, 2\pi)$.

Nous avons montré dans [3] que seuls des moments d'ordre supérieur ou égal à $2M$ peuvent être invariants dans le temps. De plus, ces statistiques ne permettent que l'identification de a_M . On se propose alors d'estimer a_M à partir des moments stationnaires d'ordre $2M$ et de même que [6] d'estimer itérativement les autres paramètres. On notera \mathcal{L}_M et \mathcal{L}_M^* les deux ensembles disjoints des M retards correspondants à des échantillons du signal non-conjugués et conjugués¹. Le moment «stationnaire» d'ordre $2M$ de y correspondant est alors :

$$\begin{aligned} M_{2M,y}(\mathcal{L}_M, \mathcal{L}_M^*) &\triangleq \mathbb{E} \left\{ \prod_{k=1}^p y_{n+l_k}^{\epsilon_k, n_k} \right\} \\ &= A^{2M} \exp\{(-1)^M j M a_M \prod_{\{k|\epsilon_k=-1\}} l_k^{n_k}\}, \end{aligned}$$

où $l_1 < l_2 < \dots < l_p$ désignent les p retards distincts, n_k leur ordre de multiplicité et $\epsilon_k = \pm 1$ indique si y_{n+l_k} est conjugué ou non. Avec ces notations, on a donc :

$$\sum_{k=1}^p \epsilon_k n_k = 0. \quad (2)$$

En remarquant que $(r\mathcal{L}_M, r\mathcal{L}_M^*)$, $r = 1, \dots, L$ conduisent aussi à des moment stationnaires, nous proposons d'estimer a_M par moindre carré à partir des angles de ces L moments :

$$\hat{a}_M^{SMF} = \frac{\sum_{r=1}^L r^M \text{angle}(\hat{m}_y(r))}{(-1)^M M \prod_{\{k|\epsilon_k=-1\}} l_k^{n_k} \sum_{r=1}^L r^{2M}}, \quad (3)$$

avec :

$$\begin{aligned} \hat{m}_y(r) &\triangleq \hat{M}_{2M,y}(r\mathcal{L}_M, r\mathcal{L}_M^*) \\ &= \frac{1}{N - rl_p} \sum_{k=1}^{N-rl_p} \prod_{q=1}^p y_{k+rl_q}^{\epsilon_q, n_q}. \end{aligned} \quad (4)$$

3 Étude des Performances

3.1 Analyse statistique

La proposition suivante, qui constitue la contribution majeure de la communication, donne une expression de la

¹. Des tables donnant ces retards pour différentes valeurs de M sont données dans [3].

variance de \hat{a}_M .

Proposition 1 Pour $SNR \triangleq A^2/\sigma_w^2 \gg 1$,

$$\begin{aligned} \text{var}\{\hat{a}_M^{SMF}\} &\approx \frac{1}{2M^2 SNR \prod_{\{k|\epsilon_k=-1\}} l_k^{2n_k}} \\ &\cdot \frac{1}{(\sum_{r=1}^L r^{2M})^2} \left\| \sum_{r=1}^L \frac{r^M}{N - rl_p} \mathbf{u}_r \right\|^2 \end{aligned} \quad (5)$$

où \mathbf{u}_r est un vecteur $1 \times N$ dont les composantes non nulles sont :

- $\mathbf{u}_r(k) = \sum_{l=1}^q \epsilon_l n_l$ pour $q = 1, \dots, p-1$ et $1 + rl_q \leq k < rl_{q+1}$.
- $\mathbf{u}_r(k) = \sum_{l=q+1}^p \epsilon_l n_l$ pour $q = 1, \dots, p-1$ et $N - r(l_p - l_q) < k \leq N - r(l_p - l_{q+1})$.

Dém. : Si on note $w = w_r + jw_i$ le vecteur des échantillons de bruit, on peut écrire pour un fort SNR :

$$\begin{aligned} \hat{a}_M &= G(w_r, w_i) \\ &\approx G(0, 0) + \left. \frac{dG(w_r, w_i)}{dw_r} \right|_{w=0} w_r + \left. \frac{dG(w_r, w_i)}{dw_i} \right|_{w=0} w_i \end{aligned}$$

Or, si $w = 0$, il est facile de constater que $\hat{m}_y(r) = m_x(r)$ et donc $G(0, 0) = a_M$. En utilisant la circularité de w , on obtient alors :

$$\text{var}\{\hat{a}_M\} = \frac{\sigma_w^2}{2} \left(\left\| \left. \frac{dG(w)}{dw_r} \right|_{w=0} \right\|^2 + \left\| \left. \frac{dG(w)}{dw_i} \right|_{w=0} \right\|^2 \right) \quad (6)$$

Dans notre cas, le calcul des gradients de $G(w)$ se ramène au calcul des gradients de l'angle de $\hat{m}_y(r)$. Le terme associé au gradient par rapport à la composante réelle est ainsi égal à :

$$\begin{aligned} \left\| \left. \frac{dG(w)}{dw_r} \right|_{w=0} \right\|^2 &= \frac{1}{M^2 \prod_{\{k|\epsilon_k=-1\}} l_k^{2n_k} (\sum_{r=1}^L r^{2M})^2} \\ &\cdot \left\| \sum_{r=1}^L r^M \text{Imag} \left(\frac{1}{\hat{m}_y(r)} \frac{d\hat{m}_y(r)}{dw_r} \right) \right\|_{w=0}^2 \end{aligned}$$

En remplaçant (4) dans l'expression de la n -ième composante d'un des gradients précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{Imag} \left(\frac{1}{\hat{m}_y(r)} \frac{d\hat{m}_y(r)}{dw_{r,n}} \right) \Big|_{w=0} &= \\ \cdot \frac{1}{N - rl_p} \sum_{k=1}^{N-rl_p} \text{Imag} \left(\frac{1}{\hat{m}_y(r)} \frac{d \prod_{q=1}^p y_{k+rl_q}^{\epsilon_q, n_q}}{dw_{r,n}} \right) \Big|_{w=0} \end{aligned} \quad (7)$$

Les dérivées précédentes sont non nulles si $n = k + rl_q$ et dans ce cas :

$$\begin{aligned} \text{Imag} \left(\frac{1}{\hat{m}_y(r)} \frac{d \prod_{q=1}^p y_{k+rl_q}^{\epsilon_q, n_q}}{dw_{r,n}} \right) \Big|_{w=0} &= \text{Imag} \left(\frac{n_q}{x_n^{\epsilon_q}} \right) \\ &= -\frac{1}{A} n_q \epsilon_q \sin \phi_n. \end{aligned}$$

En utilisant (2) et l'expression précédente, il est alors possible de calculer l'expression de la somme intervenant

dans (7) pour les différentes valeurs de n . On montre ainsi que :

$$\text{Imag} \left(\frac{1}{\hat{m}_y(r)} \frac{d\hat{m}_y(r)}{dw_r} \right) \Big|_{w=0} = - \frac{1}{A(N - rl_p)} \mathbf{S} \mathbf{u}_r, \quad (8)$$

où \mathbf{S} est une matrice diagonale $N \times N$ dont les éléments sont $\{\sin \phi_1, \dots, \sin \phi_N\}$.

En suivant un raisonnement identique, on montre que :

$$\text{Imag} \left(\frac{1}{\hat{m}_y(r)} \frac{d\hat{m}_y(r)}{dw_i} \right) \Big|_{w=0} = \frac{1}{A(N - rl_p)} \mathbf{C} \mathbf{u}_r, \quad (9)$$

où \mathbf{C} est une matrice diagonale dont les éléments sont $\{\cos \phi_1, \dots, \cos \phi_N\}$. L'utilisation de (8,9) dans (6) termine la démonstration. ■

- Il est important de souligner que le vecteur \mathbf{u}_r ne possède que $2rl_p$ termes non nuls. Le calcul de la norme intervenant dans l'expression précédente ne va donc pas faire intervenir une somme de N termes mais seulement de $2Ll_p$ termes.
- Considérons le cas d'un signal à phase cubique; $M = 3$. Une solution consiste à choisir des moments stationnaires d'ordre 6 de la forme :

$$\mathbf{M}_{6,y}(\{0, 3, 3\}, \{1, 1, 4\}) = \text{E} \{ y_n y_{n-3}^2 (y_{n-1}^2 y_{n-4})^* \}.$$

On a donc $p = 4$ et :

$$\begin{array}{l|l|l|l} l_1 = 0 & l_2 = 1 & l_3 = 3 & l_4 = 4 \\ n_1 = 1 & n_2 = 2 & n_3 = 2 & n_4 = 1 \\ \epsilon_1 = 1 & \epsilon_2 = -1 & \epsilon_3 = 1 & \epsilon_4 = -1 \end{array}$$

Les composantes non nulles de \mathbf{u}_r sont alors :

$$\begin{array}{l|l} 1 \leq k < r + 1 & \mathbf{u}_r(k) = 1 \\ r + 1 \leq k < 3r + 1 & \mathbf{u}_r(k) = -1 \\ 3r + 1 \leq k < 4r + 1 & \mathbf{u}_r(k) = 1 \\ N - 4r < k \leq N - 3r & \mathbf{u}_r(k) = -1 \\ N - 3r < k \leq N - r & \mathbf{u}_r(k) = 1 \\ N - r < k \leq N & \mathbf{u}_r(k) = -1 \end{array}$$

4 Simulations

4.1 Comparaison avec Monte-Carlo

La première simulation a pour but de comparer l'expression théorique de la variance obtenue dans la section précédente avec la variance estimée par la méthode de Monte-Carlo.

Les simulations ont été réalisées dans le cas d'un signal à phase cubique pour les retards $(\{0, 3, 3\}, \{1, 1, 4\})$. Le nombre d'échantillons est $N = 20$ et $L = 3$. Les variances ont été estimées à partir de 500 réalisations indépendantes du bruit pour chaque valeur du rapport signal sur bruit. La figure 1 montre la bonne adéquation entre la variance estimée par Monte Carlo et l'expression (5). La borne de Rao Cramer de \hat{a}_3 dérivée dans [7] est également présentée sur la courbe.

4.2 Performances asymptotiques

Pour une valeur de L donnée, (5) montre que la variance de \hat{a}_M est en $1/N^2$. La borne de Rao Cramer de \hat{a}_M étant

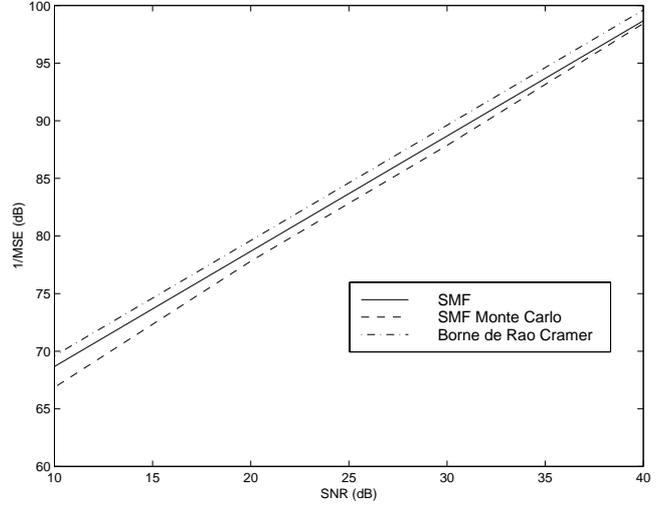


FIG. 1: Comparaison entre variance théorique et Monte Carlo.

en $1/N^{2M+1}$, SMF n'est donc pas un estimateur asymptotiquement efficace pour L constant. Or, l'expression de $\hat{m}_y(r)$ donnée plus haut, montre que L peut prendre des valeurs jusqu'à $(N - 1)/l_p$.

Une possibilité pour rendre l'estimateur efficace consiste donc à choisir L comme étant une fonction croissante de N . On peut par exemple choisir L de la forme $(N - 1)/l_p - \tau$. Dans ce cas τl_p représente le nombre minimum de termes moyennés dans l'estimation des moments. Cette solution est analogue à celle utilisée en analyse spectrale classique lors du fenêtrage du corrélogramme [9] afin d'en réduire sa variance. Le choix du paramètre τ repose donc sur un compromis entre la réduction de la variance de l'estimateur et la mauvaise qualité des estimateurs des «derniers» moments du à un faible moyennage de termes dans (4). Il faut cependant souligner que les moments (4) sont toujours non biaisés.

Afin d'étudier les performances de cet estimateur on définit le rapport :

$$\eta_N \triangleq \sqrt{\frac{\text{var}\{\hat{a}_M^{SMF}\}}{\text{CRLB}\{\hat{a}_M\}}} \quad (10)$$

pour $SNR \gg 1$. Il est important de remarquer que ce rapport est indépendant du rapport signal sur bruit. La figure 2 représente η_N en fonction de N pour $\tau = 11$. Ce résultat montre clairement que dans ce cas SMF est asymptotiquement efficace.

4.3 Comparaison avec TPP

Afin de comparer les performances de SMF avec la transformée de phase polynomiale, on définit :

$$\nu_N \triangleq \sqrt{\frac{\text{var}\{\hat{a}_M^{SMF}\}}{\text{var}\{\hat{a}_M^{TPP}\}}}. \quad (11)$$

Les deux expressions des variances sont obtenues dans le cas $SNR \gg 1$. L'expression analytique de la variance de \hat{a}_M^{TPP} a été d'abord calculée dans [6] et ensuite sous des hypothèses moins restrictives dans [1].

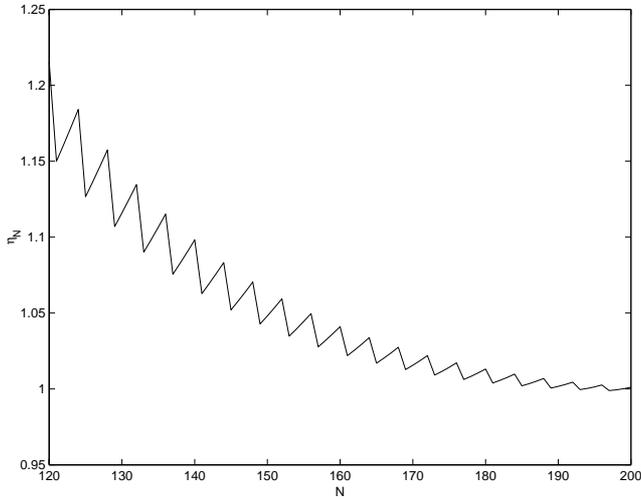


FIG. 2: Efficacité asymptotique de SMF.

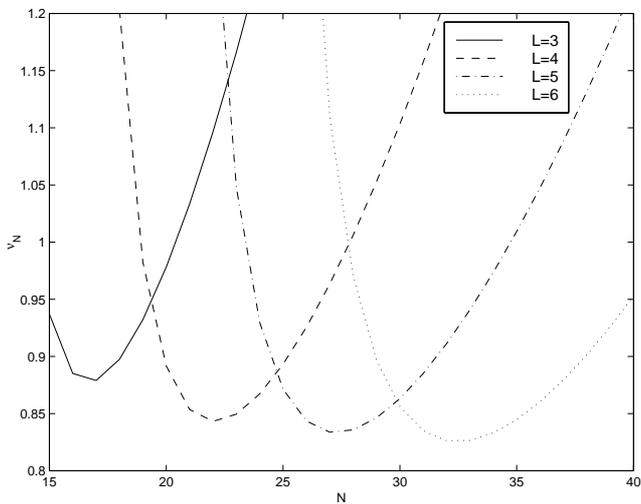


FIG. 3: Comparaison entre SMF et TPP pour \hat{a}_3 .

La figure 3 représente ν_N en fonction de N dans le cas $M = 3$ pour les retards $(\{0, 3, 3\}, \{1, 1, 4\})$ et pour différentes valeurs de L . Ces courbes montrent que pour une valeur de L fixée, ν_N passe par un minimum, qui est bien une valeur inférieure à 1. Ces résultats permettent donc, en fonction du nombre de points mesurés, de déterminer une valeur de L «optimale». Par ailleurs, ces courbes montrent qu'il est toujours possible de choisir L de façon à obtenir une variance de SMF inférieure à celle de TPP.

5 Conclusion et perspectives

Cette communication donne une expression théorique de la variance de l'erreur de l'algorithme SMF pour l'estimation du coefficient de plus haut degré d'un signal à phase polynômiale. Cette expression a conduit à une modification de l'algorithme de façon à obtenir son efficacité asymptotique. En outre elle a permis de confirmer, moyennant un choix correct des paramètres, sa supériorité par rapport à la transformée de phase polynômiale.

Compte tenu de ces résultats positifs, il est possible d'envisager un certain nombre d'extensions à cette approche. La première consiste à modifier la TPP en réduisant le signal à phase polynômiale en une fréquence pure en utilisant les retards de [3]. Dans ce cas, l'ordre des moments intervenants dans l'algorithme est $2.2(M - 1) = 4(M - 1)$. Cet ordre est cependant supérieur à celui de SMF pour $M > 2$.

Une seconde voie d'investigation est bien sûr constituée par les signaux à amplitude variable. Dans ce contexte, on distingue d'abord le cas d'une amplitude aléatoire, pour laquelle l'approche par moments stationnaires prend tout son sens. On montre en effet aisément que le moment stationnaire de l'observation est le produit de celui de l'amplitude et de celui du signal à phase polynômiale. Si l'on suppose par exemple que l'amplitude est Gaussienne blanche de moyenne positive, tous les moments de l'amplitude sont positifs ce qui permet l'application immédiate de (3). L'extension dans le cas d'une amplitude déterministe pouvant prendre des valeurs de signes différents est elle plus délicate compte tenu des variations de signe que peuvent avoir ses «moments».

Références

- [1] M. Benidir and A. Ouldali. Polynomial phase signals analysis based on the polynomial derivatives decompositions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998. à paraître.
- [2] P.M. Djurić and S.M. Kay. Parameter Estimation of Chirp Signals. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 38:2118–2126, 1990.
- [3] A. Ferrari, C. Theys, and G. Alengrin. Polynomial phase signal analysis using stationary moments. *EURASIP Signal Processing*, 54:239–248, nov 1996.
- [4] R.M. Liang and K.S. Arun. Parameter Estimation for Superimposed Chirp Signals. In *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, pages 273–276, 1992.
- [5] A. Ouldali. *Approches pour l'analyse des signaux à phase polynômiale. Effets d'un bruit multiplicatif et d'une amplitude constante*. PhD thesis, Université de Paris-Sud, centre d'Orsay, 1998.
- [6] S. Peleg and B. Friedlander. The discrete polynomial-phase transform. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 43(8):1901–1912, August 1995.
- [7] S. Peleg and B. Porat. The Cramer-Rao Lower Bound for signals with constant amplitude and polynomial phase. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 39(3):749–752, March 1991.
- [8] S. Peleg and B. Porat. Estimation and Classification of Polynomial-Phase Signals. *IEEE Transactions on Information Theory*, 37(2):1991–430, mar 1991.
- [9] Petre Stoica and Randolph Moses. *Introduction to Spectral Analysis*. Prentice Hall, 1997.