

Estimation paramétrique robuste à support optimal de la structure d'écoulements fluides en imagerie Météosat

Marie-Ange Brossard , Nicolas Rougon , Françoise Prêteux

Unité de Projets ARTEMIS, Institut National des Télécommunications
9 Rue Charles Fourier, 91011 Evry Cedex, France

Marie-Ange.Brossard@int-evry.fr, Nicolas.Rougon@int-evry.fr, Francoise.Preteux@int-evry.fr

Résumé – Cet article présente une méthodologie d'analyse de la structure lagrangienne d'écoulements fluides dans des séquences d'images météorologiques multispectrales. Adoptant une approche multi-échelles, nous construisons tout d'abord, à partir du tenseur de structure de l'image, un estimateur non ponctuel robuste du champ d'orientation localement dominante, adapté aussi bien à un contexte monospectral que multispectral. Nous estimons ensuite la composante lagrangienne du flot en ajustant un modèle paramétrique vectoriel hiérarchique à ce champ d'orientation. Dans ce but, nous introduisons une approche variationnelle originale permettant l'optimisation conjointe des paramètres du modèle et de son support. La structure du champ de vecteurs résultant est finalement caractérisée au moyen d'outils classiques de géométrie différentielle. Cette méthodologie est appliquée à l'analyse de structures dépressionnaires en zone tempérée en imagerie Météosat.

Abstract – This article describes a methodology for analyzing the Lagrangian structure of fluid flows in meteorological multispectral image sequences. Following a scale-space approach, we first construct a non-ponctual robust estimator for the locally dominant orientation field in the image. Based on the structure tensor, this estimator is relevant in both mono- and multispectral contexts. The Lagrangian component of the flow is then estimated by fitting a hierarchical vector parametric model to the dominant orientation field. Within this framework, we introduce a novel variational approach allowing a joint optimization of model parameters and support. A structural characterization of the resulting vector field is finally derived by means of classical differential geometry techniques. This methodology is applied to the analysis of temperated latitude depressions in Meteosat images.

1 Introduction

L'analyse d'écoulements fluides dans des séquences d'images est une problématique récurrente dans de nombreux contextes applicatifs : télédétection (météorologie, climatologie, océanographie), vélocimétrie (aéro- et hydrodynamique), imagerie médicale (ARM et échographie Doppler), etc. Cette problématique revêt trois aspects : (i) l'estimation d'un champ de vecteurs décrivant le flot associé à l'écoulement ; (ii) la caractérisation de la structure spatiale (*i.e.* de la topologie) du champ estimé ; (iii) l'analyse de son comportement dynamique.

Dans cet article, nous nous intéresserons spécifiquement à l'évolution de systèmes nuageux en imagerie Météosat. Les satellites Météosat sont des satellites géostationnaires délivrant, avec une période de 30 minutes, des images dans 3 bandes spectrales : un canal visible ($\lambda \in [0.4 \mu m, 1.1 \mu m]$, résolution $2.25 km/pixel$) et deux canaux infra-rouge (résolution $5 km/pixel$) : le canal infra-rouge (IR) ($\lambda \in [10.5 \mu m, 12.5 \mu m]$) et le canal vapeur d'eau (WP) ($\lambda \in [5.7 \mu m, 7.1 \mu m]$). Seuls les canaux infra-rouge (IR,WP) sont utilisés dans l'étude des nuages, le canal WP renseignant sur les couches atmosphériques basses. Dans ces images, l'écoulement des masses nuageuses, sous l'effet de phénomènes complexes d'advection par des champs de vent, induit une orientation de la texture nuageuse selon les lignes de flot. Deux types d'infor-

mation peuvent être extraits de ces séquences :

- D'une part, la structure eulérienne du flot, via une approche spatio-temporelle fondée sur l'estimation du flot optique. Cette problématique a fait l'objet de multiples développements dans la littérature. Les principales classes de méthodes génériques ont été appliquées en météorologie, qu'il s'agisse de techniques de corrélation [1], d'approches variationnelles non paramétriques [6] ou paramétriques à support borné [12], ou d'approches stochastiques dans un contexte markovien [4]. Dans chaque cas, le recours à des méthodes multigrilles (multirésolution, maillage adaptatif) permet la prise en compte de déformations de large amplitude.
- D'autre part, la structure lagrangienne de l'écoulement, au moyen d'une approche purement spatiale, fondée sur l'analyse du champ d'orientation localement dominante. Cette analyse, généralement effectuée dans un contexte déterministe via des estimateurs différentiels régularisés [11, 2] ou des méthodes d'estimation paramétrique robuste à support borné [3, 15, 12], a été employée en contrôle non destructif et en vélocimétrie. A notre connaissance, cette approche n'a pas été utilisée en météorologie.

Dans cet article, nous présentons une méthodologie d'analyse de la structure lagrangienne d'écoulements fluides. La composante lagrangienne du flot est tout d'abord

estimée en ajustant un modèle paramétrique vectoriel hiérarchique sur l'orientation localement dominante de l'image. A cette fin, nous introduisons une approche variationnelle originale, permettant l'optimisation conjointe des paramètres du modèle et de son support, et détaillons sa mise en œuvre dans des contextes mono- et multi-spectraux, mono- et multi-échelles. Une caractérisation structurale de l'écoulement, via les portraits de phase des flots affines tangents aux points critiques, est ensuite élaborée, résultant en un graphe topologique décrivant ses composantes et leurs interactions.

2 Estimation paramétrique robuste à support optimal

Etant donnée une image multispectrale $\mathbf{L} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ de composantes $(L_i)_{i \in [1..m]}$, soit $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = [u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})]^T$, le champ de vecteurs, supposé p.p. régulier, représentant l'orientation dominante de \mathbf{L} en un point $\mathbf{x} = (x, y)^T$ du plan image. Soit $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, l'ensemble des domaines réguliers simplement connexes de \mathbb{R}^2 . Nous désignons par $\mathbf{V}^\Omega = (u^\Omega, v^\Omega)^T$ une représentation paramétrique locale du champ \mathbf{V} à support $\Omega \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ sur un espace $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ de fonctions régulières de dimension $n < \infty$. Etant donnée une base normée $(\psi_k)_{k \in [1..n]}$ de \mathcal{V}_n , soient $(u_k^\Omega)_{k \in [1..n]}$ et $(v_k^\Omega)_{k \in [1..n]}$ les coordonnées des composantes de \mathbf{V}^Ω dans cette base, ie :

$$\mathbf{V}^\Omega(\mathbf{x}) = \left(\sum_{k=1}^n u_k^\Omega \psi_k(\mathbf{x}) \quad , \quad \sum_{k=1}^n v_k^\Omega \psi_k(\mathbf{x})^T \right) \quad . \quad (1)$$

En considérant le vecteur $\Theta^\Omega = [(u_k^\Omega)_{k \in [1..n]}, (v_k^\Omega)_{k \in [1..n]}]^T$ de dimension $(2n \times 1)$ des paramètres du modèle, et la matrice $\Psi_{\mathbf{x}}$ de dimension $(2 \times 2n)$ définie par :

$$\Psi_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_n(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \psi_1(\mathbf{x}) & \cdots & \psi_n(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad ,$$

l'équation (1) se réécrit sous la forme compacte :

$$\mathbf{V}^\Omega(\mathbf{x}) = \Psi_{\mathbf{x}} \Theta^\Omega \quad . \quad (2)$$

Les représentations affines, correspondant au cas $n = 3$ et $(\psi_k(\mathbf{x}))_{k \in [1..n]} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}(1, x, y)$, ont été largement employées dans la littérature [2, 3, 15, 12] du fait de leur simplicité et de leur réalisme. Cette classe de modèles n'autorise cependant qu'une modélisation très locale et parcellaire de la structure de l'écoulement, du fait de : (i) la taille généralement réduite du support Ω ; (ii) la difficulté de prolonger, en cohérence avec l'image, une famille d'approximations affines locales en une solution globale continue rendant compte de leurs interactions mutuelles. Ces limitations sont levées en recourant à des modèles à points critiques multiples. L'utilisation de polynômes d'ordres supérieurs a été suggérée dans [6]. Nous adopterons pour notre part une approche hiérarchique et opterons pour une décomposition en série de Fourier tronquée à un ordre N , correspondant à $n = 2N^2 + 4N + 1$ et :

$$(\psi_k(\mathbf{x}))_{k \in [1..n]} = (1, \cos(px + qy), \sin(px + qy))_{0 \leq p, q \leq N, p+q > 0} \quad .$$

Le modèle de champ \mathbf{V} est relié aux données image par l'équation de contrainte :

$$\mathbf{D}(\mathbf{L})^T \cdot \mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0 \quad , \quad (3)$$

où $\mathbf{D}(\mathbf{L})$ désigne l'orientation localement dominante du champ \mathbf{L} . Dans le cas monospectral ($\mathbf{L} = (L)$), un estimateur quasi-punctuel ∇L_σ du champ $\mathbf{D}(L)$ s'obtient au moyen d'un opérateur de gradient régularisé (Deriche, gaussien...) de paramètre $\sigma > 0$. Une évaluation de $\mathbf{D}(L)$ robuste vis-à-vis de la variabilité des propriétés texturales des nuages implique de recourir à des estimateurs non punctuels. L'adoption d'un cadre multi-échelles autorise leur construction de manière systématique. Nous définissons le *tenseur de structure* [8], noté $J_\rho(\nabla L_\sigma) = (j_{kl})_{k, l \in \{1, 2\}}$, en convoluant composante par composante le tenseur $J_0(\nabla L_\sigma) := \nabla L_\sigma \cdot \nabla L_\sigma^T$ par un noyau gaussien G_ρ de variance $\rho \geq 0$, le paramètre ρ étant pour cette raison appelé *échelle d'intégration*. Ce tenseur synthétise les informations de contraste et d'orientation dans un voisinage \mathcal{N}_ρ de taille $O(\rho)$. Un estimateur non punctuel de $\mathbf{D}(L)$ est donné par le vecteur $Q \mathbf{J}_{\sigma, \rho}$, produit par le réel $Q := \sqrt{(j_{11} - j_{22})^2 + 4j_{12}^2}$ (appelé *cohérence locale* du champ L) et du vecteur propre unitaire $\mathbf{J}_{\sigma, \rho}$ parallèle à $(2j_{12}, -j_{11} + j_{22} + Q)^T$, associé à la plus grande valeur propre de $J_\rho(\nabla L_\sigma)$. Le vecteur $\mathbf{J}_{\sigma, \rho}$ représente l'orientation localement dominante de L dans \mathcal{N}_ρ . Le scalaire Q est une mesure de contraste quantifiant la dispersion d'orientation autour de $\mathbf{J}_{\sigma, \rho}$ dans \mathcal{N}_ρ .

L'extension au cas multispectral s'appuie sur la géométrie riemannienne [13]. En notant $\nabla \mathbf{L}$ le jacobien de \mathbf{L} , le tenseur J_0 est généralisé sous la forme d'un tenseur métrique régularisé $J_0(\nabla \mathbf{L}_\sigma)$ de composantes $\frac{\partial \mathbf{L}_\sigma}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \mathbf{L}_\sigma}{\partial x_l}$. Soit $\nabla^+ \mathbf{L}_\sigma$ (resp. $\nabla^- \mathbf{L}_\sigma$) le vecteur propre unitaire associé à la plus grande (resp. petite) valeur propre λ^+ (resp. λ^-) de $J_0(\nabla \mathbf{L}_\sigma)$. Un estimateur quasi-punctuel de $\mathbf{D}(\mathbf{L})$ est donné par le vecteur $(\lambda^+ - \lambda^-) \nabla^+ \mathbf{L}_\sigma$. La généralisation du tenseur de structure $J_\rho(\nabla \mathbf{L}_\sigma)$ et de l'estimateur non punctuel $Q \mathbf{J}_{\sigma, \rho}$ à partir de $J_0(\nabla \mathbf{L}_\sigma)$ est directe.

En projetant l'équation (3) sur la base $(\psi_k)_{k \in [1..n]}$ en tout point $\mathbf{x} \in \Omega$, et en désignant par $\Gamma_{\mathbf{x}}^T = \mathbf{D}(\mathbf{L})^T \cdot \Psi_{\mathbf{x}}$ le vecteur de dimension $(1 \times 2n)$, nous obtenons un système linéaire sur-déterminé de la forme :

$$\epsilon(\mathbf{x}, \Theta^\Omega) := \Gamma_{\mathbf{x}}^T \cdot \Theta^\Omega = 0 \quad , \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad . \quad (4)$$

Nous appellerons *approximation paramétrique robuste à support optimal* du champ \mathbf{V} tout couple $(\hat{\Omega}, \hat{\Theta}^{\hat{\Omega}})$ formé d'un domaine $\hat{\Omega} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et d'un vecteur de paramètres $\hat{\Theta}^{\hat{\Omega}}$ minimisant, au sens d'une norme robuste, le résidu ϵ sur un support $\hat{\Omega}$ maximal. Un estimateur de $(\hat{\Omega}, \hat{\Theta}^{\hat{\Omega}})$ s'obtient en minimisant la fonctionnelle :

$$E(\Omega, \Theta^\Omega) := \int \int_{\Omega} \varphi(|\epsilon(\mathbf{x}, \Theta^\Omega)|) \, dx dy - \int \int_{\Omega} \mu \, dx dy + \int_{\partial \Omega} \alpha \|\mathbf{x}_\xi\| \, d\xi \quad , \quad (5)$$

où $\partial \Omega$ est la frontière de Ω , ξ une paramétrisation arbitraire de $\partial \Omega$, α et μ des réels positifs, et φ une fonction

$\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $t \rightarrow \varphi(\sqrt{t})$ soit concave [14, 10]. Le premier terme de E représente l'erreur d'estimation (au sens de la norme induite par φ) des paramètres Θ^Ω sur le support Ω . Le second est un terme de pression autorisant l'extrapolation du modèle hors de Ω dans le cas où l'erreur est inférieure à μ . Le dernier est un terme de membrane qui garantit la régularité de $\partial\Omega$ et limite la taille de Ω , permettant ainsi un contrôle du biais. Nous effectuons une minimisation alternée de E :

- A support Ω fixé, la minimisation de E , équivalente à une méthode moindres carrés robustes, conduit à rechercher la solution $\hat{\Theta}^\Omega$ de l'équation non linéaire :

$$\left[\iint_{\Omega} w(\mathbf{x}, \Theta^\Omega) \Gamma_{\mathbf{x}} \Gamma_{\mathbf{x}}^T \right] \Theta^\Omega := M(\Omega, \Theta^\Omega) \Theta^\Omega = \mathbf{0} \quad (6)$$

où $w(\mathbf{x}, \Theta^\Omega) := \frac{\varphi'(|\epsilon(\mathbf{x}, \Theta^\Omega)|)}{|\epsilon(\mathbf{x}, \Theta^\Omega)|}$ et $M(\Omega, \Theta^\Omega)$ une matrice de dimension $(2n \times 2n)$. On utilise à cette fin une méthode de moindres carrés pondérés itérés [12].

- A modèle $\hat{\Theta}^\Omega$ fixé, un raisonnement analogue à [16] permet de montrer que la frontière $\partial\hat{\Omega}$ du support optimal $\hat{\Omega}$ est un état d'équilibre du système dynamique suivant :

$$\mathbf{x}_t = \left[\alpha k + \mu - \varphi \left(\epsilon(\mathbf{x}, \hat{\Theta}^t) \right) \right] \mathbf{n} \quad , \quad (7)$$

où \mathbf{n} et k désignent respectivement la normale externe et la courbure euclidienne au point $\mathbf{x}(\xi) \in \partial\Omega^t$, avec la condition initiale $\Omega^{t=0} = \Omega$. En pratique, l'équation (7) est intégrée itérativement par un schéma numérique aux différences finies explicite. L'estimée $\hat{\Theta}$ n'étant disponible que sur le support initial Ω , deux stratégies d'optimisation sont possibles : (i) $\hat{\Theta}$ est extrapolé au plan image et Ω est déformé jusqu'à l'équilibre; (ii) seule une déformation instantanée de Ω est calculée. Afin d'accroître la régularité de $\partial\Omega$ et la vitesse de convergence, cette optimisation est réalisée dans un contexte paramétrique de type Fourier-*snake* [9].

3 Caractérisation structurale de l'écoulement

Le théorème de Gorbman-Hartman [7] assure que : (i) la topologie du champ \mathbf{V} est entièrement déterminée par ses *points critiques*, définis par $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = 0$; (ii) au voisinage d'un point critique, \mathbf{V} est homéomorphe à un champ affine, correspondant au *champ tangent* à \mathbf{V} . La structure locale d'un champ régulier peut être complètement spécifiée sur la base d'une caractérisation topologique exhaustive des champs affines, laquelle résulte de l'étude des invariants algébriques ou des formes de Jordan des matrices affines [13]. Le champ tangent se déduisant analytiquement de \mathbf{V}^Ω , l'enjeu de la caractérisation structurale du flot réside donc dans la localisation précise de ses points critiques. Nous proposons une méthode en trois étapes :

1. *Détection* : Une détection de points critiques candidats est réalisée en évaluant l'*indice* [13, 15, 6, 5] du champ \mathbf{V}^Ω , noté $\iota(\mathbf{V}^\Omega, \mathbf{x})$, en tout point \mathbf{x} de la

grille discrète :

$$\begin{aligned} \iota(\mathbf{V}^\Omega, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} d(\arctan \frac{v^\Omega}{u^\Omega}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} (u^\Omega v_\xi^\Omega - v^\Omega u_\xi^\Omega) d\xi \quad , \end{aligned} \quad (8)$$

où Γ est une courbe de Jordan sans point critique entourant \mathbf{x} . Si la région limitée par Γ ne contient aucun point critique, $\iota(\mathbf{V}^\Omega, \mathbf{x}) = 0$. Dans le cas contraire, la valeur de $\iota(\mathbf{V}^\Omega, \mathbf{x})$ dépend uniquement du nombre et du type topologique de ces points. Pour un champ affine et un contour Γ ne contenant qu'un seul point critique, $\iota(\mathbf{V}^\Omega, \mathbf{x}) = \pm 1$. En pratique, l'indice est estimé analytiquement sur un cercle unité centré au pixel courant. Le critère de détection est : $|1 - |\iota(\mathbf{V}^\Omega, \mathbf{x})|| < \epsilon$, où $\epsilon > 0$ est un seuil donné.

2. *Localisation précise* : La position des points critiques candidats est ensuite raffinée à une précision sub-pixel par une méthode de Newton-Raphson globalement convergente. A l'issue de celle-ci, les points trop proches sont détectés et fusionnés en leur barycentre.
3. *Caractérisation structurale* : En chaque point critique, la topologie locale de \mathbf{V}^Ω est caractérisée en calculant le *portrait de phase* du champ tangent [13, 2, 3, 15, 12], obtenu par calcul analytique du jacobien $\nabla \mathbf{V}^\Omega$.

Au final, nous obtenons un graphe topologique spécifiant complètement la structure du champ \mathbf{V}^Ω dans ses composantes et leurs interactions mutuelles.

Cette approche a été appliquée à l'analyse de structures dépressionnaires en zone tempérée en imagerie Météosat, dans des contextes mono- (Fig.1a-c) et multispectraux (Fig.1d). Les résultats montrent que la structure du flot est correctement prise en compte dans ses composantes turbulentes principales et secondaires. En particulier, au voisinage du centre tourbillonnaire dans le canal IR (Fig.1b), la méthode proposée permet de discriminer des masses nuageuses situées à des niveaux atmosphériques distincts, en identifiant trois points critiques, respectivement associés à deux vortex et au contact du système avec les masses périphériques (point hyperbolique). Dans le canal WV, seules les couches humides les plus hautes sont visibles, et un unique vortex est détecté. Ce comportement persiste lorsque les canaux sont analysés conjointement.

4 Conclusions et perspectives

Dans cet article nous avons présenté une méthodologie d'analyse de la structure lagrangienne d'écoulements fluides par modèles paramétriques vectoriels hiérarchiques. L'approche développée s'appuie sur une technique générique originale, permettant l'optimisation conjointe des paramètres d'un tel modèle et de son support. Cette estimation est rendue robuste par l'adoption d'un cadre multi-échelles, permettant en outre un traitement unifié des contextes mono- et multispectraux. Le champ d'orientation estimé est ensuite caractérisé topologiquement par

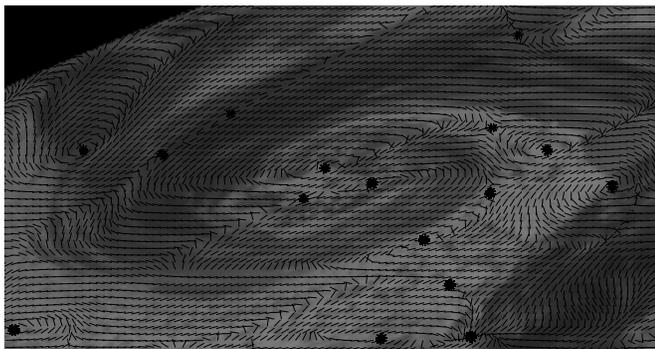
extraction de ses points critiques et identification du portrait de phase affine au voisinage de chacun d'eux.

Ce travail est appelé à ce poursuivre selon deux directions : d'une part, la mise en œuvre de stratégies multi-grilles afin d'accroître les performances algorithmiques et d'analyser des flots composites ; d'autre part, le développement d'une méthode robuste d'estimation de la structure eulérienne de l'écoulement, et son couplage avec l'information lagrangienne en vue d'une caractérisation de l'évolution du système fluide.

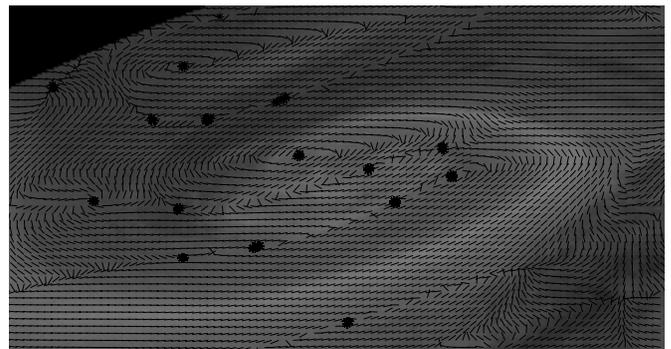
Remerciements Les données Météosat de cette étude ont été fournies par le Laboratoire de Météorologie Dynamique (LMD) de l'Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.

Références

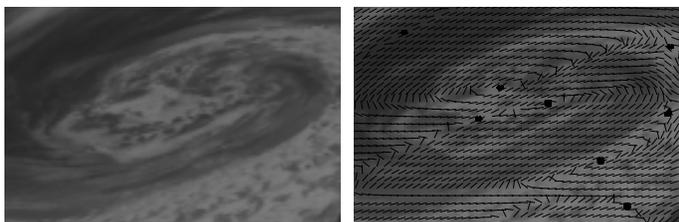
- [1] A. Szantai. *Construction de trajectoires à partir d'images de satellites : Etude de systèmes nuageux*. PhD thesis, Université Paris 6 - Jussieu, France, Janvier 1996.
- [2] A.R. Rao, R.C. Jain. Computerized flow field analysis : Oriented texture fields. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(7) :693–709, Juillet 1992.
- [3] C-F. Shu, R.C. Jain. Direct estimation and error analysis for oriented patterns. *Image Understanding (CVIGP'93)*, 58(3) :383–398, Novembre 1993.
- [4] E. Mémin, P. Pérez. Semi-parametric estimation and segmentation of optical flow. Technical Report 1197, IRISA-Projet TEMIS, Rennes, France, Août 1998.
- [5] H. Nogawa, Y. Nakajima, Y. Soto, S. Tamura. Acquisition of symbolic description from flow fields : a new approach based on a fluid model. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 19(1) :58–63, Janvier 1997.
- [6] I. Cohen, I. Herlin. Non uniform multiresolution method of optical flow and phase portrait models : environmental applications. Technical Report 2819, INRIA, Rocquencourt, France, Mars 1996.
- [7] J. Palis Jr., W. de Melo. *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New-York, 1992.
- [8] J. Weickert. *Anisotropic diffusion in image processing*. PhD thesis, Department of Mathematics, University of Kaiserslautern, Germany, Janvier 1996.
- [9] L.H. Staib, J.S. Duncan. Boundary finding with parametrically deformable models. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 14(11) :1061–1075, Novembre 1992.
- [10] M. J. Black, A. Rangarajan. On the unification of line processes, outlier rejection, and robust statistics with applications in early vision. *International Journal Computer Vision*, 19(1) :57–91, Juillet 1996.
- [11] M. Kass, A. Witkin. Analyzing oriented patterns. *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, 37 :362–385, 1987.
- [12] M. Maurizot. *Analyse du mouvement fluide 2D dans des séquences d'images numériques : localisation, caractérisation et suivi des points singuliers*. PhD thesis, Université Rennes I, France, Novembre 1996.
- [13] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume 1. Publish or Perish, Inc., Houston, TX, 2nd edition, 1979.
- [14] P.J. Hubert. *Robust statistics*. Wiley, New York, NY, 1981.
- [15] R.M. Ford, R.N. Strickland, B.A. Thomas. Image models for 2-d flow visualization and compression. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, 56(1) :75–93, Janvier 1994.
- [16] S.C. Zhu, A. Yuille. Region competition : unifying snakes, region growing, and bayes/mdl for multiband image segmentation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 18(9) :884–900, Septembre 1996.



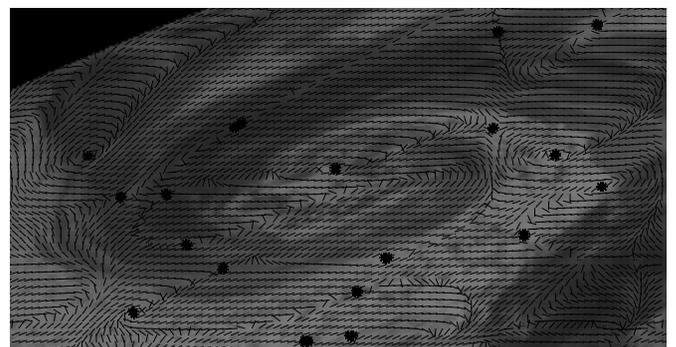
(a) Canal IR.



(c) Canal WV.



(b) Canal IR : détail du centre de la turbulence et flot lagrangien estimé.



(d) Canaux IR + WV.

FIG. 1 - Estimation paramétrique robuste, mono- et multispectrale, de la composante lagrangienne du flot par modèle de Fourier à $N = 3$ harmoniques (Estimation de $\mathbf{D}(L)$ via le tenseur de structure $J_{0.5}(\nabla L_{1.0})$; estimateur lorentzien $\varphi(t) = \frac{1}{2} \log(1 + t^2)$; champ normé) et points critiques associés.