

Estimation de Statistiques Spectrales Synchrones sur des Signaux Cyclostationnaires de Moteur Diesel

Jérôme ANTONI¹, Joannès DANIÈRE¹, François GUILLET¹

¹Laboratoire d'Analyse des Signaux et des Processus industriels
20, Avenue de Paris, 42334 Roanne Cédex, France

antoni@univ-st-etienne.fr

Résumé – Nous nous intéressons à l'estimation des moments spectraux conditionnels (MSC) de la distribution de Wigner-Ville (DWV) sur des signaux de machine alternative fortement transitoires. L'objectif est à la fois de caractériser les événements d'un cycle machine par une signature « angle-fréquence » et de réduire l'espace d'analyse à quelques séquences mono-dimensionnelles. Nous exploitons l'analogie entre la DWV et une densité de probabilité pour dériver directement les MSC à partir du signal. Nous étendons ensuite les résultats au cas des DWV d'ordre supérieur (bispectre et trispectre). Un des apports de ce papier est de proposer une procédure d'estimation consistante et sans effet de bord basée sur la cyclostationnarité des signaux analysés. La procédure est finalement appliquée sur des signaux accélérométriques d'un moteur diesel.

Abstract – This paper deals with the estimation of the conditional spectral moments (CSM) of the Wigner-Ville distribution (WVD) on transient signals from reciprocating machines. The aim is both to characterise such signals by an « angle-frequency » signature and to reduce the space to a few 1D sequences. The analogy between the WVD and a probability density function is used to find closed-form solutions for the CSM. These results are then extended to higher-order WVD. One of the contribution of this paper is to propose a consistent estimation procedure. Results are finally discussed on real accelerometric data from a diesel engine.

1. Introduction

Nous nous intéressons à l'estimation de descripteurs statistiques sur des signaux cyclostationnaires de machine alternative, afin de pouvoir les caractériser et par la suite, définir des stratégies de diagnostic. Notre objectif est d'extraire les signatures « angle-fréquence » de signaux fortement transitoires. Le calcul des premiers moments spectraux conditionnels (MSC) de la distribution de Wigner-Ville (DWV) semble bien atteindre cet objectif.

Nous rappelons d'abord la structure des signaux étudiés et introduisons des estimateurs statistiquement consistants qui exploitent leur propriété de cyclostationnarité. Les formules pour le calcul des MSC directement à partir du signal sont ensuite retrouvées simplement en faisant l'analogie avec le calcul des probabilités. Pour parvenir à une estimation exacte sans effets de bord, nous montrons que la cyclostationnarité des signaux permet d'utiliser le dérivateur $2\pi jf$ où $j = \sqrt{-1}$, et f est la fréquence réduite. Enfin, les statistiques sont appliquées à des mesures accélérométriques d'un moteur diesel.

2. Structure des Signaux

2.1 Modélisation

L'analyse des signaux accélérométriques des moteurs thermiques est délicate, car les méthodes aujourd'hui largement acceptées dans le domaine des machines tournantes (analyse spectrale, analyse cepstrale, analyses statistiques) sont difficilement transposables au domaine des machines

alternatives. Celles-ci présentent un nombre important de composants mécaniques et la combinaison des mouvements qui en résulte est complexe. Les vibrations générées sont composées à la fois de signaux harmoniques dus aux organes rotatifs et de signaux transitoires dus aux organes alternatifs (chocs, frottements, forces d'inertie, gradients de pression, etc).

Sans perte de généralité, les signaux vibratoires d'une machine alternative peuvent être considérés comme la somme d'une contribution déterministe périodique, d'une contribution aléatoire cyclostationnaire (propriétés statistiques périodiques) et d'une contribution aléatoire stationnaire au sens stricte.

En appelant x_p , x_r et n ces contributions respectives et en prenant comme variable générique l'angle de rotation θ du cycle machine, le signal vibratoire discret s'écrit $x[\theta] = x_p[\theta] + x_r[\theta] + n[\theta]$. Afin de définir cette écriture de manière unique, nous proposons que $x[\theta]$ satisfasse les propriétés suivantes :

1. $x_p[\theta + N] = x_p[\theta]$, où N est la période du cycle
2. $x_r[\theta]$ est centré et cyclostationnaire d'ordre ≥ 2 :
 $E\{x_r[\theta_1 + N]x_r[\theta_2 + N]\} = E\{x_r[\theta_1]x_r[\theta_2]\}$, $E\{x_r[\theta]\} = 0$
3. $n[\theta]$ est un bruit blanc centré gaussien : $E\{n[\theta]\} = 0$,
 $E\{n[\theta_1]n[\theta_2]\} = \sigma_n^2 \delta[\theta_1 - \theta_2]$
4. $x_r[\theta]$ et $n[\theta]$ sont indépendants

2.2 Estimateur synchrone

Insistons sur le fait que les signaux considérés sont non-stationnaires par rapport à la variable θ . Leur ergodicité n'est donc pas envisageable. La propriété de

cyclostationnarité permet de contourner cette difficulté. En effet, toute séquence $\{x[\theta_0], x[\theta_0+1], \dots, x[\theta_0+N-1]\}$ du signal vibratoire prise sur la durée d'un cycle peut être vue comme une réalisation particulière du processus stochastique $x[\theta]$, $\theta = \theta_0, \dots, \theta_0+N-1$. Par conséquent un estimateur de l'opérateur espérance mathématique est donné par la moyenne d'ensemble d'une infinité de cycles :

Proposition 1 : Pour toute fonction f de $R^d \rightarrow R$ telle que $E\{f(x[\theta])\} < \infty$, un estimateur consistant de $E\{f(x[\theta])\}$ est donné par $\lim_{K \rightarrow \infty} (2K+1)^{-1} \sum_{k=-K}^K f(x[\theta+kN])$

3. Moments Spectraux Conditionnels de la Distribution de Wigner-Ville

3.1 Motivations

Nous cherchons à condenser l'information bi-dimensionnelle d'une représentation « angle-fréquence » sur un nombre fini de séquences mono-dimensionnelles. Les MSC de la DWV satisfont bien cet objectif pour deux raisons :

1. pour les signaux transitoires large-bandes, les premiers MSC suffisent pour résumer le contenu du spectre évolutif.
2. ils ont une signification physique, le moment d'ordre zéro correspondant à l'énergie du signal, le moment d'ordre un à la fréquence moyenne instantanée, les moments centrés d'ordre supérieur à des mesures de largeur de bande du processus.

3.2 Estimation des MSC

Initialement définie pour les signaux déterministes [1], la DWV est définie pour les signaux aléatoires comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocovariance instantanée : $W_x(\theta, f) = TF\{E\{x_c^*[\theta-\tau/2]x_c[\theta+\tau/2]\}\}$ où $x_c[\theta]$ est le signal analytique préalablement centré. Les MSC de la DWV normalisée sont donnés par :

$$m_\alpha(\theta) = \frac{\int_0^{f/2} W_x(\theta, f) f^\alpha df}{\int_0^{f/2} W_x(\theta, f) df} = \int_0^{f/2} TF\{\Phi[\theta, \tau]\} f^\alpha df$$

où $\Phi[\theta, \tau] = R_x[\theta, \tau]/R_x[\theta, 0]$. La distribution est homogène à la densité de probabilité de la variable f conditionnée à la variable θ . La fonction d'autocovariance (semi-positive) est homogène à la fonction caractéristique de la variable f/θ . Par analogie avec le calcul des probabilités, nous en déduisons que :

Proposition 2 : Le MSC d'ordre α de la DWV normalisée est généré par la dérivée $\alpha^{\text{ième}}$ de la fonction d'autocovariance instantanée normalisée prise en zéro, soit :

$$m_\alpha[\theta] = \frac{1}{(2\pi j)^\alpha} \cdot \frac{\partial^\alpha \Phi[\theta, \tau]}{\partial \tau^\alpha} \Big|_{\tau=0}$$

En posant $x_c = a + ib$ et $e = E\{|x_c|^2\}$ à la position θ et en appliquant la proposition n°2, il vient (voir [3] et [5] pour une dérivation analogue de m_1 et m_2) :

$$m_1 = E\{b'a - a'b\} / 2\pi e$$

$$m_2 = E\{a'^2 + b'^2 - a'a - b'b\} / 8\pi^2 e$$

$$m_3 = E\{a^{(3)}b - b^{(3)}a + 3(b'a' - b'a')\} / 32\pi^3 e$$

$$m_4 = E\left\{ \frac{a^{(4)}a + b^{(4)}b - 4(a^{(3)}a' + b^{(3)}b')}{+3(a''^2 + b''^2)} \right\} / 128\pi^4 e$$

Nous retiendrons plutôt les versions centrées comme descripteurs statistiques :

- la variance spectrale : $M_1 = m_2 - m_1^2$

- l'asymétrie spectrale : $M_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$

- l'appauvrissement spectral : $M_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4$

Le calcul direct et rapide de ces moments à partir du signal est possible par application de la proposition n°2 et de la proposition suivante que nous démontrons en annexe :

Proposition 3 : Soient $x[\theta]$ et $y[\theta]$ deux séquences discrètes conjointement cyclostationnaires à la période N . Si la dérivée x' de x existe, un estimateur efficace et sans effets de bord de $E\{x'[\theta]y[\theta]\}$ est donné par application de la proposition n°1 avec $x'[\theta] = TFD^{-1}\{X[k]D[k]\}$ où $X[k] = TFD\{x[\theta]\}$ est la transformée de Fourier discrète de x sur la durée N du cycle et $D[k] = 2\pi jk/N$, $k=0, \dots, N-1$.

3.3 Extension aux MSC de WV-OS

Des distributions de Wigner-Ville aux ordres supérieurs ont récemment été proposées pour caractériser à la fois la non-stationnarité et la non-gaussianité de signaux aléatoires transitoires. Aux ordres 3 et 4 (bispectre et trispectre de WV), elles sont définies par les expressions suivantes de manière à conserver les propriétés marginales sur un signal mono-composante modulé en fréquence [4], [6] :

$$1. W_{3x}[\theta, f_1, f_2] = TF2\{C_{x_1x_2x_3}[\theta, \tau_1, \tau_2]\}$$

où $C_{x_1x_2x_3}$ est le cumulants d'ordre 3 sur $x_1 = x_c^*[\theta - \tau_1/3 - \tau_2/3]$, $x_2 = x_c[\theta + 2\tau_1/3 - \tau_2/3]$, $x_3 = x_c[\theta + 2\tau_2/3 - \tau_1/3]$,

$$2. W_{4x}[\theta, f_1, f_2, f_3] = TF3\{C_{x_1x_2x_3x_4}[\theta, \tau_1, \tau_2, \tau_3]\}$$

où $C_{x_1x_2x_3x_4}$ est le cumulants d'ordre 4 sur $x_1 = x_c^*[\theta - \tau_1/4 - \tau_2/4 - \tau_3/4]$, $x_2 = x_c[\theta + 3\tau_1/4 - \tau_2/4 - \tau_3/4]$, $x_3 = x_c[\theta + 3\tau_2/4 - \tau_1/4 - \tau_3/4]$ et $x_4 = x_c^*[\theta + 3\tau_3/4 - \tau_1/4 - \tau_2/4]$.

Elles donnent respectivement lieu à des représentations tri et quadri-dimensionnelles que nous cherchons à réduire comme précédemment par le calcul de leur premier MSC. Les cumulants $C_{x_1x_2x_3}$ et $C_{x_1x_2x_3x_4}$ n'étant pas définis semi-positifs, les DWV correspondantes ne sont pas assimilables à des densités de probabilités conjointes. Cependant, par analogie avec ce qui précède, il est toujours possible de définir des MSC aux ordres supérieurs par :

$$m_{\alpha,i}^n[\theta] = \frac{\int_0^{f/2} W_{nx}[\theta, f] f_i^\alpha df}{\left(\int_0^{f/2} W_x[\theta, f] df\right)^{n/2}} = \frac{(2\pi j)^{-\alpha}}{e[\theta]^{n/2}} \cdot \frac{\partial^\alpha C_{nx}[\theta, \underline{\tau}]}{\partial \underline{\tau}^\alpha} \Big|_{\underline{\tau}=0}$$

Cette définition appelle quelques remarques :

1. Les moments d'ordre zéro du bispectre et du trispectre de WV donnent respectivement le skew et le kurtosis synchrones du signal.

2. Les moments centrés perdent leur signification probabiliste. En particulier, le moment d'ordre 2 n'est plus une variance ($M_2^{n>2} \in C$).

3. Les premiers moments à l'ordre 3 et 4 apportent une information complémentaire à celle à l'ordre 2 et permettent de discriminer des vibrations modulées aléatoirement en amplitude. Pour un signal multi-composante $x_i[\theta] = \sum_i A_i[\theta] \cos(2\pi\phi_i[\theta])$, les $A_i[\theta]$ étant des processus

aléatoires indépendants entre eux et cyclostationnaires jusqu'à l'ordre 4, il vient :

$$m_1^2 = (\sum_i E\{A_i^2\} \phi_i' + \sigma_n^2 / 2) / (\sum_i E\{A_i^2\} + 2\sigma_n^2)$$

$$m_0^3 = \sum_i E\{A_i^3\} e^{j2\pi\theta_i} / (\sum_i E\{A_i^2\} + 2\sigma_n^2)^{3/2}$$

$$m_1^3 = 2 / 3 \sum_i E\{A_i^3\} \phi_i' e^{j2\pi\theta_i} / (\sum_i E\{A_i^2\} + 2\sigma_n^2)^{3/2}$$

$$m_0^4 = \sum_i (E\{A_i^4\} - 3E\{A_i^2\}^2) / (\sum_i E\{A_i^2\} + 2\sigma_n^2)^2$$

$$m_1^4 = \sum_i (E\{A_i^4\} - 3E\{A_i^2\}^2) \phi_i' / (\sum_i E\{A_i^2\} + 2\sigma_n^2)^2$$

En particulier si les $A_i[\theta]$ sont des processus gaussiens, les statistiques m_0^3 , m_1^3 , m_0^4 , et m_1^4 sont nulles.

4. Application aux Signaux Moteur

Un ensemble de mesures ont été effectuées sur un moteur diesel atmosphérique à quatre cylindres. Les signaux ont été échantillonnés en angulaire sur 128 cycles, à 1500 tr/min, à 512 points/tr et avec une fréquence de coupure à 6 kHz. La composante périodique x_p est estimée par moyennage synchrone de x . Les résidus par rapport à x_p fournissent le processus x_r+n , sur lequel sont ensuite estimés les MSC.

La figure n°1 présente l'estimation de x_p , la figure n°2 celle de m_1 . La détection et la localisation des événements au cours du cycle moteur peut se faire très précisément sur la fréquence instantanée, alors que difficile sur le signal brut. La figure n°3 présente la variance spectrale M_2 . Cette statistique est une mesure de la largeur de bande à la position θ , par conséquent les phénomènes transitoires y sont plus marqués. Les MSC supérieurs permettent de discriminer certains événements particuliers par rapport au reste du signal (asymétrie négative des combustions en fig. 4).

Les premiers MSC du bispectre et du trispectre de WV sont plus difficile à lire, mais font ressortir le début des transitoires de combustion, qui sont de type non-gaussiens. Globalement, les phénomènes suivants ont pu être identifiés :

TAB. 1 : diagramme cinématique du cycle moteur

Position	Évènement	Cylindre
$-55^\circ+k\pi$	Avance ouverture échappement	$k-1$
$-25^\circ+k\pi$	Début injection	$k-1$
$-8^\circ+k\pi$	Avance ouverture admission	k
$-5^\circ+k\pi$	Début combustion	$k-1$
$+8^\circ+k\pi$	Basculement piston	$k-1$
$+13^\circ+k\pi$	Retard fermeture échappement	k
$+45^\circ+k\pi$	Retard fermeture piston	$k+2$
$+75^\circ+k\pi$	Basculement piston	$k+2$

5. Conclusion

L'étude a confirmé que les moments spectraux sont des descripteurs appropriés des signaux transitoires et large-bandes des machines alternatives. Après avoir exploité l'analogie entre la DWV et une densité de probabilité pour dériver simplement les MSC à partir du signal, une procédure d'estimation est proposée qui utilise la cyclostationnarité des signaux étudiés. Nous démontrons pour cela que le calcul de la dérivée d'un signal cyclostationnaire par la TFD est une procédure statistiquement sans effets de bord. Les résultats sont ensuite étendus aux DWV d'ordre 3 et 4. L'estimation

des statistiques a été appliquée sur des signaux de moteur diesel. A l'ordre 2, les moments spectraux se sont avérés être des outils de détection et de caractérisation précis des événements transitoires. A l'ordre 3 et 4, ils permettent d'extraire les transitoires de type non-gaussiens du reste du signal.

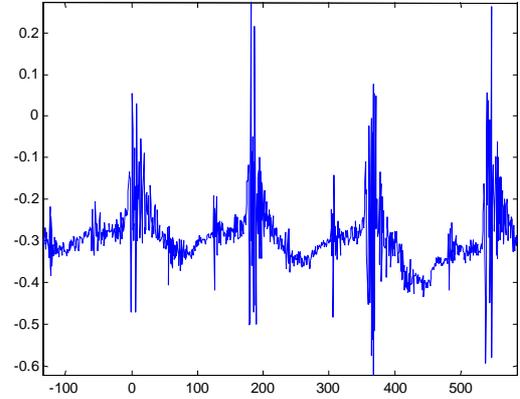


FIG. 1 : Moyenne synchrone. L'axe horizontal est gradué sur un cycle moteur (0° correspond au PMH du 1^{er} cylindre).

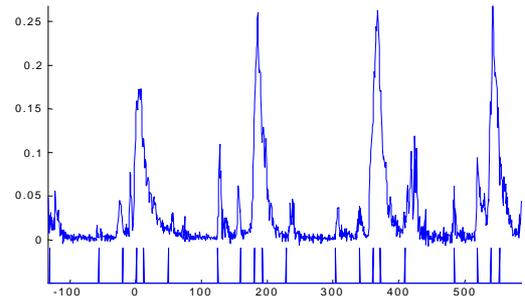


FIG. 2 : Fréquence instantanée (en fréquence réduite) et épure des principaux événements dans le cycle machine.

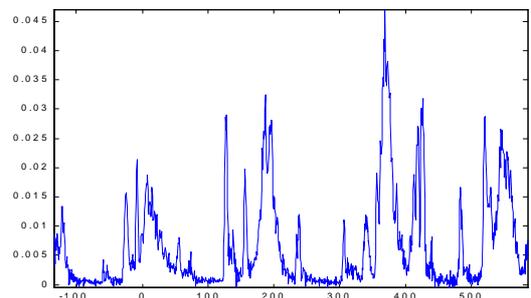


FIG. 3 : Variance spectrale

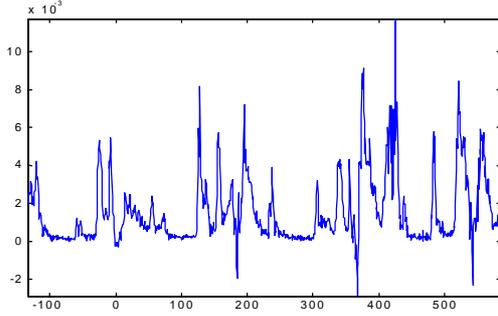


FIG. 4 : Asymétrie spectrale.

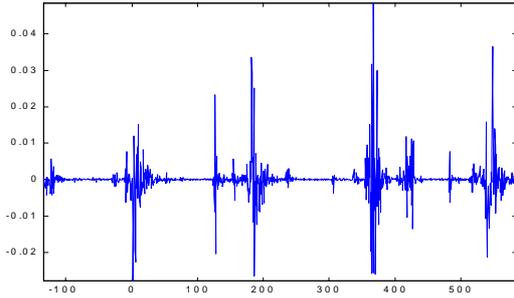


FIG. 5 : $\text{Im}\{m^3_{1,1}\}$

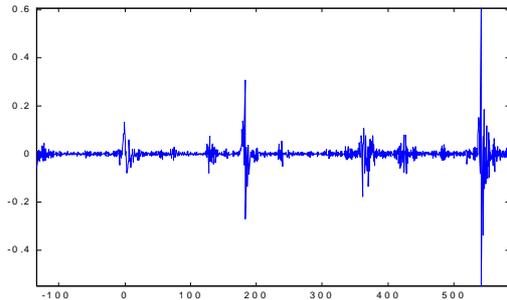


FIG. 6 : $\text{Im}\{m^4_{1,1}\}$

6. Annexes

6.1 Démonstration de la proposition 3

Soit $x[\theta]$ et $y[\theta]$ deux séquences discrètes conjointement cyclostationnaires à la période N , c'est à dire telles que $E\{x[\theta_1+kN]y[\theta_2+lN]\} = E\{x[\theta_1]y[\theta_2]\}$, $(k,l) \in \mathbb{N}^2$. Soit $h[\theta]$ le filtre dérivateur numérique dont la TFD est $H[k] = 2\pi j k / N$, $k=0, \dots, N-1$. Il se comporte comme le dérivateur exacte dans le seul cas où on le convolve avec une séquence périodique de période N/n , $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque par hypothèse $E\{x[\theta_1]y[\theta_2]\}$ est périodique de période N :

$$\partial/\partial\theta_1 E\{x[\theta_1]y[\theta_2]\} = h[\theta_1] * E\{x[\theta_1]y[\theta_2]\}$$

or, $\partial/\partial\theta_1 E\{x[\theta_1]y[\theta_2]\} = E\{x'[\theta_1]y[\theta_2]\}$ si la dérivée x' de x existe. Par conséquent $E\{x'[\theta_1]y[\theta_2]\} = h[\theta_1] * E\{x[\theta_1]y[\theta_2]\} = E\{(h[\theta_1] * x[\theta_1])y[\theta_2]\}$. Le reste de la

démonstration suit en posant $\theta_1 = \theta_2$ et en appliquant la proposition n°1.

6.2 Formules pour l'estimation des MSC du bispectre et du trispectre de WV

En posant $x_c = a + ib$ et en utilisant la formule du paragraphe 3.2, il vient :

$$m_0^3 = E\{(a - jb)(a + jb)^2\} / e^{3/2}$$

$$m_1^3 = E\{(ja - b)(-a'b + b'a)\} / 3\pi j e^{3/2}$$

$$m_0^4 = E\{(a^2 + b^2)^2\} / e^2$$

$$m_1^4 = (C_{1234}^1 - C_{12}^1 C_{34}^1 - C_{12}^1 C_{34}^1 - C_{13}^1 C_{24}^1 - C_{13}^1 C_{24}^1 - C_{23}^1 C_{14}^1 - C_{23}^1 C_{14}^1) / 2\pi j e^2$$

avec

$$e = E\{(a^2 + b^2)\} = C_{12} = C_{34} = C_{13} = C_{24}$$

$$C_{14} = E\{(a - jb)^2\}, C_{23} = E\{(a + jb)^2\}$$

$$C_{12}^1 = E\{(a'a + b'b) / 2 + j(-a'a + b'a)\} = C_{13}^1$$

$$C_{34}^1 = -E\{a'a - b'b\} / 2 = C_{13}^1$$

$$C_{23}^1 = E\{(a'a - b'b) + j(a'b + b'a)\} / 2$$

$$C_{14}^1 = -E\{(-a' + jb')(-a + jb)\} / 2$$

$$C_{1234}^1 = jE\{(a^2 + b^2)(-a'b + b'a)\}$$

Pour le bispectre de WV, les propriétés de symétrie font que les moments $m_{\alpha,i}^3$ ($i=1,2$) sont identiques quel que soit le choix de la variable de dérivation τ_i . Pour le trispectre de WV, les moments $m_{\alpha,i}^4$ ($i=1,2,3$) sont identiques pour $\tau_i = \tau_1$ et $\tau_i = \tau_2$ seulement. Ils sont dérivés ici pour $\tau_i = \tau_1$.

Références

- [1] P. Flandrin, *Temps-Fréquence*, Editions Hermès, 1993
- [2] M. A. Polletti *The Development of Instantaneous Bandwidth via Local Signal Expansion*, Signal Processing 31 (1993) pp273-281
- [3] G. D. Zivanovic *On the Instantaneous Frequency of Cyclostationary Random Signal*, IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 39, No. 7, July 1991, pp1604-1610
- [4] A. Swami *Third-Order Wigner Distributions : Definitions and Properties*, Proc. IEEE ICASSP-91, pp3081-3084
- [5] S. L. Hahn, *Stochastic Analytic Signals and the Relation Between Instantaneous Frequency and Spectral Moments Using the Wigner-Ville Distribution*, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Vol. 43, No. 4, 1995, pp525-535
- [6] J. R. Fonollosa, C. L. Nikias, *Wigner Higher Order Moment Spectra : Definition, Properties, Computation and Application to Transient Signal Analysis*, IEEE Trans. Signal Processing, Vol. 41, No. 1, January 1993, pp245-266
- [7] E. Barnes, *The calculation of instantaneous frequency and instantaneous bandwidth*, Geophysics, Vol. 57, No. 11, November 1992, pp.1520-1524