

# Rectification généralisée aux antennes de géométrie quelconque

Philippe FORSTER

Laboratoire Electronique et Communication  
Conservatoire National des Arts et Métiers  
2 Rue Conté, 75141 Paris CEDEX 03  
forster@cnam.fr

**Résumé** – Dans les méthodes à haute résolution appliquées aux antennes linéaires uniformes, le pré-traitement (ou rectification) qui consiste à forcer la matrice spectrale estimée à posséder une structure de Toeplitz par moyennage le long de ses diagonales est bien connu pour accroître spectaculairement le pouvoir de résolution: c’est pourquoi il est toujours effectué en pratique. Toutefois, cette approche est limitée aux antennes linéaires : cet article *généralise cette technique aux antennes de géométrie arbitraire*.

**Abstract** – In high resolution methods applied to Uniform Linear Arrays (ULA), the pre-processing that consists in forcing the estimated Cross Spectral Matrix (CSM) to be Toeplitz by averaging its elements along its diagonals is known to increase drastically the resolving power : that is why it is always done in practice. However, this approach is limited to linear arrays because of the required Toeplitz structure for the CSM : this paper *generalizes this technique to arrays of arbitrary geometry*.

## 1 Introduction

Dans les méthodes de localisation de sources décorréliées utilisant des Antennes Linéaires Uniformes (ALU), le pré-traitement (ou rectification) qui consiste à rendre la matrice spectrale estimée Toeplitz par moyennage le long de ses diagonales est bien connu pour accroître spectaculairement la résolution [2, 3]. Toutefois, cette approche est limitée au cas des antennes linéaires à cause de la structure de Toeplitz requise pour les matrices spectrales : c’est pourquoi un pré-traitement simple du même type s’appliquant à des antennes de géométrie quelconque est présenté dans cet article. La méthode qu’on y développe consiste à rechercher un sous-espace vectoriel  $\mathcal{E}$  de l’ensemble des matrices hermitiennes  $\mathcal{H}$ , de dimension minimale, et qui contient au mieux (au sens d’un critère précisé plus loin) l’ensemble des matrices spectrales possibles en sortie de l’antenne. Ce sous-espace  $\mathcal{E}$  ayant été préalablement déterminé, la rectification des matrices spectrales estimées consiste alors à les projeter orthogonalement sur  $\mathcal{E}$ , améliorant de cette façon leur précision d’estimation. L’article est organisé comme suit : le paragraphe 2 introduit les notations et explique les raisons pour lesquelles une rectification appropriée a un sens pour des géométries d’antenne autres que l’ALU. Le paragraphe 3 développe l’algorithme proposé. Le paragraphe 4 présente les propriétés statistiques de la matrice spectrale rectifiée. Enfin, le paragraphe 5 donne des résultats de simulations qui démontrent l’accroissement du pouvoir de résolution lorsque l’on applique les méthodes de localisation après rectification.

## 2 Notations et motivations

**Notations.** Considérons une antenne de  $M$  capteurs, de vecteur directionnel  $\mathbf{a}(\theta, f)$  où  $\theta$  est le gisement et  $f$  la fréquence. Nous supposons tous les signaux stationnaires,

les sources décorréliées, l’antenne et les sources coplanaires, et les vecteurs directionnels normés :

$$\|\mathbf{a}(\theta, f)\| = 1. \quad (1)$$

Soit

$$\Gamma(f) = \sum_{p=1}^P \gamma_p(f) \mathbf{a}(\theta_p, f) \mathbf{a}^H(\theta_p, f) + \gamma(f) \mathbf{I} \quad (2)$$

la matrice spectrale à la fréquence  $f$ , où  $\gamma_p(f)$  et  $\gamma(f)$  représentent les Densités Spectrales de Puissance (DSP) des sources et du bruit. Sauf mention expresse, aucune restriction n’est faite par la suite sur le nombre  $P$  de sources et la méthode développée s’applique sans modification à un continuum de sources. La matrice spectrale est estimée conventionnellement par moyennage temporel de périodogrammes :

$$\hat{\Gamma}_w(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{x}_n(f) \mathbf{x}_n^H(f) \quad (3)$$

où  $\mathbf{x}_1(f), \dots, \mathbf{x}_N(f)$  désignent les transformées de Fourier, sur  $N$  intervalles de temps consécutifs, des données capteurs pondérées par une fenêtre appropriée. Nous ferons référence à  $N$  comme étant le nombre de données. Lorsque la résolution de la transformée de Fourier est suffisamment élevée, l’estimateur (3) de la matrice spectrale est sans biais et suit une loi de Wishart à  $N$  degrés de liberté dans le cas de signaux gaussiens : on supposera ces conditions remplies. Dans la suite de l’article  $f$  est fixe et la dépendance en  $f$  des matrices spectrales, DSP et vecteurs directionnels est omise.

Par souci de clarté, rappelons brièvement quelques faits élémentaires sur les matrices hermitiennes et définissons quelques notations qui seront utilisées par la suite. En séparant la partie réelle et la partie imaginaire, l’ensemble

$\mathcal{H}$  des matrices hermitiennes d'ordre  $M$  est un espace vectoriel de dimension  $M^2$  sur le corps des réels. L'expression suivante

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}) \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

définit un produit scalaire et la norme correspondante  $\|\cdot\|_F$  est la norme dite de Frobenius :

$$\|\mathbf{A}\|_F^2 = (\mathbf{A}, \mathbf{A}).$$

Soit  $\text{vec}(\mathbf{A})$  le vecteur réel dont les  $2M^2$  composantes sont égales aux parties réelles et imaginaires des éléments de  $\mathbf{A}$  pris dans un ordre donné et arbitraire, et notons  $\text{unvec}(\cdot)$  l'opération inverse :  $\text{unvec}(\text{vec}(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$ . Alors, le produit scalaire (4) de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  est simplement égal au produit scalaire ordinaire de  $\text{vec}(\mathbf{A})$  et  $\text{vec}(\mathbf{B})$  :

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{vec}(\mathbf{A})^T \text{vec}(\mathbf{B}). \quad (5)$$

Les matrices spectrales (2) en sortie de l'antenne sont structurées. Par conséquent, elles n'occupent pas entièrement l'espace  $\mathcal{H}$  des matrices hermitiennes : comme nous allons le voir, elles sont confinées en général dans un sous-espace  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{H}$ . Ce fait peut être exploité pour améliorer la précision d'estimation des matrices spectrales en projetant l'estimateur  $\hat{\Gamma}_w$  (3) dans  $\mathcal{E}$ . Ceci est bien connu dans le cas des antennes linéaires, mais c'est aussi *presque* vrai pour d'autres géométries d'antennes comme par exemple les antennes circulaires.

**Cas des antennes linéaires.** Dans le cas des antennes linéaires,  $\Gamma$  (2) a une structure hermitienne Toeplitz : les matrices spectrales exactes sont ainsi dans un sous-espace  $\mathcal{E}$  de dimension  $L = 2M - 1$  (sur  $\mathfrak{R}$ ). Cette structure est généralement prise en compte en moyennant  $\hat{\Gamma}_w$  le long de ses diagonales. Ce simple pré-traitement accroît la précision d'estimation des matrices spectrales et améliore ainsi le pouvoir de résolution des méthodes de localisation. Il peut s'interpréter comme une projection orthogonale des matrices spectrales estimées dans le sous-espace  $\mathcal{E}$  lorsque le produit scalaire de deux matrices est défini par (4).

**Cas des antennes circulaires.** L'approche qui suit dans ce paragraphe permet d'expliquer pourquoi la matrice spectrale est aussi confinée approximativement dans un sous-espace des matrices hermitiennes pour d'autres géométries que l'ALU. Toutefois, cette approche présente plusieurs inconvénients et ne sera pas retenue dans la méthode de rectification pratique développée au paragraphe 3. Considérons une antenne circulaire uniforme de rayon  $r$  dont le vecteur directionnel est donné par :

$$\mathbf{a}(\theta) = [z(\theta), z(\theta - 2\pi/M), \dots, z(\theta - 2\pi(M-1)/M)]^T \quad (6)$$

où :

$$z(\theta) = e^{2i\pi \cos(\theta) r/\lambda}. \quad (7)$$

$z(\theta)$  (7) a pour développement en série de Fourier [1] :

$$\begin{aligned} z(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(2\pi \frac{r}{\lambda}) e^{in\theta} \\ &= \sum_{n=-I}^I i^n J_n(2\pi \frac{r}{\lambda}) e^{in\theta} + \epsilon_I(\theta), \end{aligned} \quad (8)$$

où la norme  $\mathcal{L}^2$  de l'erreur  $\|\epsilon_I(\theta)\|^2 = \int_0^{2\pi} |\epsilon_I(\theta)|^2 d\theta$  peut être rendue aussi petite que l'on veut. La figure 1 montre la valeur minimale de  $I$  dans (8) en fonction de  $b = 2\pi \frac{r}{\lambda}$  pour obtenir :

$$\|\epsilon_I(\theta)\|^2 < 0.001 \|z(\theta)\|^2. \quad (9)$$

Ainsi, en approximant  $z(\theta)$  par (8), le vecteur directionnel

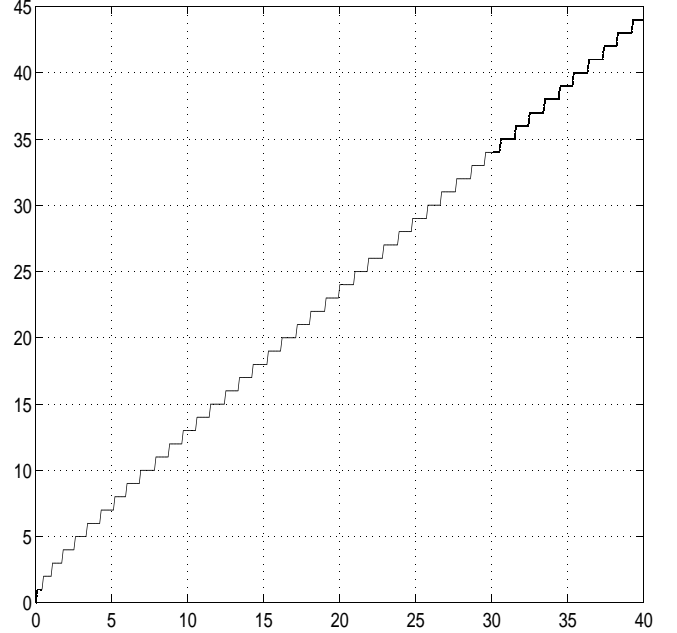


FIG. 1:  $I$  en fonction de  $b = 2\pi \frac{r}{\lambda}$  lorsque  $\|\epsilon_I(\theta)\|^2 < 0.001 \|z(\theta)\|^2$ .

$\mathbf{a}(\theta)$  s'écrit :

$$\mathbf{a}(\theta) \approx \mathbf{F} \check{\mathbf{a}}(\theta) \quad (10)$$

où le vecteur  $\check{\mathbf{a}}(\theta)$  et la matrice  $\mathbf{F} = (F(m, n))$  de dimension  $M \times (2I + 1)$  sont définis par :

$$\check{\mathbf{a}}(\theta) = [e^{-iI\theta}, \dots, e^{iI\theta}]^T \quad (11)$$

$$F(m, n) = i^n J_n(2\pi \frac{r}{\lambda}) e^{-2i\pi n m/M}. \quad (12)$$

avec  $0 \leq m \leq M - 1$  et  $-I \leq n \leq I$ . Ainsi, d'après (10) et l'expression (11) de  $\check{\mathbf{a}}(\theta)$ , la matrice spectrale (2) pour l'antenne circulaire peut s'exprimer comme  $\Gamma \approx \mathbf{F} \check{\Gamma} \mathbf{F}^H + \gamma \mathbf{I}$  où  $\check{\Gamma} = \sum_{p=1}^P \gamma_p \check{\mathbf{a}}(\theta_p) \check{\mathbf{a}}^H(\theta_p)$  est une matrice hermitienne Toeplitz d'ordre  $(2I + 1)$ . Ainsi, ces matrices spectrales se trouvent (approximativement) dans un sous-espace  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{H}$  dont la dimension  $L$  ne peut pas excéder  $2(2I + 1) - 1$  dimensions pour contenir les matrices du type  $\mathbf{F} \check{\Gamma} \mathbf{F}^H$  et une dimension pour  $\gamma \mathbf{I}$  et qui est en général très inférieure à la dimension  $M^2$  de  $\mathcal{H}$ . Par exemple, pour l'antenne circulaire à  $M = 10$  capteurs de rayon  $r = 0.7\lambda$  qui est utilisée par la suite dans les simulations,  $I = 7$  satisfait (9) de sorte que  $L \leq 2(2I + 1) = 30 \ll \dim \mathcal{H} = M^2 = 100$ .

Enfin, on peut remarquer d'après la figure 1 que  $I$ , et par conséquent  $L = \dim \mathcal{E}$ , dépendent du rayon de l'antenne : plus l'antenne est petite, plus la dimension du sous-espace  $\mathcal{E}$  est elle-même petite.

### 3 Rectification des matrices spectrales

Nous présentons maintenant la méthode de rectification proposée. D'après (2), les matrices spectrales sont des combinaisons linéaires de la matrice identité et de matrices de la forme :

$$\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta).$$

Nous allons donc chercher un sous-espace  $\mathcal{E}$  de dimension  $L$  des matrices hermitiennes (la valeur de  $L$  est discutée plus loin), qui contient la matrice identité et qui est aussi proche que possible de la variété engendrée par les matrices  $\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$  lorsque  $\theta$  parcourt l'ensemble  $\Theta$  des gisements possibles (cf. figure 2). En général, le sous-espace  $\mathcal{E}$  ne contient pas exactement toutes les matrices  $\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$  (sauf pour des géométries particulières comme l'ALU). Toutefois, on peut le rendre aussi proche d'elles que l'on veut en choisissant  $L$  suffisamment grand : ce point est discuté en détail au paragraphe 3.3 où l'on donne une règle pratique pour sa détermination. Nous avons choisi

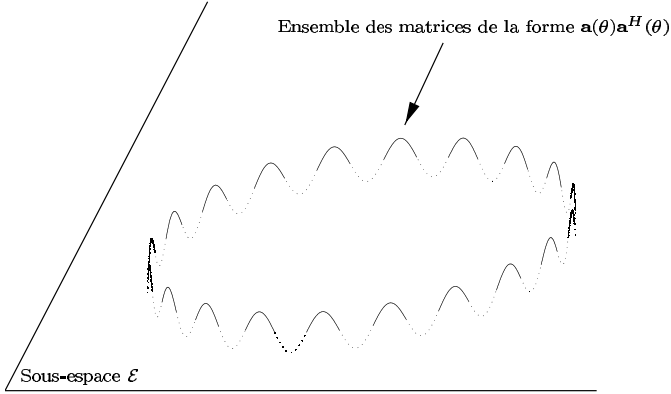


FIG. 2: Sous-espace  $\mathcal{E}$  dans l'espace des matrices hermitiennes.

un critère quadratique pour l'ajustement de  $\mathcal{E}$ , et son optimisation est présentée au paragraphe suivant.

#### 3.1 Détermination du sous-espace $\mathcal{E}$

Soit  $\mathcal{E}$  un sous-espace de dimension  $L$  des matrices hermitiennes qui contient la matrice identité, et  $\Pi[\cdot]$  le projecteur orthogonal sur  $\mathcal{E}$  où le produit scalaire est défini par (4). Considérons le critère suivant

$$f(\Pi) = \int_{\Theta} \|\Pi[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)] - \mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)\|_F^2 g(\theta) d\theta, \quad (13)$$

où  $g(\theta)$  est une fonction de pondération donnée et  $\Theta$  l'ensemble des gisements possibles pour les sources ( $[0, 2\pi[$  en général). Alors, le sous-espace  $\mathcal{E}$  qui minimise (13) sous la contrainte  $\mathbf{I} \in \mathcal{E}$  s'obtient de la façon suivante.

Posons

$$\mathbf{d}(\theta) = \text{vec}(\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta) - M^{-1}\mathbf{I}) \quad (14)$$

et

$$\mathbf{R} = \int_{\Theta} \mathbf{d}(\theta)\mathbf{d}(\theta)^T g(\theta) d\theta. \quad (15)$$

Soit  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{L-1}$  les  $L-1$  plus grands vecteurs propres de  $\mathbf{R}$ . Les  $L$  matrices hermitiennes  $\mathbf{U}_1 = \text{unvec}(\mathbf{u}_1), \dots, \mathbf{U}_{L-1} = \text{unvec}(\mathbf{u}_{L-1}), \mathbf{U}_L = 1/\sqrt{M}\mathbf{I}$  forment une base orthonormée de  $\mathcal{E}$ .

*Remarque 1 :* En pratique, deux valeurs de  $g(\theta)$  dans (13) seront utilisées :  $g(\theta) = 1$  lorsque l'on dispose d'une expression analytique pour les vecteurs sources, et  $g(\theta) = \sum_i \delta(\theta - \theta_i)$  lorsque les vecteurs sources ont été mesurés en un ensemble discret de valeurs  $\theta_i$  du gisement comme dans le cas d'une calibration expérimentale de l'antenne.

*Démonstration :* cf. [4].

#### 3.2 Rectification

Supposons que la valeur de  $L$  a été choisie de sorte que la différence entre  $\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$  et  $\Pi[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)]$  est négligeable. Ainsi,  $\mathcal{E}$  contient toutes les matrices spectrales exactes, et la rectification de l'estimée  $\hat{\Gamma}_w$  (3) consiste en une projection dans  $\mathcal{E}$  :

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma} &= \Pi[\hat{\Gamma}_w] \\ &= \sum_{l=1}^L \underbrace{\text{tr}(\hat{\Gamma}_w \mathbf{U}_l)}_{\in \mathbb{R}} \mathbf{U}_l. \end{aligned} \quad (16)$$

*Remarque 2 :* Dans le cas de l'ALU, on montre facilement que le moyennage le long des diagonales de l'estimée  $\hat{\Gamma}_w$  de façon à la rendre Toeplitz se réduit à (16) avec  $L = 2M-1$  et des matrices hermitiennes  $\mathbf{U}_l$  appropriées.

#### 3.3 Détermination de la dimension de l'espace approximant $\mathcal{E}$

En projetant  $\hat{\Gamma}_w$  dans  $\mathcal{E}$ , la rectification diminue la variance des éléments de  $\hat{\Gamma}_w$ . Toutefois, cette opération biaise l'estimée quand  $\mathcal{E}$  ne contient pas exactement toutes les matrices  $\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$ . Nous proposons de choisir la dimension  $L$  de  $\mathcal{E}$  de sorte que le biais introduit par la rectification de  $\hat{\Gamma}_w$  soit très inférieur à l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) initiale de  $\hat{\Gamma}_w$ . Notons

$$\Delta_w = E[\|\Gamma_w - \Gamma\|_F^2] \quad (17)$$

l'EQM de l'estimateur non rectifié, et

$$\Delta_b = \|E[\hat{\Gamma}] - \Gamma\|_F^2$$

la norme au carré du biais de l'estimateur rectifié. On montre dans [4] que le rapport de  $\Delta_w$  et  $\Delta_b$  est borné par :

$$\frac{\Delta_b}{\Delta_w} \leq N \sup_{\theta} \|\Pi^{\perp}[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)]\|_F^2 \quad (18)$$

où la borne peut être atteinte pour certaines dispositions des sources. En pratique, la dimension  $L$  a été ajustée à la plus petite valeur pour laquelle  $N \sup_{\theta} \|\Pi^{\perp}[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)]\|_F^2 \leq 0.01$ .

## 4 EQM de l'estimée rectifiée

L'estimateur non rectifié  $\Gamma_w$  suit une loi de Wishart à  $N$  degrés de liberté, et l'on vérifie que son EQM vaut :

$$\begin{aligned}\Delta_w &= E[||\hat{\Gamma}_w - \Gamma||_F^2] \\ &= \frac{1}{N} \text{tr}(\Gamma)^2.\end{aligned}\quad (19)$$

De façon à vérifier l'amélioration apportée par la rectification, il est intéressant de calculer l'EQM  $\Delta_r$  de l'estimateur rectifié  $\hat{\Gamma}$  (16) :

$$\Delta_r = E[||\hat{\Gamma} - \Gamma||_F^2]. \quad (20)$$

On montre que cette EQM est donnée par :

$$\begin{aligned}\Delta_r &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \text{tr}(\Gamma \mathbf{U}_l \Gamma \mathbf{U}_l) + ||\Pi^\perp[\Gamma]||_F^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=1}^L \text{tr}(\Gamma \mathbf{U}_l \Gamma \mathbf{U}_l) + ||\Gamma||_F^2 - \sum_{l=1}^L \text{tr}(\Gamma \mathbf{U}_l)^2\end{aligned}\quad (21)$$

## 5 Simulations

Les simulations sont effectuées avec une antenne circulaire à  $M = 10$  capteurs, de rayon  $r = 0.7\lambda$  où  $\lambda$  est la longueur d'onde. Le rayon a été ajusté à la plus grande valeur compatible avec des lobes secondaires pas trop élevés. La dimension de l'espace des matrices hermitiennes vaut  $M^2 = 100$ . Le sous-espace  $\mathcal{E}$  a été déterminé en prenant  $g(\theta) = 1$  et  $\Theta = [0, 2\pi]$  dans les équations (13) et (15). La figure 3 montre la distance maximale entre les matrices  $\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)$  et le sous-espace  $\mathcal{E}$  en fonction de  $L = \dim \mathcal{E}$ . Cette distance chute brutalement pour  $L = 21$  où elle est égale à  $5 \cdot 10^{-5}$  : d'après le critère de choix du paragraphe 3.3, cette valeur de  $L$  convient à un nombre de données inférieur ou égal à  $N = 200$ . Ainsi,  $L = 21$  dimensions suffisent à représenter les matrices spectrales avec une grande précision alors que la dimension de  $\mathcal{H}$  est  $M^2 = 100$  ! La

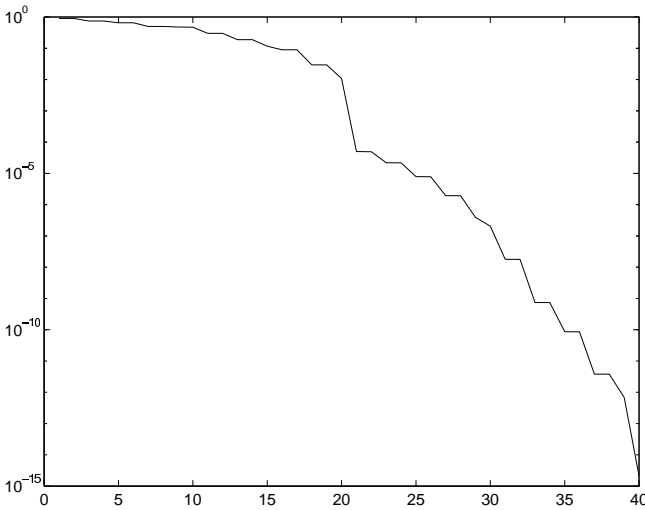


FIG. 3:  $\sup_{\theta} ||\Pi^\perp[\mathbf{a}(\theta)\mathbf{a}^H(\theta)]||_F^2$  en fonction de  $L$ .

simulation démontre les bénéfices du procédé de rectification avec  $L = 21$ . Il y a  $P = 2$  sources localisées à

$-10^\circ$  et  $10^\circ$ , chacune de rapport signal à bruit  $-7\text{dB}$ . Le nombre de données est  $N = 200$ . Les EQM  $\Delta_w$  (19) et  $\Delta_r$  (20) des estimateurs classiques et rectifiés de la matrice spectrale sont résumés dans la table 1 : la méthode proposée réduit l'EQM d'un facteur trois. Ceci se traduit par de meilleures performances des méthodes de localisation comme le montre la figure 4.

	EQM (théorique)	EQM (estimée)
Estimateur (eq. (19))	0.98	0.97
Estimateur rectifié (eq. (22))	0.27	0.27

TAB. 1: EQM des estimateurs rectifiés et non-rectifiés.

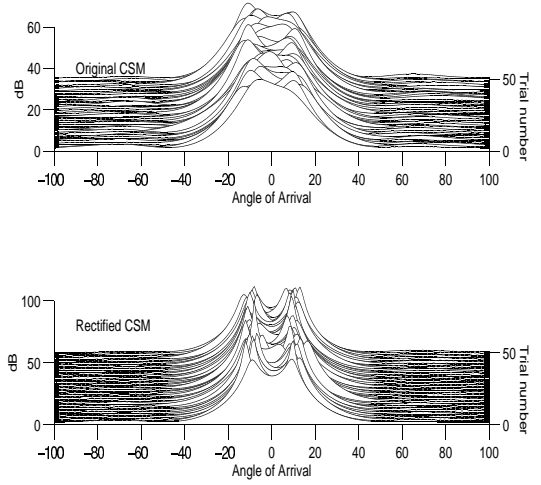


FIG. 4: MUSIC : matrices originales (courbes du haut), matrices rectifiées (courbes du bas).

## 6 Conclusions

Nous avons généralisé à des antennes quelconques une technique d'amélioration de la précision d'estimation des matrices spectrales habituellement utilisée pour les antennes linéaires uniformes. La validité de l'approche développée a été confirmée par les simulations.

## Références

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. New York : Dover.
- [2] W.S. Burdic. *Underwater Acoustic System Analysis*, Prentice-Hall, 1991.
- [3] E. Villier. *Contribution aux méthodes à sous-espace en traitement d'antenne*. PhD thesis, Université de Rennes I, 1995.
- [4] P. Forster et T. Asté. Rectification of Cross Spectral Matrices for Arrays of Arbitrary Geometry. In *Proc. ICASSP'99*, pages 2829-,2832 Phoenix, 1999.