

Un critère de séparation de sources fondé sur les kurtosis normalisés signés

Yannick DEVILLE, Mohammed BENALI

Laboratoire d'Acoustique, de Métrologie, d'Instrumentation (LAMI)
Université Paul Sabatier, 38, Rue des 36 Ponts, 31400 Toulouse, France
ydeville@cict.fr

Résumé – Dans cet article, nous considérons tout d'abord une combinaison linéaire instantanée de deux signaux sources indépendants. Nous montrons que l'annulation de l'une ou l'autre des composantes de sources dans ce signal combiné correspond exactement à tous les extréma de types donnés de son kurtosis normalisé, où ces types dépendent des signes des kurtosis des sources. Nous en déduisons une méthode de séparation de sources fondée sur l'optimisation (c-à-d maximisation et/ou minimisation, suivant la nature des sources) du kurtosis normalisé d'une combinaison linéaire instantanée des mélanges de sources observés. Nous discutons ensuite les avantages obtenus en prenant en compte les signes des kurtosis des sources et des sorties du système. Enfin, nous fournissons une validation expérimentale des résultats théoriques que nous avons établis.

Abstract – In this paper, we first consider a linear instantaneous combination of two independent source signals. We show that the cancellation of either source component in this combined signal corresponds exactly to all the extrema of given types of its normalized kurtosis, where these types depend on the signs of the source kurtosis. From this, we then derive a source separation method based on the optimization (i.e. maximization and/or minimization, depending on the nature of the sources) of the normalized kurtosis of a linear instantaneous combination of the observed mixtures of the sources. We then discuss the advantages obtained by taking into account the signs of the kurtosis of the sources and system outputs. Finally, we provide an experimental validation of the theoretical results that we derived.

1 Introduction

La séparation aveugle de sources est maintenant devenue un problème relativement classique de traitement du signal, qui peut être résumé de la manière suivante [1]-[3]. Dans sa version standard, on dispose de n signaux observés qui sont des mélanges linéaires instantanés à coefficients inconnus de n signaux sources inconnus statistiquement indépendants. On souhaite alors restaurer ces signaux sources. Pour cela, on réalise un système de séparation qui recombine les signaux observés de manière linéaire instantanée, à l'aide de coefficients qui sont généralement adaptés de façon à rendre les sorties de ce système indépendantes. Partant de ce principe, de nombreux critères pratiques d'indépendance (approchée) ont été proposés. En particulier, diverses méthodes consistent à optimiser des combinaisons de moments ou cumulants d'ordre supérieur associés aux sorties du système de séparation. Parmi elles, on s'intéresse ici aux approches fondées sur un critère relatif à un moment ou cumulant propre à chaque sortie considérée (voir par exemple [1],[2]). L'optimisation de ce critère se fait généralement sous contrainte [1],[2], ce qui peut poser des problèmes d'instabilité numérique [3]. Dans cet article, nous proposons une approche différente, directement fondée sur l'optimisation du kurtosis normalisé de la sortie du système considérée. Pour faciliter notre analyse, nous introduisons une approche en deux étapes, qui permet de scinder avantageusement le problème global en deux sous-problèmes plus simples.

2 Kurtosis normalisé d'une superposition de signaux

Dans un premier temps, nous considérons un signal $z(t)$ qui est une combinaison linéaire instantanée de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ stationnaires, centrés et indépendants :

$$z(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t), \quad (1)$$

où α_1 et α_2 sont des coefficients réels constants. Nous noterons $k(u)$ le kurtosis normalisé de tout signal stationnaire centré u . Il s'exprime en fonction des cumulants ou moments à l'origine de ce signal suivant [4] :

$$k(u) = \frac{\text{cum}_4(u)}{[\text{cum}_2(u)]^2} = \frac{E\{u^4(t)\} - 3[E\{u^2(t)\}]^2}{[E\{u^2(t)\}]^2}. \quad (2)$$

Nos calculs permettent alors d'obtenir la relation suivante après simplification :

$$k(z) = \frac{k(x_1) + k(x_2)p^2}{(1+p)^2}, \quad (3)$$

où la variable p que nous introduisons est définie par :

$$p = \frac{\text{cum}_2(\alpha_2 x_2)}{\text{cum}_2(\alpha_1 x_1)}. \quad (4)$$

Notons que, d'après (1), $z(t)$ ne contient qu'une composante provenant de $x_1(t)$ si et seulement si (ssi) $\alpha_2 = 0$ et donc¹ ssi $p = 0$. De même, $z(t)$ ne dépend que de $x_2(t)$ ssi $\alpha_1 = 0$, c-à-d ssi $p = +\infty$.

¹ $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont supposés à puissance moyenne non nulle.

TAB. 1: Variations de $k(z)$ en fonction de p , dans le cas $k(x_1) > 0$ et $k(x_2) > 0$. Notations : 1) $p_s = k(x_1)/k(x_2)$, 2) $k_s = k(z)$ pour $p = p_s$.

p	0	p_s	$+\infty$
$\frac{dk(z)}{dp}$		< 0	0
			> 0
$k(z)$	$k(x_1)$		$k(x_2)$
		\searrow	\nearrow
		k_s	

On étudie ici l'influence des coefficients α_1 et α_2 sur $k(z)$ pour des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ fixés (mais inconnus). D'après (3)-(4), cette influence est entièrement prise en compte par la valeur correspondante de la variable p que nous avons introduite. On étudie donc les variations de $k(z)$ en fonction de p . Nos calculs montrent qu'elles dépendent des signes de $k(x_1)$ et $k(x_2)$. Dans le cas où $k(x_1) > 0$ et $k(x_2) > 0$, elles sont définies par le tableau 1. Les valeurs de p qui nous importent sont celles pour lesquelles $z(t)$ ne dépend que de l'un des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, c-à-d $p = 0$ et $p = +\infty$ comme on l'a montré ci-dessus. Le tableau 1 montre que ces valeurs sont exactement celles qui maximisent $k(z)$ dans le cas considéré ici. Les autres cas conduisent aux résultats suivants². Si $k(x_1) < 0$ et $k(x_2) < 0$, $k(z)$ augmente quand p croît de 0 à p_s , puis diminue quand p croît de p_s à $+\infty$. Si $k(x_1) < 0$ et $k(x_2) > 0$, $k(z)$ est une fonction croissante de p . Enfin, si $k(x_1) > 0$ et $k(x_2) < 0$, $k(z)$ est une fonction décroissante de p . Dans chaque cas, les valeurs de p annulant l'une des composantes de $z(t)$ correspondent exactement à tous les extrema de $k(z)$ de types donnés (c-à-d maxima et/ou minima), où ces types dépendent du cas considéré. Cette propriété suggère d'utiliser comme critère de séparation de sources l'optimisation (c-à-d maximisation et/ou minimisation, suivant la nature des sources) du kurtosis normalisé d'une combinaison linéaire instantanée de mélanges observés de ces sources (on notera au passage que ce critère ne contient pas de contrainte de normalisation de l'amplitude des coefficients de pondération ou des sources estimées, et ne nécessite pas de blanchir préalablement ces sources). Cette idée demande cependant à être affinée, car le critère de séparation final doit être fondé sur les variations du kurtosis normalisé de ce signal par rapport à un paramètre c contrôlé dans le système de séparation réel (et non pas seulement sur les variations par rapport à p). Ce raffinement de l'approche proposée nécessite de préciser les conditions de mélange et le système de séparation considérés. Il correspond à la deuxième étape de notre étude, qui va maintenant être présentée.

3 Application à un système de séparation

Nous supposons que nous disposons des signaux observés suivants :

²Les cas où $k(x_1) = 0$ ou $k(x_2) = 0$ conduisent à des résultats très voisins et sont omis ici et dans la section suivante par souci de concision.

$$y_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) \quad (5)$$

$$y_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t), \quad (6)$$

où x_i sont les signaux sources et a_{ij} sont les coefficients de mélange réels constants. L'unité de base du système de séparation que nous proposons fournit alors le signal :

$$s(t) = y_1(t) - cy_2(t), \quad (7)$$

où c est un coefficient ajustable. Les valeurs de c qui nous importent sont celles pour lesquelles $s(t)$ ne dépend que de l'un des signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$, c-à-d resp. $c = c_2 = a_{12}/a_{22}$ et $c = c_1 = a_{11}/a_{21}$. Il nous reste à étudier les variations de $k(s)$ en fonction de c . Cette analyse est simplifiée en tirant parti des calculs préliminaires que nous avons présentés ci-dessus. Pour cela, on scinde en deux aspects les variations de $k(s)$:

$$\frac{dk(s)}{dc} = \frac{dk(s)}{dp} \frac{dp}{dc}. \quad (8)$$

$\frac{dk(s)}{dp}$ a été étudié ci-dessus (z s'identifie ici à s). Il ne reste donc plus ici qu'à : i) déterminer l'expression de p en fonction de c , propre au système de séparation considéré (pour cela, on combine (5)-(7) et on identifie l'expression obtenue à celles de la première étape de l'étude), ii) étudier $\frac{dp}{dc}$, iii) combiner ces résultats avec ceux de la première étape. En tenant compte du tableau 1, on obtient ainsi le tableau 2. Ce tableau montre que, dans le cas considéré, les maxima de $k(s)$ à c fini correspondent exactement aux valeurs c_1 et c_2 , c-à-d aux deux solutions du problème de séparation de sources (le cas $p_s > p_\infty$ conduit à la même conclusion). Cela nous permet d'introduire un nouveau critère de séparation de sources, qui consiste à maximiser le kurtosis normalisé du signal de sortie du système considéré (à c fini; nous ne le répétons pas pour les autres cas ci-dessous). On définit des critères similaires pour les autres cas, en se basant sur les résultats suivants. Si $k(x_1) < 0$ et $k(x_2) < 0$, les deux solutions au problème de séparation de sources correspondent aux deux minima de $k(s)$ (voir tableau 3). Dans le cas d'une source à kurtosis négatif et d'une source à kurtosis positif, leurs extractions correspondent respectivement au seul minimum et au seul maximum de $k(s)$.

Ce dernier résultat est important car certaines applications pratiques nécessitent d'extraire un signal utile à kurtosis positif à partir de mélanges de ce signal avec un signal d'interférence ("bruit") à kurtosis négatif. Dans cette situation, beaucoup de méthodes de séparation de sources classiques ne peuvent pas tirer parti de cette connaissance a priori et doivent donc extraire les deux signaux, laissant à la charge du concepteur du système de séparation de décider quelle sortie de ce système fournit le signal utile. Au contraire, en maximisant $k(s)$ l'approche proposée permet alors de n'extraire qu'un signal (ce qui réduit le coût calculatoire) et garantit que le signal extrait est la source utile. De plus, si les deux signaux présentent maintenant un intérêt, la méthode proposée peut les extraire en parallèle en adaptant deux unités de base définies ci-dessus, resp. de manière à maximiser et minimiser $k(s)$.

Ceci est à opposer à l'approche de déflation qui est souvent utilisée dans les méthodes similaires mentionnées en Section 1 : dans cette dernière approche, les sources sont extraites en série, ce qui peut réduire la vitesse et la précision de convergence.

4 Résultats expérimentaux

Afin de valider les résultats théoriques obtenus dans les sections précédentes, nous présentons ici des courbes expérimentales de $k(s)$, estimé à l'aide des moyennes empiriques associées à (2), pour des signaux sources spécifiques. Chacune de ces sources est un signal binaire $X_i(t)$ prenant les valeurs $+1$ et -1 resp. avec les probabilités p_i et $1 - p_i$, où p_i est un paramètre de la source considérée. On peut montrer que la version centrée $x_i(t)$ d'une telle source a pour kurtosis normalisé :

$$k(x_i) = \frac{1}{p_i(1-p_i)} - 6. \quad (9)$$

Le premier des deux cas présentés correspond à l'utilisation de deux sources sous-gaussiennes. Plus précisément, on choisit ici $p_1 \simeq 0.5$ et $p_2 \simeq 0.5$, ce qui conduit à $k(x_1) \simeq -2$ et $k(x_2) \simeq -2$ d'après (9). Les coefficients de mélanges sont définis par les équations suivantes, dans lesquelles les sources sont numérotées de manière à ce que $c_2 > c_1$ (voir tableau 2) :

$$y_1(t) = 0.7x_1(t) + x_2(t) \quad (10)$$

$$y_2(t) = x_1(t) + 0.4x_2(t). \quad (11)$$

La figure 1 représente l'allure générale des variations de $k(s)$ en fonction de c , qui est complètement cohérente avec les sens de variation théoriques définis pour ce cas dans le tableau 3 (noter qu'on a ici $p_s \simeq 1$ et $p_\infty \simeq 0.16$, si bien qu'on est dans le cas $p_s \geq p_\infty$). La figure 2 fournit un zoom de la courbe précédente autour des deux minima de $k(s)$. Elle permet de vérifier que :

1. ces minima se produisent bien pour les valeurs de c correspondant à la séparation de sources, c-à-d $c = c_2 = a_{12}/a_{22} = 2.5$ et $c = c_1 = a_{11}/a_{21} = 0.7$,
2. les valeurs correspondantes de $k(s)$ sont bien resp. $k(x_1) \simeq -2$ et $k(x_2) \simeq -2$ (voir tableau 3).

Le deuxième cas étudié met en jeu une source sur-gaussienne et une source sous-gaussienne. Plus précisément, pour des coefficients de mélange à nouveau définis par (10)-(11), on choisit ici $p_1 \simeq 0.1$ et $p_2 \simeq 0.5$, ce qui conduit à $k(x_1) \simeq 5$ et $k(x_2) \simeq -2$. La courbe de variation de $k(s)$ en fonction de c (voir figure 3) est à nouveau conforme aux sens de variation théoriques (non détaillés ici pour des raisons de place), c-à-d elle présente bien un maximum et un minimum, resp. situés en $c_2 = 2.5$ et $c_1 = 0.7$, et d'amplitudes $k(x_1) \simeq 5$ et $k(x_2) \simeq -2$.

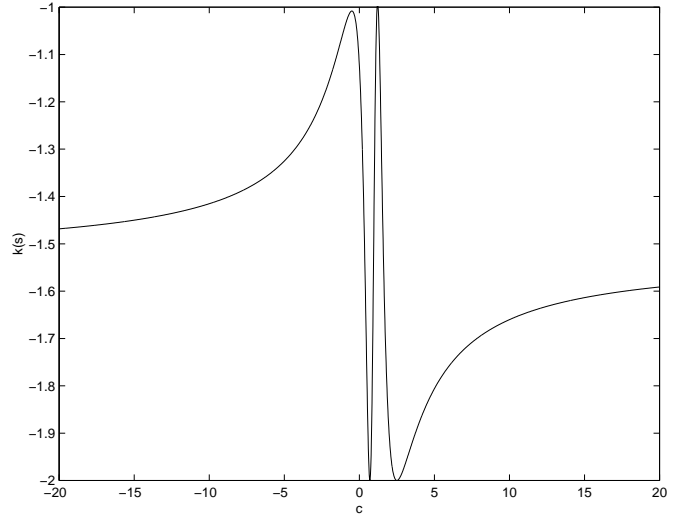


FIG. 1: Variations de $k(s)$ en fonction de c pour deux sources sous-gaussiennes : allure générale.

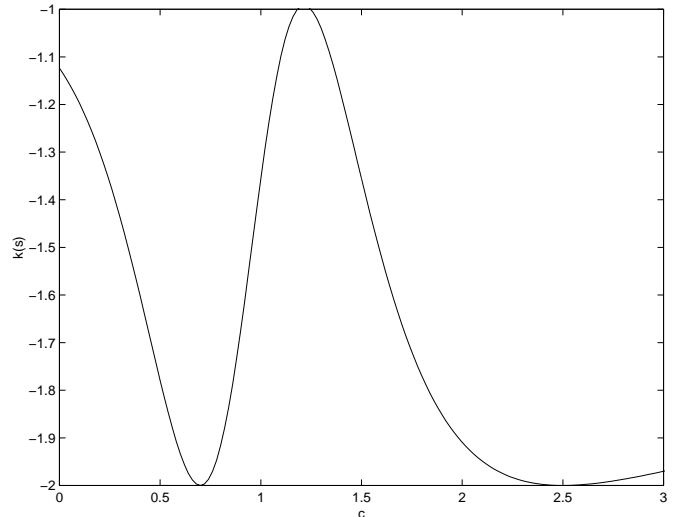


FIG. 2: Variations de $k(s)$ en fonction de c pour deux sources sous-gaussiennes : zoom autour des deux minima.

5 Conclusions

Dans cet article, nous avons introduit un critère de séparation de sources fondé sur l'optimisation du kurtosis (signé³) normalisé (et qui ne nécessite pas de blanchiment ni de contrainte de normalisation des coefficients ou des sources). Cette approche peut être vue comme une généralisation du critère classique de minimisation de puissance moyenne qui ne s'applique qu'au cas où un signal de référence (c-à-d non mélangé) est disponible. Nos travaux futurs concerneront en particulier des extensions de l'approche proposée à plus de deux sources et à des mélanges convo-

³Après que cet article ait été accepté pour publication, nous avons découvert que J. K. Tugnait a récemment publié des articles concernant une approche similaire. Cependant, cette autre approche utilise la valeur absolue du kurtosis normalisé et ne peut donc pas tirer parti des propriétés liées aux signes des kurtosis que nous avons décrites en Section 3.

lutifs, ainsi que la mise au point d'algorithmes fondés sur ce critère de séparation.

References

- [1] N. Delfosse, P. Loubaton, "Adaptive blind separation of independent sources: a deflation approach", Signal Processing, vol. 45, no. 1, pp. 59-84, July 1995.
- [2] S. C. Douglas, S.-Y. Kung, "An ordered-rotation KuicNet algorithm for separating arbitrarily-distributed sources", Proceedings of the International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA'99), pp. 81-86, Aussois, France, Jan. 11-15, 1999.
- [3] S. C. Douglas, S.-Y. Kung, S. Amari, "On the numerical stabilities of principal, minor, and independent component analysis algorithms", Proceedings of the International Workshop on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation (ICA'99), pp. 419-424, Aussois, France, Jan. 11-15, 1999.
- [4] C.L. Niekias, J.M. Mendel, "Signal processing with higher-order spectra", IEEE Signal Processing Magazine, pp. 10-37, July 1993.

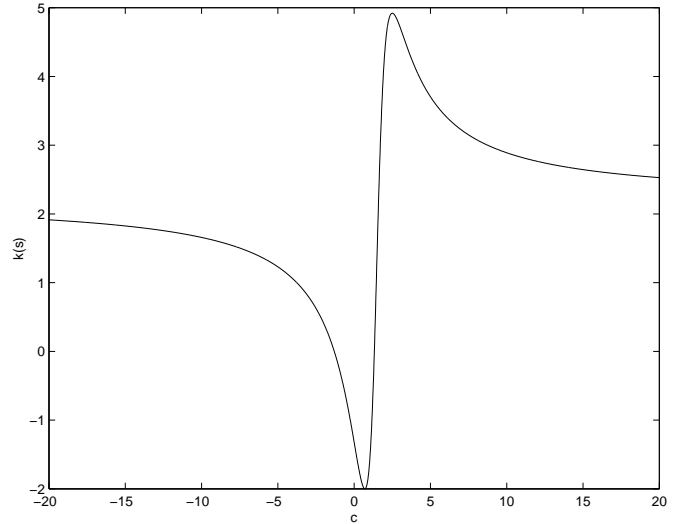


FIG. 3: Variations de $k(s)$ en fonction de c pour une source sur-gaussienne et une source sous-gaussienne.

TAB. 2: Variations de $k(s)$ en fonction de c , dans le cas $k(x_1) > 0$, $k(x_2) > 0$ et $p_s \leq p_\infty$ (et $c_2 > c_1$, mais on peut toujours s'y ramener par une renumérotation des sources). Notations : 1) c_{21} et c_{22} sont les deux valeurs de c entourant c_2 telles que $p = p_s$, 2) $p_\infty = [a_{22}^2 cum_2(x_2)]/[a_{21}^2 cum_2(x_1)]$.

c	$-\infty$	c_1	c_{21}	c_2	c_{22}	$+\infty$
$\frac{dp}{dc}$	> 0	\parallel	< 0	0	> 0	
p	p_∞	\nearrow	$+\infty$ $+\infty$	\searrow	\nearrow	p_∞
$\frac{dk(s)}{dc}$	> 0	0	< 0	0	> 0	0
$k(s)$	\nearrow	$k(x_2)$	\searrow	\nearrow	$k(x_1)$	\searrow

TAB. 3: Variations de $k(s)$ en fonction de c , dans le cas $k(x_1) < 0$, $k(x_2) < 0$ et $p_s \geq p_\infty$ (et $c_2 > c_1$: voir tableau 2). Notations : c_{11} et c_{12} sont les deux valeurs de c entourant c_1 telles que $p = p_s$.

c	$-\infty$	c_{11}	c_1	c_{12}	c_2	$+\infty$
$\frac{dp}{dc}$	> 0	\parallel	< 0	0	> 0	
p	p_∞	\nearrow	$+\infty$ $+\infty$	\searrow	\nearrow	p_∞
$\frac{dk(s)}{dc}$	> 0	0	< 0	0	> 0	0
$k(s)$	\nearrow	\searrow	$k(x_2)$	\nearrow	\searrow	$k(x_1)$