

Ré-échantillonnage, Co-addition et Restauration d'images

Benoît VANDAME¹, Albert BIJAOU¹

¹CERGA, UMR CNRS 6537
Observatoire de la Côte d'Azur
BP. 4229 06304 Nice Cedex 4

vandame@obs-nice.fr, bijaoui@obs-nice.fr

Résumé – Nous proposons une approche nouvelle pour la déconvolution d'un ensemble d'images. Nous introduisons un opérateur de *co-addition* qui permet de déconvoluer une série d'images dans un espace sur-échantillonné. Un tel opérateur permet de s'affranchir du problème du sous-échantillonnage fréquent avec des images obtenues par les capteurs CCD.

Abstract – We present a new approach concerning the deconvolution of an image set. We introduce the so-called: *co-addition* operator which allows a correct deconvolution in a resampled space. A such operator solves the usual problem of the under-sampling which exists with a CCD camera.

1 Introduction

Les images issues d'un capteur CCD (détecteur à transfert de charges) sont souvent sous-échantillonnées. C'est le cas, par exemple, des images obtenues avec le télescope spatial Hubble pour lesquelles la taille d'un pixel avec la *Wide Field Camera II* est de l'ordre de grandeur de la tache de diffraction. Ceci a conduit à restaurer les images en observant avec des poses décalées d'un demi pixel. En utilisant un grand nombre de poses Fruchter et Hook [1] ont abouti à la méthode dite du *drizzling* avec rééchantillonnage par interpolation. Ce n'est donc pas une méthode de restauration qui utilise complètement l'information d'une collection d'images.

Nous proposons dans cet article une méthode de ré-échantillonnage et de déconvolution propre à la fusion d'un ensemble d'images. Le rééchantillonnage introduit n'est pas une interpolation. Il tient compte de la fonction d'étalement. La déconvolution utilise l'algorithme de Lucy [2] régularisé [3], adapté au cas du rééchantillonnage.

2 Définition du rééchantillonnage et de la déconvolution utilisée

En revenant à la définition de l'échantillonnage, nous avons construit un opérateur de co-addition qui est utilisé comme étape avant la déconvolution dans un espace cible sur-échantillonné.

2.1 L'opérateur de co-addition

Définition

Considérons le cas mono-dimensionnel pour aborder ce problème. Soit V_n un signal échantillonné appartenant à une collection de N signaux. \mathcal{F} désigne le signal vrai continu associé, et désignons par \mathcal{R} le facteur de rééchan-

tillonnage, nous pouvons écrire la relation :

$$V_n(k) = \left\langle \mathcal{F}(x), \phi_n \left(\frac{x}{\mathcal{R}} - k \right) \right\rangle \quad (1)$$

ϕ_n représente la fonction d'étalement des signaux V_n , dits dans *l'espace brut*. On définit le signal O recherché, sur-échantillonné d'un facteur \mathcal{R} par rapport aux signaux V_n observés par :

$$O(k) = \langle \mathcal{F}(x), \phi(x - k) \rangle \quad (2)$$

O est défini dans *l'espace cible*. Les fonctions ϕ_n ont une fréquence de coupure ν_n supérieure à $\frac{1}{2}$ dans le cas d'un sous-échantillonnage. Nous choisissons ϕ de manière à ce que sa fréquence de coupure soit exactement $\frac{1}{2}$. En ré-échantillonnant, la fréquence de coupure de $\frac{1}{\mathcal{R}}\phi_n\left(\frac{x}{\mathcal{R}}\right)$ est celle de ϕ_n réduite d'un facteur \mathcal{R} . Si on choisit ce facteur de manière à avoir une fréquence de coupure correspondante inférieure à $\frac{1}{2}$, alors le rapport $\frac{\hat{\phi}_n(\mathcal{R}\nu)}{\hat{\phi}(\nu)}$ est toujours défini dans l'intervalle des fréquences $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En périodisant ce rapport on obtient ainsi la relation :

$$\hat{\phi}_n(\mathcal{R}\nu) = \hat{\phi}(\nu)\hat{h}_n(\nu) \quad (3)$$

Où $\hat{h}_n(\nu)$ est une fonction périodique. Par conséquent on peut écrire la relation de dilatation :

$$\frac{1}{\mathcal{R}}\phi_n\left(\frac{x}{\mathcal{R}}\right) = \sum_i h_n(i) \cdot \phi(x - i) \quad (4)$$

Où h_n sont des filtres passe-bas traduisant le lissage et le décalage de l'information pour passer du signal O aux signaux V_n sous-échantillonnés. L'équation de dilatation permet de définir une nouvelle relation entre les signaux V_n et O , par combinaison des équations (1) et (2).

$$V_n(k) = \sum_i h_n(i - \mathcal{R} \cdot k) \cdot O(i) \quad (5)$$

On déduit le signal O par moindres carrés :

$$\sum_n \left[V_n(k) - \sum_i h_n(i - \mathcal{R} \cdot k) \cdot O(i) \right]^2 \min / O \quad (6)$$

Par différenciation on introduit l'opérateur de co-addition qui consiste à obtenir un nouveau signal W de l'espace cible à partir des données V_n de l'espace brut par :

$$W(i) = \sum_n \sum_k V_n(k) \cdot h_n(i - \mathcal{R} \cdot k) \quad (7)$$

W est relié à O par l'équation :

$$W(i) = H(i, j) \cdot O(j) \quad (8)$$

avec :

$$H(i, j) = \sum_n \sum_k \sum_l h_n(i - \mathcal{R} \cdot k) \cdot h_n(j - \mathcal{R} \cdot l) \quad (9)$$

N'étant pas invariant par translation, H n'est pas un opérateur de convolution, il se décompose en \mathcal{R} filtres de convolution.

Illustration de la co-addition

Le schéma (fig. 1) illustre les relations entre les différents signaux. Sur la partie droite de la figure, nous illustrons le sous-échantillonnage et le lissage dus à la caméra CCD, et à la fonction d'étalement de l'instrument d'observation. Sur la partie gauche, nous illustrons l'opérateur de co-addition comme une opérateur dual de la dégradation de O . Le filtre H calculé, est le lien entre O et W (eq. 8).

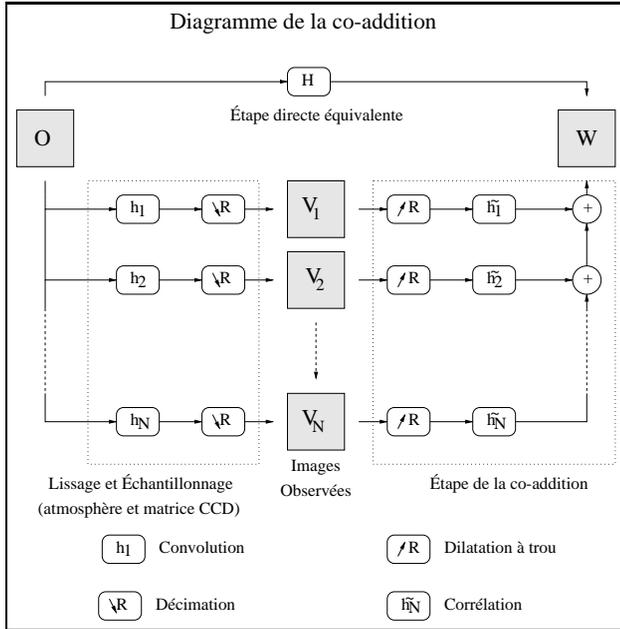


FIG. 1: Schéma de la co-addition.

Mise en œuvre de la co-addition

Afin de calculer l'image co-additionnée, il faut calculer le filtre H . Pour cela, nous devons disposer de :

- La fonction d'étalement dans un espace sur-échantillonné d'un facteur \mathcal{R} . Nous utilisons un modèle théorique de fonction d'échelle. Cette fonction ne peut pas être déduite de l'observation, car elle est sous échantillonnée, et, possède donc du recouvrement spectral.

- Calculer les translations entre images à une fraction de pixel près. Nous utilisons les phases calculées avec la transformée de Fourier, pour déduire précisément ces translations, qui doivent être déterminées à une fraction de pixel.

Le filtre H s'apparente à une auto-corrélation des filtres h_n . A deux dimensions, il s'exprime de \mathcal{R}^2 façons différentes. Etudions le cas avec $\mathcal{R} = 2$. H dépend de la parité de l'abscisse et de l'ordonnée. Il s'exprime de 4 manières différentes :

$$H_{xy} = \sum_n (h_n \otimes [h_n \times h_{n_{xy}}]) \quad (10)$$

avec x, y définie en base \mathcal{R} . Et :

$$h_{n_{00}} = h_n \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$h_{n_{10}} = h_n \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$h_{n_{01}} = h_n \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$h_{n_{11}} = h_n \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

On utilise $H_{xy}(i, j)$ de tel sorte que :

$$\begin{cases} i \bmod \mathcal{R} = x \\ j \bmod \mathcal{R} = y \end{cases} \quad (15)$$

Les matrices de H peuvent facilement se généraliser avec un coefficient de sur-échantillonnage \mathcal{R} d'une puissance de 2. Le nombre de matrices de H évolue en \mathcal{R}^2 .

Application de la co-addition

Les images suivantes illustrent la co-addition avec $\mathcal{R} = 4$. La taille des images initiales est de 128 pixels de coté. On dispose de 20 images brutes.

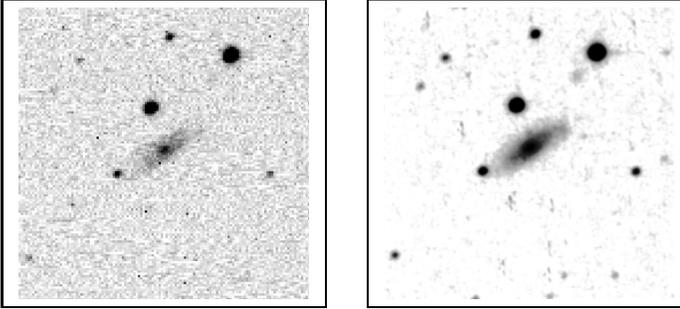


FIG. 2: Exemple de co-addition d'images. A droite : une des 20 images brutes, à gauche : la co-addition des 20 images brutes

L'application de la co-addition sur cette image met en évidence l'amélioration du rapport signal sur bruit.

La qualité de l'image co-additionnée dépend du nombre d'images brutes et aussi des translations entre elles. Dans un cas idéal, il faudrait \mathcal{R}^2 images traduites les unes aux autres de n/\mathcal{R} avec : $n \in [1 \cdots \mathcal{R}]$.

A défaut on choisira les images telle que les translations se distribuent selon une loi de probabilité uniforme.

2.2 Déconvolution dans l'espace sur-échantillonné

Pour calculer l'image O , on utilise la déconvolution introduite par Lucy[2]. Cette méthode permet de retrouver un signal O à partir d'une image convolée I et de son filtre de convolution P . Il s'agit d'un processus itératif qui cherche à minimiser l'erreur entre une solution O_n convolée avec la fonction d'étalement et l'image I :

$$\begin{cases} O_0 & = \text{Identité} \\ O_{n+1} & = O_n \left[\tilde{P} \otimes \left(\frac{I}{I_n} \right) \right] \end{cases} \quad (16)$$

avec :

$$I_n = O_n \otimes I \quad (17)$$

Pour l'inversion du problème qui nous concerne (eq. 8) (obtention de O en connaissant H et W), nous utilisons l'algorithme de Lucy régularisé [3]. Dans notre cas, la fonction de lissage P est le filtre H , l'image I est l'image W issue de la co-addition.

Le signal O recherché, se calcule par un procédé itératif. L'équation récursive (eq. 16) peut s'écrire sous la forme :

$$O_{n+1} = O_n \left[\tilde{H} \left(\frac{R_n + W_n}{W_n} \right) \right] \quad (18)$$

$$= O_n \left[\tilde{H} \left(1 + \frac{R_n}{W_n} \right) \right] \quad (19)$$

avec :

$$R_n = W - W_n \quad (20)$$

Le résidu R_n est filtré à chaque itération en tenant compte de la statistique des coefficients. Seuls les coefficients significatifs à 3σ sont conservés dans chaque plan en ondelettes.

Malgré la complexité de l'opérateur H (non invariant par translation, l'opérateur n'étant une convolution), l'algorithme de Lucy s'applique correctement et converge vers une solution unique régularisée.

3 Application sur un cas réel

Nous avons testé cette méthode sur une série de 20 images de l'amas globulaire $M13$ obtenue avec le télescope de Schmidt de l'Observatoire de la Côte d'Azur. Sur chaque image la fonction d'étalement a été déterminée, ce qui permet d'obtenir les coefficients h_n . La figure 3 illustre les résultats du traitement au coeur de l'amas à différentes résolutions.

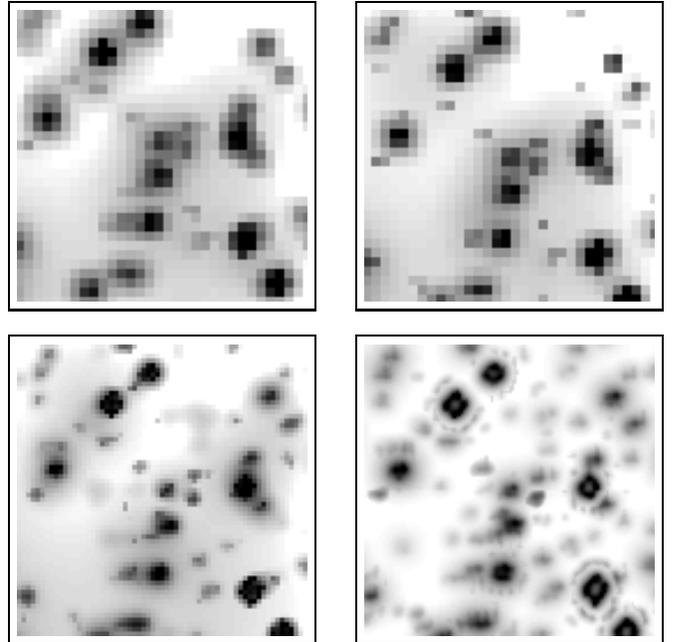


FIG. 3: Détails des images avec : une image brute, puis avec $\mathcal{R} = 1, 2, \text{ et } 4$.

Comparaison avec une image observée

Nous comparons l'image O issue du calcul, avec une image du télescope spatial Hubble d'une résolution spatiale plus de vingt fois meilleure. Les nouvelles étoiles obtenues par le calcul se retrouvent sur l'image observée directement :

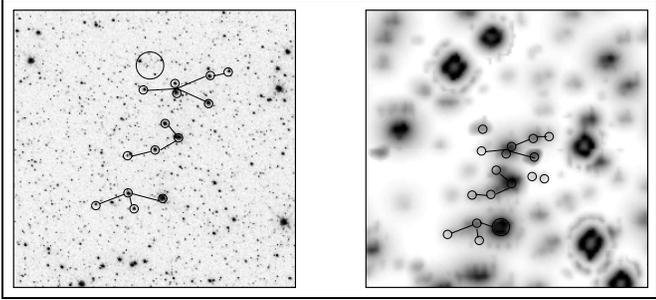


FIG. 4: Comparaison entre l'image co-additionnée déconvoluée, et une image du coeur de M13 obtenue par le télescope spatial.

Mesures quantitatives

Nous mesurons le nombre d'étoiles et leurs tailles moyennes afin de quantifier la qualité des images et leurs résolutions.

Types de données	Nombre d'étoiles	Taille (pixel)	Résolution	Gain en résolution
Initiales	230	0,95	0,76''	1
$\mathcal{R} = 1$	250	0,78	0,62''	1,22
$\mathcal{R} = 2$	500	0,77	0,3''	2,5
$\mathcal{R} = 4$	900	1,33	0,26''	2,9

4 Conclusion

Avec la définition de la *co-addition* que nous avons introduite, et l'opérateur de sur-échantillonnage, nous démontrons qu'il est possible d'augmenter la résolution des images au-delà du pixel.

L'application sur une série de 20 images, conduit à un gain en résolution effective de 3 par rapport aux données initiales. Les résultats de ces premiers tests laissent penser que le gain en résolution pourrait être de 6 (avec un facteur de ré-échantillonnage de 8), si l'on disposait d'un grand nombre d'images brutes (au moins \mathcal{R}^2). Le sous-échantillonnage des matrices CCD, est donc compensé par de nombreuses poses translattées les unes par rapport aux autres.

De tels traitements semblent appropriés aux télescopes à grand champ, pour lesquels le sous-échantillonnage est important.

Références

[1] R. Hook and A. S. Fruchter. Linear reconstruction of Hubble deep field. *ST-ECF Newsletter*, 1997.

[2] W. H. Richardson. Bayesian-based iterative method of image restoration. *J. Optical society of America*, 62(1):55–59, January 1972.

[3] A. Bijaoui, J.L. Starck, and F. Murtagh. Restauration des images multi-échelles par l'algorithme à trous. *Traitement du Signal*, 11:229–243, 1994.