

# Approche min-max pour la recherche d'un chemin optimal

O. Laviaille<sup>1,2</sup>, F. Angella<sup>1</sup>, P. Baylou<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Equipe Signal/Image ENSERB-Université de Bordeaux I  
BP 99, 33402 Talence Cedex, France

<sup>2</sup>ENITA de Bordeaux  
1 Cours de général de Gaulle 33175 Gradignan cedex - France,

o-laviaille@enitab.fr, angella@tsi.u-bordeaux.fr, baylou@tsi.u-bordeaux.fr

**Résumé** – Nous présentons une approche permettant de retrouver la structure d'objets arborescents dans une image en niveau de gris. Notre méthode s'appuie sur une extension de la recherche du chemin d'énergie minimale entre deux sites. Dans le but d'améliorer les résultats obtenus dans le cas d'objets très incurvés, nous proposons de modifier la fonction d'énergie de manière à la rendre indépendante de la longueur du chemin. Nous montrons ensuite l'équivalence entre la formulation min-max que nous proposons et une correction du potentiel en chaque point. Enfin, nous proposons une formulation globale de l'énergie qui consiste à pénaliser les potentiels supérieurs au potentiel min-max. L'approche sera illustrée par des résultats obtenus sur des images aériennes.

**Abstract** – In this paper, a generalization of the notion of minimal path is presented in order to retrieve the structure of tree-like objects when using grayscale images. More particularly, we extend the notion of minimal energy path between two pixels. As the energy function does not strictly increase with the distance, the path propagates inside the object, even with a curved object. Then, we discuss the equivalence between the proposed min-max formulation and an approach that consists in correcting the potential in each site. Finally, we will show the results obtained on aerial images.

## 1. Introduction

La recherche de la structure d'un objet contenu dans une image est un problème très classique. De nombreuses approches fondées sur des outils de morphologie mathématique ont notamment été utilisées pour extraire le squelette d'objets dans des images binaires ou en niveaux de gris [3]. D'autres travaux ont été menés dans le cadre d'applications spécifiques, en particulier dans les domaines de l'imagerie aérienne d'une part et de l'imagerie biomédicale d'autre part ; l'objectif étant, dans les deux cas, le suivi et la caractérisation d'objets linéaires ou arborescents tels que des systèmes de vaisseaux sanguins ou des réseaux routiers. En ce qui concerne la détection des routes, des approches fondées sur la programmation dynamique ont conduit à de bons résultats [4][8].

Plus récemment, une méthode utilisant un système particulaire réagissant comme un modèle déformable a été proposée [1] ; elle permet d'extraire le squelette d'un objet arborescent ne nécessitant que le choix manuel du point de départ des particules.

Cohen et Kimmel[2] proposent une nouvelle formulation de la recherche d'un chemin d'énergie optimum qui met en évidence les liens existant avec un modèle déformable classique. Un nouvel algorithme de programmation dynamique est utilisé [7] pour rechercher la solution optimale.

Dans une première partie, après avoir explicité notre problématique, nous reprendrons la formulation proposée en

[2] puis nous l'étendrons en introduisant une correction du potentiel initial de l'image qui nous permettra d'améliorer sensiblement la solution de base dans le cas d'un objet incurvé.

Dans un deuxième temps, nous montrerons l'équivalence de notre formulation avec la recherche du chemin minimisant le maximum de potentiel.

Une nouvelle formulation de l'énergie sera ensuite proposée. Elle permettra de regrouper des fonctions du potentiel dépendantes ou non de la longueur des chemins.

## 2. Position du problème

La figure 1 présente un objet arborescent (en sombre) dont nous voulons extraire la structure. Dans ce papier, nous considérerons ce problème comme celui de la recherche d'un chemin géodésique optimal entre deux points a et b de l'objet.

Dans [2], Cohen et Kimmel proposent de trouver la courbe C qui minimise la fonction d'énergie :

$$E(C) = \int_0^{L(C)} [\omega + P(C(s))] ds \quad (1)$$

où P est le potentiel défini en chaque pixel de l'image. En considérant C comme un modèle déformable, P est le potentiel associé aux forces externes. s est l'abscisse curviligne de la courbe C de longueur L(C).

Enfin  $\omega$  est un paramètre qui contrôle la régularisation de la courbe. En effet, une augmentation de  $\omega$  permet de favoriser les courbes de faible longueur de sorte que si  $\omega$  est trop élevé, la courbe devient rectiligne et indépendante des données.

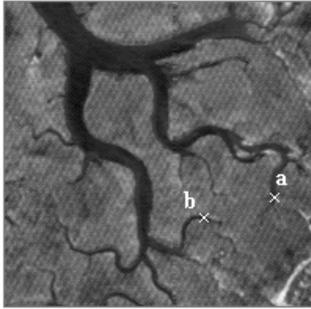


FIG. 1 : Objet arborescent.  
où a et b sont les deux extrémités à relier

L'algorithme repose sur le calcul préalable de l'image d'énergie en définissant un des deux pixels comme point de départ et en utilisant la "Fast Marching Method" de Sethian [7]. Dans un second temps, la courbe optimum est construite en partant du point d'arrivée et en utilisant une simple descente de gradient sur l'image d'énergie.

Dans le cas de la recherche de la courbe optimale entre les points a et b de la figure 1, admettons que le potentiel soit simplement défini par le niveau de gris du pixel. Pour forcer la courbe solution à s'inscrire dans l'objet nous fixons la constante de régularisation  $\omega$  à 0. La figure 2 montre l'image d'énergie obtenue à partir du site a ainsi que le chemin optimum correspondant.

La mauvaise qualité du résultat (même lorsque  $\omega = 0$ ) s'explique par le fait que la fonction d'énergie est dépendante de la longueur du chemin. Dans le cas de deux extrémités très proches au sens euclidien mais éloignées au sens géodésique, la minimisation de l'énergie définie en (1) conduit à une solution erronée.

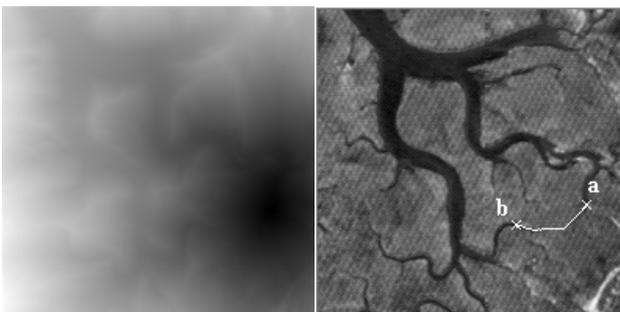


FIG. 2 : Image d'énergie et chemin optimum entre les deux extrémités.

Il est évident qu'une modification du potentiel initial permettant une très forte amplification de l'écart entre les pixels de l'objet et du fond permettrait de parvenir à une bonne solution. Notons d'ailleurs que c'est la recherche de la définition d'un potentiel pertinent qui a motivé un certain

nombre de travaux concernant l'amélioration des détecteurs de lignes en imagerie aérienne [6].

### 3. Recherche d'une solution min-max

#### 3.1 Correction de potentiel

L'idée naturelle permettant de forcer la courbe à s'inscrire dans l'objet est d'affecter un potentiel nul aux pixels qui peuvent être considérés avec une forte probabilité comme des pixels objets. Pour cela, nous introduisons une correction du potentiel initial :

$$E(C) = \int_0^{L(C)} P'(C(s)) ds \quad (2)$$

où  $P'(C(s)) = \max(P(C(s)) - \psi ; 0)$

où  $\psi$  est une constante

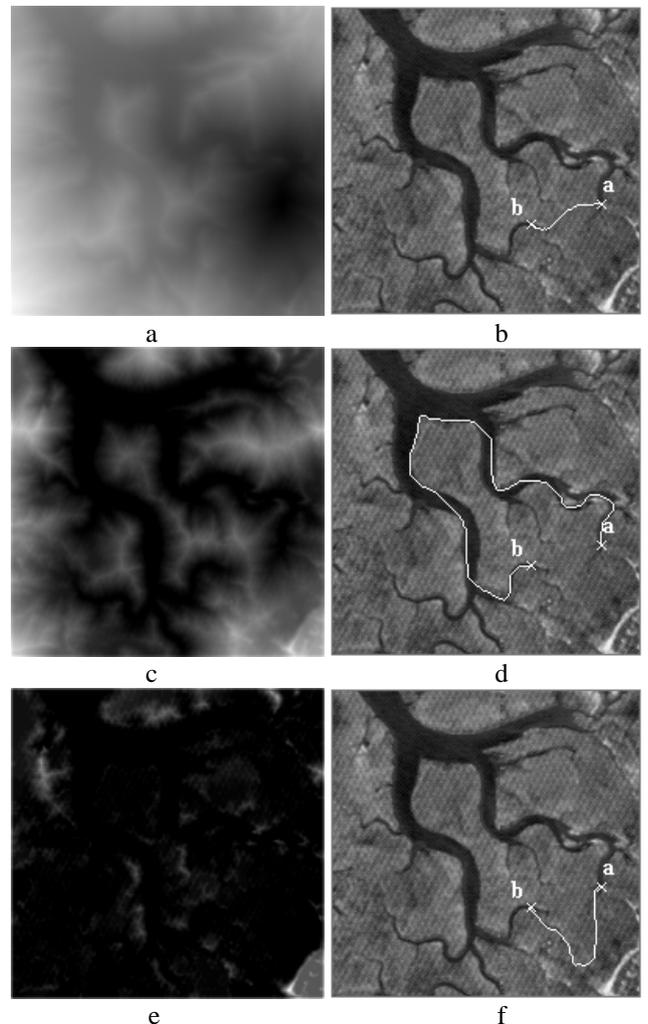


FIG. 3 : Images d'énergie et chemin optimum pour différents ajustements du potentiel :  
a) et b)  $\psi = 20$ , c) et d)  $\psi = 60$ , e) et f)  $\psi = 100$

L'utilisation de (2) peut être simplement interprétée comme l'utilisation d'un prétraitement de l'image destiné à fixer le potentiel pour une utilisation classique de la fonction d'énergie.

La figure 3 montre les solutions obtenues avec différentes valeurs de  $\psi$ . Le choix de la constante a évidemment une grande influence sur la solution minimisant (2). Une faible valeur de  $\psi$  conduit à une solution proche de la solution fournie par l'utilisation du potentiel initial ; une trop forte valeur tend à gommer les différences de potentiel.

### 3.2 Approche min-max

L'objectif étant la recherche d'une courbe inscrite dans l'objet, nous proposons d'éviter le délicat problème du choix de  $\psi$  en minimisant :

$$E(C) = \left[ \max_s (P(C(s))) \right] \quad (3)$$

Notons  $C_0$  la solution de :

$$C_0 = \arg \min_C \left[ \max_s (P(C(s))) \right] \quad (4)$$

La recherche du chemin min-max se fait en deux temps. Une image d'énergie est calculée à partir du pixel de départ a ; le chemin optimal est ensuite construit depuis le point d'arrivée b par une descente de gradient sur l'image d'énergie. L'équivalence entre les courbes obtenues de a à b et de b à a est garantie en corrigeant l'énergie  $U(i,j)$  des pixels (i,j) avant la descente:

$$U'(i, j) = \max(U(i, j) - \psi_0; 0) \quad (5)$$

où  $\psi_0 = E(C_0)$

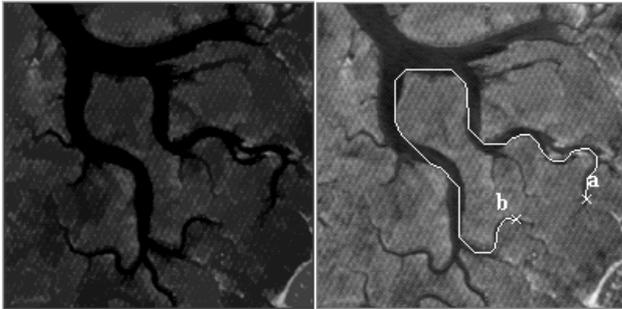


FIG. 4 : Image d'énergie et solution de l'approche min-max ( $\psi_0 = 58$ )

L'image d'énergie et la courbe obtenue en utilisant l'approche min-max sont présentées à la figure 4. Il y a parfaite équivalence entre cette solution et la solution obtenue par la minimisation de (2) en fixant  $\psi = \psi_0$ .

### 3.3 Nouvelle formulation de l'énergie pour la recherche du chemin optimum.

L'utilisation de l'approche min-max conduit à des problèmes de robustesse de la solution.

Une approche qui consiste à minimiser le  $k^{\text{ième}}$  maximum a été envisagée. Cependant, la mise en œuvre de cette solution plus robuste réclame en contrepartie une forte augmentation de l'espace mémoire nécessaire.

Ici, nous proposons de généraliser la fonction d'énergie en agrégeant les approches formulées en (1) et (3). Nous cherchons donc à minimiser :

$$E(C) = \lambda_1 \int_0^{L(C)} [\omega + P(C(s))] ds + \lambda_2 \max_s [P(C(s))] \quad (6)$$

Pour assurer l'unicité du chemin quel que soit le sens de parcours, (6) est reformulée par :

$$E(C) = \int_0^{L(C)} \left[ \lambda_1 \times [\omega + P(C(s))] + \lambda_2 \max(P(C(s)) - \psi_0; 0) \right] ds \quad (7)$$

L'approche proposée consiste donc à ajouter une pénalisation au potentiel d'un pixel si son potentiel initial est supérieur au potentiel min-max.  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les poids affectés respectivement au potentiel de base et à la pénalisation min-max.

## 4. Résultats

Dans cette section nous présentons dans un premier temps des résultats obtenus sur des images aériennes dans le cadre de la recherche du chemin d'énergie minimum. Nous comparons les résultats obtenus entre l'approche classique de minimisation de l'énergie formulée en (1) et la nouvelle approche proposée (7).

Dans un second temps, nous présentons des résultats relatifs à la recherche de l'arborescence d'énergie minimum. Cette approche consiste à retrouver la structure d'un objet arborescent en utilisant les fonctions d'énergie présentées dans cet article.

### 4.1 Recherche du chemin d'énergie minimum

Les figures 5 et 6 représentent les solutions obtenues, d'une part en utilisant la formulation classique de l'énergie énoncée en (1) et d'autre part en utilisant celle proposée en (7).

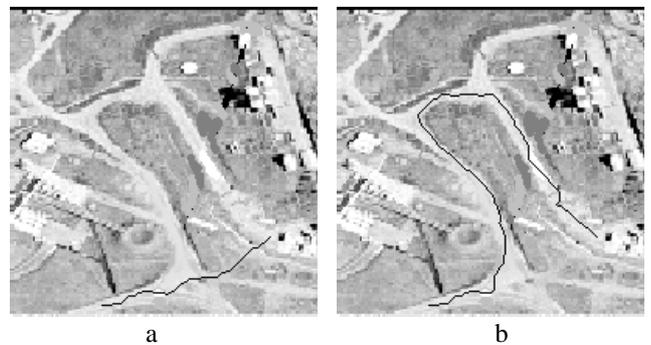


FIG. 5 : Chemins d'énergie minimum : a) formulation classique de l'énergie, b) nouvelle formulation. ( $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ )

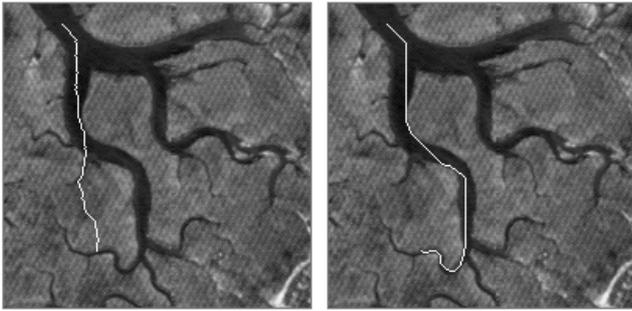


FIG. 6 : Chemins d'énergie minimum : a) formulation classique de l'énergie, b) nouvelle formulation.  
( $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10$ )

## 4.2 Construction d'une arborescence d'énergie minimale

A partir de l'énergie min-max définie en (3), un algorithme permettant de retrouver la structure d'objets arborescents a été mis au point. Cette extension de notre travail est largement développée dans [5].

En se fondant sur un ensemble de points fournis manuellement, cet algorithme, inspiré des algorithmes de classification ascendante classiques permet, pas à pas, de retrouver la structure de l'objet. A chaque étape, nous recherchons les deux points les plus proches. Le chemin construit est amené à potentiel 0 pour la suite du calcul. Lorsqu'un nœud est constitué de deux points, c'est l'ensemble du chemin qui est considéré comme ensemble de départ ou d'arrivée.

Les chemins obtenus à la section précédente ont été construits à partir de l'image d'énergie en utilisant une descente de gradient classique sur huit voisins. Dans le cadre de la construction de l'arborescence, le chemin obtenu doit pouvoir être reconstruit lors du calcul de l'image d'énergie qui est réalisé nécessairement sur 4 voisins. Pour assurer le fonctionnement de l'algorithme les descentes d'énergie sont donc effectuées sur 4 voisins. Un prolongement immédiat de notre travail consistera à obtenir une arborescence à partir d'une descente de gradient sur huit voisins.

La figure 7 montre les arborescences obtenues sur les images testées précédemment.

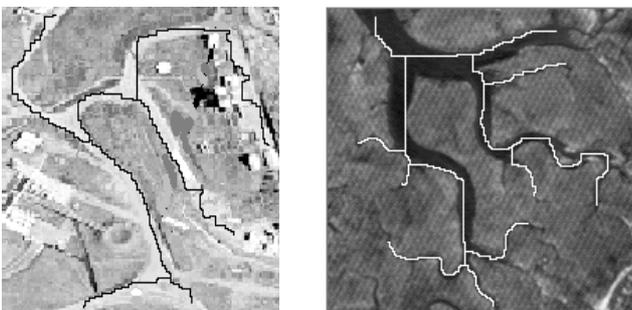


FIG. 7 : recouvrement de structures sur des objets arborescent

## 5. Conclusion

La nouvelle formulation de l'énergie présentée dans le cadre de la recherche de chemins optimaux dans des objets incurvés permet de lever le problème lié à la prise en compte conjointe du potentiel et de la distance. En effet, la formulation classique ne permet pas de maintenir le chemin optimum à l'intérieur de l'objet à analyser lorsque le chemin est recherché entre deux pixels proches mais dont la distance géodésique est élevée.

En utilisant l'approche min-max développée dans cet article, il est possible de reconstruire l'ensemble de la structure d'un objet arborescent à partir d'un ensemble de pixels définis manuellement.

## References

- [1] F. Angella, O. Lavielle et P. Baylou "A Deformable and Extensible Tree for Structure Recovery" Proc. of IEEE Inter. Conf. on Image Proc., Vol 1, pp 241-245, 1998
- [2] L.D. Cohen, R. Kimmel "Global Minimum for Active Contour Models: A Minimal Path Approach" Inter. Journal of Computer Vision, Vol 24, n°1, pp 57-78, 1997
- [3] I. Destival "Morphologie Mathématique appliquée aux images des satellites de teledetection" Intern. Elect. Image Week, Nice, 1986
- [4] M.A. Fischler, J.M. Tenenbaum et H.C. Wolf "Detection of Roads and Linear Structure in low resolution aerial imagery using a multisource knowledge integration technique". Computer Graphics and Image Processing, Vol 15, pp 201-223, 1981
- [5] O. Lavielle, F. Angella et P. Baylou "An extension of the minimal path for structure recovery" Accepté à IEEE Inter. Conf. on Image Proc., Kobe (japon), Oct 1999.
- [6] N. Merlet, J. Zerubia "New Prospects in Line Detection by Dynamic Programming" IEEE Pattern Analysis And Machine Intelligence, Vol 18, n°4, pp 426-431, 1996
- [7] J.A. Sethian "A Fast Marching Level Set Method for Monotonically Advancing Fronts" Proc. Nat. Acad. Sciences Vol 93, n°4, 1996.
- [8] J. Zerubia, N. Merlet "Classical Mechanics and Roads Detection in Spot Images" Rapport de Recherche INRIA, n°1889, 1993