

# Méthode de correction d'atténuation en imagerie SPECT 3D basée sur les conditions de rang de la transformée exponentielle

Catherine MENNESSIER<sup>1</sup>, Frédéric Noo<sup>2</sup>, Rolf CLACKDOYLE<sup>3</sup>, Laurent DESBAT<sup>1</sup>

<sup>1</sup>TIMC-IMAG

IAB, Faculté de médecine, 38706 La Tronche Cedex, FRANCE

<sup>2</sup>Montefiore

B28 Université de Liège, B-4000 Liège, BELGIQUE,

<sup>3</sup>MIRL

729 Arrapeen Drive University of Utah, SLC, UT 84108-1218

Catherine.Menessier@imag.fr, noo@montefiore.ulg.ac.be,

rolf@doug.med.utah.edu, Laurent.Desbat@imag.fr

**Résumé** – La reconstruction de l'activité, en imagerie nucléaire, nécessite, pour qu'elle soit quantitative, une correction de l'atténuation subit par les photons émis, due au milieu traversé (par exemple les tissus et os du corps). Une méthode, basée sur les conditions de rang de la transformée exponentielle tridimensionnelle (3D), est proposée pour compenser des effets de l'atténuation. Elle ne nécessite pas d'images scanner qui serviraient à connaître la fonction d'atténuation. Par ailleurs, elle permet de considérer toutes les géométries SPECT 3-D, parallèles. Cette méthode a été mise en oeuvre pour la reconstruction de données RSH SPECT. À notre connaissance, elle est la première tentative d'utilisation des conditions de rang pour la correction d'atténuation en imagerie pleinement 3D.

**Abstract** – In order to perform a quantitative reconstruction from SPECT data, attenuation correction must be done. Using data consistency conditions for the exponential ray transform, a method is derived to correct SPECT data for attenuation effects. No transmission measurements are required, and no operator-defined contours are needed. Furthermore, any 3-D parallel-ray geometry can be considered for SPECT data acquisition. Geometries which do not lead to a set of 2-D parallel-beam sinograms are here admissible. In particular, the method is applied for a particular 3-D case, called *the rotating slant hole geometry*.

## 1 Introduction

Pour un système scanner SPECT, la sensibilité aux photons émis est une qualité fondamentale. Pour accroître celle-ci, l'Université d'Utah s'est doté d'un scanner de géométrie Rotating Slant Hole (RSH). Nous ne détaillerons pas ici cette géométrie mais retiendrons (i) qu'elle est intrinsèquement 3D (il n'existe pas de plans contenant un ensemble complet de mesures 2D) (ii) que les techniques de reconstruction 3D pour les géométries parallèles, peuvent lui être adaptées [5].

L'imagerie SPECT nécessite, pour être quantitative, que soit prise en compte, lors de la reconstruction, les effets d'atténuation dus au milieu traversé par les photons, avant leur détection. Deux approches sont possibles.

La première [7, 12] consiste à effectuer au préalable une reconstruction scanner afin d'identifier la fonction d'atténuation. Par la suite, une méthode itérative, basée sur la définition de l'opérateur de Transformée en Rayon-X Atténuée (TRA), est mise en oeuvre pour reconstruire la fonction d'émission.

La seconde consiste à n'utiliser que des données SPECT. Des techniques itératives basées également sur la définition de l'opérateur TRA, ont parfois été proposées. Les inconnues sont alors les deux fonctions : atténuation et émission [4, 3, 6]. La non linéarité des équations rend dif-

ficile ce problème et d'aucuns reconnaissent la difficulté de cette méthode à reconstruire correctement l'atténuation.

Une autre alternative, utilisant aussi uniquement les mesures SPECT, exploite les conditions de rang de l'opérateur TRA, pour identifier l'atténuation. L'activité est ensuite reconstruite par des méthodes classiques. Cette procédure a l'avantage d'être simple. Elle a été appliquée avec succès sur des données réelles [11, 13, 8]. Pour la stabilité numérique, l'atténuation est alors décrite par un petit nombre de paramètres. La principale limite de cette approche est que les conditions de rang de l'opérateur TRA ne sont connues qu'en 2D. L'objectif de ce travail est de généraliser en 3D les principes de la méthode expliquée ci-dessus. Pour ce faire, nous utiliserons les conditions de rang de la Transformée en Rayon-X Exponentielle (TRE), dont une expression très simple a été établie par Aguilar [1]. Ces conditions sont nécessaires, suffisantes et se généralisent facilement à toute géométrie 3D [2] parallèle, telle la géométrie RSH.

Le principe de la méthode est exposé section 2. Des simulations numériques, pour la géométrie RSH SPECT, sont présentées section 3.

## 2 Principe

Pour la clarté de l'exposé, nous présentons la méthode dans le cas 2D mais elle s'adapte à toutes les géométries 3D parallèles [10].

Désignons respectivement par  $f(\underline{x})$  et  $\mu(\underline{x})$ , les fonctions d'émission et d'atténuation, où  $\underline{x}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . L'équation qui lie les données  $a(s, \underline{\theta})$  aux inconnues  $f$  et  $\mu$ , peut être modélisée par la transformée de Radon atténuée<sup>1</sup> :

$$a(s, \underline{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} dt f(s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^\perp) e^{\int_{\mathbb{R}} d\tau \mu(s\underline{\theta} + (t+\tau)\underline{\theta}^\perp)}, \quad (1)$$

où,  $S^1$  désignant la sphère unité,  $(s, \underline{\theta}) \in (\mathbb{R}, S^1)$ ,  $\underline{\theta} = (\sin \theta, \cos \theta)$  et  $\underline{\theta}^\perp = (-\sin \theta, \cos \theta)$ . On montre [9] que, si le support de  $f$  est contenu dans un convexe où l'atténuation est constante et vaut  $\mu_0$ , alors la normalisation :

$$g(s, \underline{\theta}) = a(s, \underline{\theta}) e^{\int_{\mathbb{R}} d\tau \mu(\underline{\theta} + t\underline{\theta}^\perp)}, \quad (2)$$

transforme les données TRA en des données TRE :

$$g(s, \underline{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} dt f(s\underline{\theta} + t\underline{\theta}^\perp) e^{\mu_0 t} \quad (3)$$

Explicitons maintenant les conditions de rang de l'opérateur TRE. Soit  $\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta})$ , la transformée de Laplace bilatérale (TLB) de  $g(s, \underline{\theta})$  :

$$\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta}) = \int_{\mathbb{R}} ds g(s, \underline{\theta}) e^{s\sigma} \quad (4)$$

et soit  $\mathcal{F}(\underline{\sigma})$  la TLB de  $f(\underline{x})$  :

$$\mathcal{F}(\underline{\sigma}) = \int \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x} f(\underline{x}) e^{\underline{x} \cdot \underline{\sigma}}. \quad (5)$$

On notera que, si  $f$  est localement intégrable et à support compact, alors  $g$  est à support compact, et par conséquent,  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{F}$  existent. En substituant (3) dans l'équation (4) on obtient :

$$\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta}) = \int \int_{\mathbb{R}^2} d\underline{x} f(\underline{x}) e^{\underline{x} \cdot (\sigma \underline{\theta} + \mu_0 \underline{\theta}^\perp)} \quad (6)$$

$$= \mathcal{F}(\sigma \underline{\theta} + \mu_0 \underline{\theta}^\perp). \quad (7)$$

Cette équation définit un théorème coupe projection : la TLB 1D des mesures TRE est identique à la TLB 2D de la fonction d'émission le long de la droite de vecteur directeur  $\underline{\theta}$  et à une distance  $\mu_0$  de l'origine. Les conditions de rang en découlent : si  $\mu_0 \neq 0$ , toute valeur  $\mathcal{F}(\underline{\sigma})$  peut être atteinte par deux projections  $g(s, \underline{\theta})$  différentes, en considérant les deux droites passant par  $\underline{\sigma}$  qui sont tangentes au cercle de rayon  $\mu_0$ , voir figure 1. Mathématiquement, ces conditions s'écrivent :

Soit  $\underline{\sigma}$  un point de  $\mathbb{R}^2$  extérieur au cercle de rayon  $\mu_0$  ( $|\underline{\sigma}| > \mu_0$ ). La TLB  $\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta})$ , des données TRE, sont égales en les deux paires  $(\sigma_1, \underline{\theta}_1)$  et  $(\sigma_2, \underline{\theta}_2)$  qui vérifient :

$$\underline{\sigma} = \sigma_1 \underline{\theta}_1 + \mu_0 \underline{\theta}_1^\perp = \sigma_2 \underline{\theta}_2 + \mu_0 \underline{\theta}_2^\perp. \quad (8)$$

On montre et on peut voir sur la figure 1, que  $\sigma_1 = -\sigma_2$ .

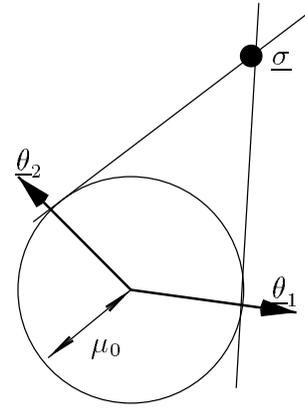


FIG. 1: Conditions de rang de l'opérateur TRE :  $\underline{\sigma}$  peut être atteint par deux projections.

En écrivant la fonctionnelle à minimiser, comme somme des différences relatives entre les valeurs  $\mathcal{G}(\sigma, \theta)$  qui doivent être égales :

$$F(\mu) = \sum_{i,j,\sigma} \frac{(\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta}_i) - \mathcal{G}(-\sigma, \underline{\theta}_j))^2}{(\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta}_i) + \mathcal{G}(-\sigma, \underline{\theta}_j))^2}, \quad (9)$$

ces conditions conduisent à un système d'équations liant les données  $a(s, \underline{\theta})$  à l'atténuation  $\mu(\underline{x})$  (via la normalisation (2)) sans faire intervenir l'activité  $f(\underline{x})$ .

Notons que nous cherchons moins à identifier  $\mu(\underline{x})$  qu'à obtenir des mesures TRE, à partir desquelles on pourra reconstruire l'émission  $f(\underline{x})$ . Dans la pratique, on constate qu'une modélisation simple de  $\mu(\underline{x})$  est suffisante pour rendre compte des effets d'atténuation sur les données SPECT. Ainsi nous cherchons  $\mu(\underline{x})$  constante à l'intérieur d'une ellipse, qui permette de transformer les mesures TRA en une bonne approximation de mesures TRE, via (2). Nous avons mis en oeuvre une méthode itérative qui identifie les 5 paramètres de l'ellipse (le coefficient  $\mu_0$  étant un des 5 paramètres). Nous notons  $\mu_\epsilon(\underline{x})$  la fonction d'atténuation définie à travers les paramètres de l'ellipse. Chaque itération comprend les quatre étapes suivantes :

1. Calcul des données  $g(s, \underline{\theta})$  selon (2)
2. Calcul de la TLB  $\mathcal{G}(\sigma, \underline{\theta})$  d'après (4)
3. Calcul de la fonctionnelle  $F(\mu_\epsilon)$  selon (9)
4. Mise à jour des 5 paramètres de l'ellipse

## 3 Résultats et discussion

Nous avons simulés des données pour la géométrie 3D RSH. La fonction d'émission se composait de deux boules. La fonction d'atténuation était nulle en dehors d'un ellipsoïde à l'intérieur duquel elle était constante. Les résultats de la simulation sont illustrés sur la figure. Ils montrent (i) que l'activité reconstruite avec notre approche ne présente plus les erreurs importantes qui se produisent si l'atténuation n'est prise en compte, (ii) que les deux cartes reconstruites, soit en considérant l'atténuation connue, soit en utilisant les conditions de rang, sont très similaires.

Les résultats restent pertinents pour des fonctions d'atténuation plus complexes. Nous chercherons cependant à

<sup>1</sup> En 2D, la transformée de Radon atténuée se confond avec l'opérateur TRA

étendre la classe des fonctions constantes sur un ellipsoïde à la classe des fonctions constantes à l'intérieur d'un domaine pouvant être décrit avec un faible nombre de paramètres (par exemple en utilisant des courbes splines).

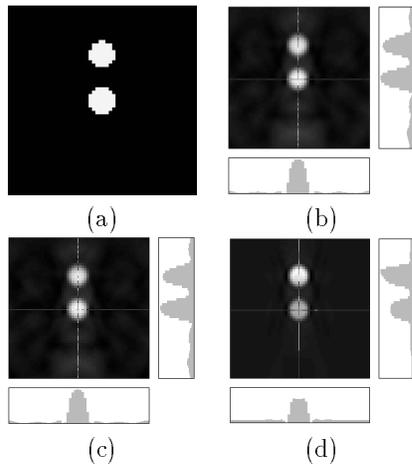


FIG. 2: Résultat des simulations en géométrie RSH: fonction d'émission (a) simulée, (b) estimée si  $\mu(\underline{x})$  est connue, (c) estimée d'après les conditions de rang, (d) estimée sans correction d'atténuation.

Nous avons proposé une nouvelle méthode de correction d'atténuation, pour l'imagerie SPECT 3D, qui ne requiert pas de mesures par transmission. Celle-ci a été appliquée à la géométrie 3D, RSH SPECT. Les résultats de nos travaux sont décrits dans [10]

## Références

- [1] V. Aguilar, L. Ehrenpresì, and P. Kuchment. Range conditions for the exponential Radon transform. *Journal d'Analyse Mathématique*, LXVIII:1–13, 1996.
- [2] V. Aguilar and P. Kuchment. Range conditions for the multidimensional exponential x-ray transform. *Inverse Problems*, 11:977–982, 1995.
- [3] A. Bronnikov. Approximate reconstruction of attenuation map in SPECT imaging. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, 42(5):1483–1488, 1995.
- [4] Y. Censor, D. Gustafson, A. Lent, and H. Tuy. A new approach to the emission computerized tomography problem: simultaneous calculation of attenuation and activity coefficients. *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-26(2):2775–2779, 1979.
- [5] R. Clack, P. Christian, M. Defrise, and A. Welch. Image reconstruction for a novel SPECT system with rotating slant-hole collimators. In *Conf. Rec. 1995 IEEE Med. Imag. Conf.*, pages 1948–1952, 1996.
- [6] V. Dicken. *Simultaneous activity and attenuation reconstruction in Single Photon Emission Computed Tomography, a non linear ill-posed problem*. PhD thesis, Universität Potsdam, Germany, 1998.
- [7] G. Gullberg, R. Huesman, J. Malko, N. Pelc, and T. Budinger. An attenuated projector-backprojector

for iterative SPECT reconstruction. *Phys. Med. Biol.*, 30:799–816, 1985.

- [8] I. Laurette, A. Welch, F. Natterer, R. Clackdoyle, and G. Gullberg. Comparison of three applications for contrast. In *Conf. Rec. 1998 IEEE Med. Imag. Conf. (to appear)*, 1999.
- [9] A. Markoe. Fourier inversion of the attenuated x-ray transform. *SIAM J. Math. Anal.*, 15(4):718–722, 1984.
- [10] C. Mennessier, F. Noo, and R. Clackdoyle. Attenuation correction for RSH SPECT scanner using consistency conditions for the exponential ray transform (soumis). *Conf. Record, 3D99 (submitted)*, 1999.
- [11] F. Natterer. Determination of tissue attenuation in emission tomography of optically dense media. *Inverse Problems*, 9:731–736, 1993.
- [12] B. Tsui, G. Gullberg, E. Edgerton, J. B. JG, J. P. JR, W. McCartney, and J. Berg. Correction of non-uniform attenuation in cardiac SPECT imaging. *J. Nucl. Med.*, 30:497–507, 1989.
- [13] A. Welch, R. Clack, F. Natterer, and G. Gullberg. Toward Accurate Attenuation Correction in SPECT without transmission measurement. *IEEE Trans. on Med. Imag.*, 16(5):532–541, 1997.

