

Interpolation statistique à partir d'un échantillonnage irrégulier pour la reconstruction d'images

A. Zergainoh, S. Hadjihassan and J.-P. Astruc

Laboratoire de Traitement et de Transport de l'Information,

Université de Paris Nord, Institut Galilée,

Avenue J. B. Clément, 93430 Villetaneuse, France

Anissa.Zergainoh@l2ti.univ-paris13.fr, Sevgui.Hadjihassan@l2ti.univ-paris13.fr, Jean-Pierre.Astruc@l2ti.univ-paris13.fr

Résumé – Dans cet article, nous proposons une méthode irréversible de compression de données, fondée sur le principe de sous-échantillonnage d'une grille d'image. Nous nous intéressons particulièrement aux problèmes de la reconstruction numérique d'images à partir de données dispersées irrégulièrement sous la contrainte de perte minimale d'information. L'estimation d'un pixel, localisé à un emplacement connu sur la grille d'image, est déterminée par une méthode basée sur les corrélations spatiales entre les pixels de l'image. Dans un premier temps, nous déterminons expérimentalement les corrélations spatiales entre les pixels de l'image. Celles-ci sont ensuite approximées par un modèle théorique de corrélation. Le processus de sous-échantillonnage irrégulier de l'image est réalisé par un algorithme d'optimisation des positions des pixels dans le but de réduire l'erreur quadratique moyenne due à la reconstruction.

Abstract – In this article, we propose a lossy data compression method based on an image grid subsampling operation. We are particularly interested in the problem of digital image reconstruction from scattered data under constraint of minimal information loss. The estimation of a pixel, located on a known position of the image grid, is determined by a method based on spatial correlations between pixels. First, spatial correlations between pixels are determined in an experimental way. Experimental correlations are then approximated by a theoretical spatial correlation model. The irregular subsampling process is realized by choosing the position of pixels, so as to reduce the mean square error due to the reconstruction.

1. Introduction

A ce jour, il existe deux classes d'algorithmes de reconstruction. La première concerne les algorithmes de sous-échantillonnage dans lesquels le procédé d'échantillonnage est indépendant de la méthode de reconstruction, par exemple le cas d'un échantillonnage régulier ([8]). La seconde classe se réfère aux algorithmes dans lesquels le sous-échantillonnage dépend de la méthode de reconstruction, *i.e.* les positions des pixels sont choisies afin de réduire l'erreur quadratique moyenne ([3, 5]).

L'opération de sous-échantillonnage consiste à extraire un nombre restreint de pixels sur la grille, réduisant ainsi l'espace mémoire nécessaire pour le stockage de l'image initiale.

Dans un premier temps nous nous sommes intéressés au problème de la reconstruction d'une image uniformément sous-échantillonnée. L'algorithme de reconstruction proposé est donc indépendant du processus de sous-échantillonnage, et la position des échantillons ne dépend pas du contenu de l'image. Lorsque nous ne retenons qu'un nombre très faible de pixels, uniformément répartis sur la grille (par exemple 4.9% de pixels retenus), nos résultats présentés dans l'article [8], ne sont pas satisfaisants comparés à ceux proposés par la référence [6]. En effet dans ces situations, le nombre de pixels portant

l'information est trop réduit. C'est pour cette raison qu'il est important de choisir judicieusement la position de chaque pixel.

Dans cet article, nous utilisons un échantillonnage irrégulier et une optimisation de la position des pixels à garder afin d'améliorer la performance de l'approche proposée. Les algorithmes de reconstruction proposés ont été simulés sur ordinateur et testés sur l'image standard de « Lena ». Pour différents pourcentages d'échantillons retenus sur l'image, nous avons évalué la perte globale d'information et nous l'avons comparée à des techniques existantes dans la littérature.

2. Méthode d'interpolation statistique

Une image en niveau de gris peut être vue comme une surface où la hauteur représente la luminance de l'image. Cette surface est modélisée par la réalisation d'un processus stochastique. Le processus est supposé stationnaire de deuxième ordre. Le premier et deuxième moments sont invariants par translation. Sa moyenne est constante et sa covariance est définie par :

$$Cov(x^i, x^j) = \sigma^2 Corr(x^i, x^j) \quad (1)$$

$Corr(x, x')$ correspond à la corrélation entre deux pixels i et j localisés respectivement en x^i et x^j sur la grille d'image. σ^2 représente la variance du processus.

L'estimation locale d'un pixel inconnu, situé à un emplacement spécifique sur la grille, est obtenue par une méthode statistique d'interpolation basée sur les corrélations spatiales entre les pixels. Elle joue le rôle d'une fonction de pondération bidimensionnelle. Cette méthode est connue sous le nom de krigeage.

Plusieurs modèles de krigeage sont disponibles : krigeage simple, krigeage ordinaire, krigeage intrinsèque, krigeage universel ([1, 4, 7]). C'est l'hypothèse de stationnarité qui différencie ces modèles.

Notre méthode de reconstruction est basée sur un traitement local. Dans ce cas, les contraintes de stationnarité du deuxième ordre du krigeage ordinaire sont supposées satisfaites. Pour ce modèle, la valeur inconnue est estimée par une combinaison linéaire pondérée des pixels disponibles :

$$\hat{y}(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y(x^i) \quad (2)$$

où $\hat{y}(x)$ représente la valeur estimée d'un pixel localisé en x , λ_i est le poids associé à un pixel $y(x^i)$ situé à la position x^i , et n le nombre de pixels voisins disponibles pour l'estimation de $\hat{y}(x)$.

Pour éviter une erreur systématique, la moyenne de l'erreur de prédiction, sous l'hypothèse stationnaire, doit être égale à zéro (condition de non biais) :

$$\begin{aligned} E\{\hat{y}(x) - y(x)\} &= \sum_i \lambda_i E\{y(x^i)\} - E\{y(x)\} \\ &= m \left(\sum_i \lambda_i - 1 \right) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

où m représente la moyenne de $y(x)$.

Le meilleur prédicteur linéaire non biaisé est obtenu en déterminant les λ_i qui minimisent :

$$EQM\{\hat{y}(x)\} = E\left\{ \sum_i \lambda_i y(x^i) - y(x) \right\}^2 \quad (4)$$

La minimisation de l'erreur moyenne quadratique (EMQ) est résolu par le formalisme de Lagrange. Ainsi, les poids λ_i sont calculés en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \sum_i \lambda_i Cov(x^i, x^j) + \mu = Cov(x^j, x), \quad \forall j \\ \sum_i \lambda_i = 1 \end{cases} \quad (5)$$

où μ est un multiplicateur de Lagrange.

Notons que le modèle de covariance théorique est choisi après l'analyse structurale ([8]). Son choix est très important puisqu'il affecte la qualité visuelle de l'image reconstruite. Le modèle théorique de la fonction de covariance pourrait être linéaire, sphérique, exponentiel, ou Gaussian. L'analyse de la fonction de covariance expérimentale a fait l'objet de nombreuses simulations sur des images de tailles différentes. Nous avons constaté qu'il nous suffit de deux à trois pixels voisins (les plus proches) pour reconstruire un pixel inconnu. Augmenter le nombre de voisins n'améliore pas la qualité visuelle de la reconstruction de l'image, mais en contre partie augmente le temps de calcul. Pour un faible nombre d'échantillons voisins utilisés lors de la reconstruction de l'image, c'est le modèle théorique linéaire

qui approxime convenablement la fonction de covariance expérimentale ([8]).

3. Opération de sous-échantillonnage irrégulier de l'image

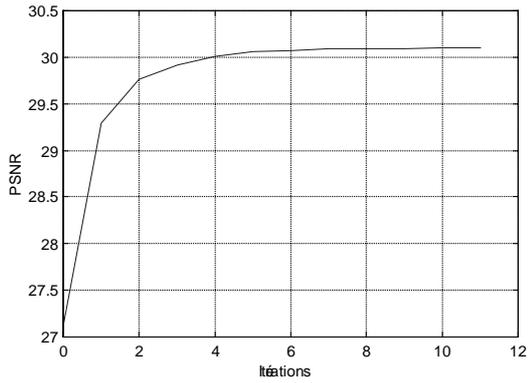
Pour un nombre très faible de pixels sélectionnés sur l'image, il est nécessaire d'optimiser leurs positions. Tout d'abord, nous répartissons uniformément sur la grille de l'image un très faible nombre de pixels. L'algorithme de reconstruction basé sur les corrélations spatiales est appliqué sur cette grille sous-échantillonnée. La phase suivante, dite d'insertion, consiste à chercher le pixel reconstruit qui engendre l'erreur d'estimation la plus importante. La valeur correspondante à ce pixel, repéré sur l'image originelle, est ensuite inséré sur l'image sous-échantillonnée à la même position. Le processus d'insertion est itéré jusqu'à atteindre le nombre total de pixels que nous désirons garder. Une deuxième opération d'ajustement des positions des pixels est nécessaire. En effet, les premiers pixels répartis uniformément sur la grille ne sont pas placés forcément à leurs positions optimales. C'est pourquoi chaque échantillon appartenant à la grille irrégulière subira huit déplacements (pas de 1 dans toutes les directions) autour de sa position initiale. Pour chaque nouvelle position de cet échantillon une nouvelle approximation de la surface locale, affectée par ce changement de position, est effectuée. Parmi les huit positions considérées, nous conservons celle pour laquelle l'erreur quadratique moyenne cumulée sur la surface locale est minimale. Ainsi, nous traitons tous les échantillons disponibles sur la grille irrégulière de l'image. L'opération de choix de la position optimale des échantillons retenus est effectué plusieurs fois sur l'image entière. L'algorithme converge vers une erreur quadratique moyenne stable au bout de quelques itérations.

4. Résultats expérimentaux

Les algorithmes de reconstruction ont été simulés sur PC sous l'environnement Matlab. Nous avons travaillé sur l'image standard de « Lena (256*256) ».

Notons η le nombre en pourcent de pixels retenus sur l'image originelle. La Table (TAB. 1) présente le rapport signal à bruit (PSNR) associé à chaque valeur de η .

Dans le cas d'un échantillonnage non optimisé (uniforme ou aléatoire), pour des valeurs de η supérieures ou égales à 11%, notre méthode apporte une amélioration de la qualité visuelle de l'image reconstruite, comparée aux résultats obtenus dans la référence [6]. Pour un échantillonnage irrégulier optimisé, avec η faible (par exemple 4.9%), nous obtenons au bout de six itérations (voir FIG. 1) un PSNR comparable à celui fourni par l'algorithme de Shepard modifié [6] (sans introduire l'anisotropie).



TAB. 1 : Résultats expérimentaux

η (pixels retenus sur la grille de l'image initiale en %)	PSNR (en dB)
Echantillonnage uniforme	
25%	28.97
11%	25.89
4.9%	22.66
Echantillonnage irrégulier optimisé	
4.9%	30.1

FIG. 1 : PSNR (dB) en fonction du nombre d'itérations

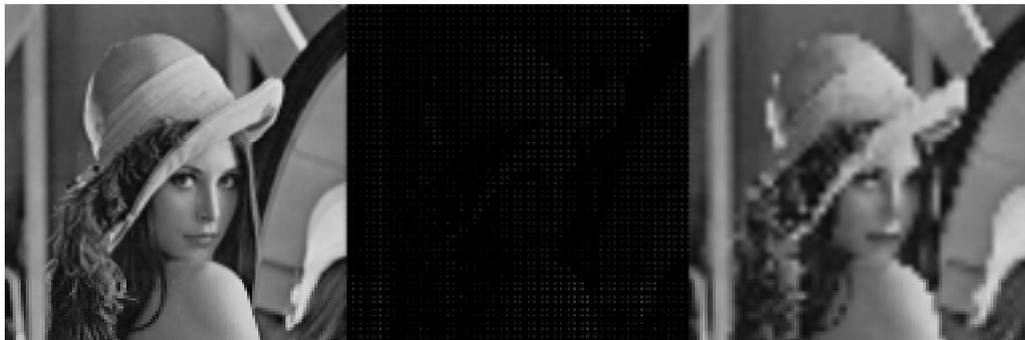


FIG. 2 : Reconstruction de « Lena (256*256) » à partir d'un échantillonnage uniforme ($PSNR=22.66dB$)



FIG. 3 : Reconstruction de « Lena » à partir d'un échantillonnage optimisé (après la phase d'insertion) ($PSNR=27.13dB$)



FIG. 4 : Reconstruction à partir d'un échantillonnage optimisé par déplacement des pixels (après 3 itérations) ($PSNR=29.92dB$)

Chacune des trois figures présentées ci dessus, « FIG. 2, FIG. 3 et FIG. 4 », est constituée de trois images. La première est l'image originelle de « Lena (256*256) », la deuxième représente la grille de l'image sous-échantillonnée et la troisième correspond à l'image reconstruite par l'algorithme d'interpolation statistique. Ces exemples sont proposés pour un échantillonnage de 4.9% de pixels.

La figure (FIG. 2) présente la reconstruction de l'image à partir d'un sous-échantillonnage uniforme de la grille.

La figure (FIG. 3) présente l'image reconstruite à partir d'un sous-échantillonnage irrégulier. Celui ci est obtenu par les opérations suivantes :

- 1- Répartition uniforme d'un très faible nombre de pixels ($\ll 4.9\%$) sur la grille,
- 2- Sélection pertinente des pixels à insérer, sur la grille uniforme construite en 1, jusqu'à atteindre un échantillonnage de 4.9% de pixels (voir paragraphe 3, phase d'insertion).

La grille irrégulière obtenue est présentée par la deuxième image de la figure FIG. 3.

La figure (FIG. 4) présente l'image reconstruite après avoir optimisé les positions des pixels. Cette optimisation est réalisée sur la grille irrégulière de la figure FIG. 3.

Nous constatons que l'échantillonnage irrégulier nous a apporté un gain de 8dB par rapport à l'échantillonnage uniforme. La qualité visuelle de l'image reconstruite est ainsi améliorée.

Le PSNR obtenu à partir de notre méthode n'est pas comparé au résultat fourni par le nouvel algorithme d'interpolation auquel la propriété d'anisotropie a été introduite ([6]). En effet, notre algorithme présente des propriétés d'isotropie. Nous comptons, pour des investigations futures, introduire ce caractère d'anisotropie afin d'améliorer la performance de l'approche proposée. Nous pouvons également introduire des modèles non stationnaires (krigeage universel), dans le cas d'échantillons voisins très éloignés. Dans notre étude nous n'avons pas encore considéré le problème de codage. Cet aspect fera l'objet d'une prochaine étude (méthode de compression hybride).

Références

- [1] P. Chauvet, Aide mémoire de géostatistique linéaire, Ecole des mines de Paris, 1994.
- [2] R. Franke and G. Nielson, Smooth interpolation of large sets of scattered data, Int. J. of Numerical methods in Engineering, Vol. 15, January 1980, pp. 1691-1704.
- [3] C. H. Lee, Image surface approximation with irregular samples, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 11, number 2, February 1989, pp. 206-212.
- [4] J. Lefevre, H. Roussel, E. Walter, D. Lecointe, and Tabbara, Prediction from wrong models: the kriging approach, *IEEE Antennas and propagation Magazine*, Vol. 38, No 4, August 1996, pp. 35-45.

[5] H. Le Floch, C. Labit, Irregular image sub-sampling and reconstruction by adaptive sampling, *Proc. ICIP-96*, vol. 3, pp.379-382.

[6] H. Le Floch, Echantillonnage irrégulier et interpolation: application à la représentation d'images fixes et animées. Thèse de doctorat de l'Université de Rennes 1, Décembre 1997.

[7] J. Sacks, W. J. Welch, T. J. Mitchell and H. P. Wynn, Design and analysis of computer experiments, *Statistical Science*, vol. 4, no. 4, 1989, pp. 409-435.

[8] A. Zergaïnoh, S. Hadjihassan and J.-P. Astruc, Image Data Reconstruction using Spatial Correlations, *ICOMT'98*, pp. 25-30.