

Restauration et débruitage d'images en médecine nucléaire: l'approche multirésolution

Ghada JAMMAL¹, Albert BIJAOU²

¹Technische Universität Darmstadt
Merckstr. 25, D-64283 Darmstadt, Allemagne

²Observatoire de la Côte d'Azur
Boîte Postale 4229, 06304 Nice Cedex 4, France
ghada@nesi.tu-darmstadt.de, bijaoui@obs-nice.fr

Résumé – L'imagerie en médecine nucléaire, basée sur un dispositif à comptage de photons, est affectée par un bruit de Poisson. Dans un article précédant [3], les auteurs ont développé une méthode basée sur l'analyse en ondelettes pour l'élimination du bruit de Poisson. L'objet de la soumission présente est de montrer comment l'algorithme de restauration développé en [3] a été amélioré par l'introduction de la fonction d'étalement comme contrainte supplémentaire pour la reconstruction des coefficients en ondelette et par le choix de la contrainte de régularisation dans l'espace objet.

Abstract – Nuclear medicine imaging systems rely on photon detection as the basis of image formation. Consequently, one of the major sources of error in these systems is Poisson Noise. In a previous paper [3] the authors have developed a wavelet based filtering method enabling to remove Poisson noise. The purpose of this paper is to show how the restoration algorithm developed in [3] has been improved by introducing the point spread function as additional constraint in the restoration of the wavelet coefficients and choosing the regularization constraint in the object space.

1 Introduction

L'imagerie en médecine nucléaire consiste à visualiser une structure anatomique ou fonctionnelle de l'organisme en y localisant un nuclide radioactif susceptible d'une détection externe [8]. Les détecteurs utilisant tous le principe de la scintillation solide, le nom général de scintigraphie est donné à ce type d'imagerie. D'un point de vue strictement morphologique, les images scintigraphiques sont de qualité très médiocre, comparées à celles que fournit la radiographie classique par exemple. Par contre, l'imagerie scintigraphique tire son originalité et sa puissance diagnostique de son caractère dynamique et fonctionnel; elle permet de suivre l'évolution de la répartition d'une certaine substance dans l'organisme, et donc de différencier les structures anatomiques et fonctionnelles pour lesquelles cette évolution est différente.

Ce type d'imagerie, basé sur un dispositif à comptage de photons, est affecté par un bruit de Poisson [1]. En effet, soit $I(k_x, k_y)$ la variable aléatoire « nombre de comptes au point (k_x, k_y) du scintigramme ». Cette variable obéit à une loi de Poisson [7]:

$$Prob(I(k_x, k_y) = n) = \frac{\lambda_p^n(k_x, k_y)}{n!} e^{-\lambda_p(k_x, k_y)}$$

où le paramètre $\lambda_p(k_x, k_y)$ est donné par l'expression suivante:

$$\lambda_p(k_x, k_y) = \lambda_r T P N$$

avec

λ_r	=	constante de désintégration du nuclide
P	=	opérateur de convolution avec la réponse impulsionnelle du système
T	=	durée de la prise d'image
N	=	nombre de nuclides absorbés par le volume de l'organe correspondant à un pixel dans l'image.

Par la suite nous utiliserons les notations suivantes:

$$\begin{aligned} X &= \lambda_r T N \\ Y &= P X = \lambda_p \end{aligned}$$

Connaissant $I(k_x, k_y)$, notre objectif est de déterminer X , qui est proportionnel à l'absorption dans l'organe. Pour cela il faudra non seulement estimer le paramètre de la loi de Poisson à partir d'une observation du processus mais aussi effectuer une déconvolution afin d'éliminer la contribution du système d'imagerie.

2 Étude de la signification statistique des coefficients en ondelette

L'estimation de la variation locale de $\lambda_p(k_x, k_y)$ peut être formulée comme un problème d'inférence statistique [6], où une conclusion sur une caractéristique de la population doit être obtenue à partir de l'information livrée par l'échantillon. Les hypothèses associées sont:

$$\begin{aligned} H_0: & \lambda_p \text{ est localement constant} \\ H_a: & \lambda_p \text{ varie localement} \end{aligned}$$

Le choix d'un paramètre de test permet de quantifier le degré de concordance entre les données et les hypothèses.

Dans notre cas, ce paramètre doit être capable de caractériser (1) la variation et (2) la localité. Les coefficients en ondelette répondent à cette attente. En effet, les ondelettes étant des fonctions à moyenne nulle, elles feront correspondre à tout signal localement constant un coefficient en ondelette nul. De plus, l'analyse en ondelettes étant une méthode multirésolution, elle permet d'effectuer une analyse locale à différentes échelles [5]. La formulation des hypothèses en terme des coefficients en ondelette de la population fournit:

$$\begin{aligned} H_0: & \mathcal{W}(2^j, k_x, k_y) = 0 \\ H_a: & \mathcal{W}(2^j, k_x, k_y) \neq 0 \end{aligned}$$

Le calcul de la probabilité que la valeur d'échantillon soit réellement supérieure à la valeur observée sous hypothèse H_0 si la valeur observée est positive, respectivement inférieure à la valeur observée sous hypothèse H_0 si la valeur observée est négative, permettra de tirer des conclusions sur le degré de crédibilité de H_0 .

– si $W(2^j, k_x, k_y) > 0$

$$P = \text{Prob}(\mathcal{W}(2^j, k_x, k_y) > W(2^j, k_x, k_y)) \quad (1)$$

– si $W(2^j, k_x, k_y) < 0$

$$P = \text{Prob}(\mathcal{W}(2^j, k_x, k_y) < W(2^j, k_x, k_y)) \quad (2)$$

Un seuil d'erreur du test, ϵ , est choisi. Si la valeur P calculée est inférieure à ϵ , la valeur observée est jugée suffisamment en conflit avec l'hypothèse nulle pour que celle-ci soit rejetée. Ce qui signifie que l'image n'est pas considérée comme étant constante sur un voisinage de taille proportionnelle à 2^j centré au point (k_x, k_y) . On dit alors qu'un coefficient significatif a été détecté au risque ϵ . Si la valeur P calculée est supérieure à ϵ , on considère que la valeur du coefficient en ondelette est uniquement due à une fluctuation statistique et on accepte l'hypothèse H_0 . Ce dernier coefficient est alors dit non significatif [9].

2.1 Densité de probabilité des coefficients en ondelette sous l'hypothèse H_0

Le calcul de la valeur P nécessite la détermination de la densité de probabilité des coefficients en ondelette sous l'hypothèse H_0 , c.à.d pour une distribution de Poisson localement uniforme. Cette loi dépend du choix de l'ondelette analysante.

Nous avons choisi de travailler avec la transformation de Haar non normalisée car elle possède la propriété unique de conserver le caractère Poissonien des images lissées. En effet, chaque coefficient de l'image lissée à l'échelle 2^{j+1} est la somme de quatre coefficients de l'image lissée à l'échelle 2^j et obéit par conséquent à une loi de Poisson. Soient, h et g les filtres passe bas et passe haut de l'analyse en ondelettes:

$$h = [1, 1] \quad g = [1, -1]$$

Les coefficients de l'image lissée à l'échelle 2^j seront désignés par $F(2^j, k_x, k_y)$. Les coefficients en ondelette horizontaux, verticaux et diagonaux à l'échelle 2^j seront désignés par $W_h(2^j, k_x, k_y)$, $W_v(2^j, k_x, k_y)$ et $W_d(2^j, k_x, k_y)$. L'analyse en ondelettes fournit les coefficients à l'échelle suivante

selon les équations ci-dessous:

$$\begin{aligned} F(2^{j+1}, k_x, k_y) &= \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 \\ W_h(2^{j+1}, k_x, k_y) &= \gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 \\ W_v(2^{j+1}, k_x, k_y) &= \gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 \\ W_d(2^{j+1}, k_x, k_y) &= \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 \end{aligned} \quad (3)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= F(2^j, k_x, k_y) & \gamma_2 &= F(2^j, k_x, k_y + 1) \\ \gamma_3 &= F(2^j, k_x + 1, k_y) & \gamma_4 &= F(2^j, k_x + 1, k_y + 1) \end{aligned}$$

L'hypothèse nulle suppose une absorption constante au niveau de l'organe, ce qui signifie que les variables aléatoires $I(k_x, k_y) = F(2^0, k_x, k_y)$ sont supposées obéir à une loi de Poisson de paramètre constant λ_p . Par conséquent, les coefficients de l'image lissée $F(2^j, k_x, k_y)$ obéissent aussi à une loi de Poisson de paramètre constant $2^{2j}\lambda_p$. En examinant le système d'équation (3), nous constatons que les coefficients en ondelette W_h , W_v et W_d sont calculés en effectuant la différence de deux sommes de variables de Poisson:

$$W_{h,v,d}(2^{j+1}) = S_1 - S_2$$

S_1 et S_2 sont des variables de Poisson de paramètre $2^{2j+1}\lambda_p$. Partant de ce résultat, la densité de probabilité des coefficients en ondelettes peut être calculée de la façon suivante:

$$\begin{aligned} P(W_{h,v,d}(2^{j+1}) = \nu) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(S_1 = \nu + m)P(S_2 = m) \\ &= e^{-2^{2(j+1)}\lambda_p} \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(2^{2j+1}\lambda_p)^{\nu+2m}}{(\nu+m)!m!} \\ &= e^{-2^{2(j+1)}\lambda_p} I_\nu(2^{2(j+1)}\lambda_p) \end{aligned}$$

avec $I_\nu(x)$ la fonction de Bessel modifiée d'ordre entier ν [2].

2.2 Distinction entre information utile et bruit

Le seuil d'erreur ϵ du test d'hypothèses correspond à chaque échelle à un seuil sur les coefficients en ondelette que l'on note t_{2^j} . Ce seuil permet de séparer les coefficients en ondelette W_I de l'image $I(k_x, k_y)$ en deux groupes: le groupe des coefficients significatifs W_I^s qui reflètent l'existence d'une structure dans l'image et celui des coefficients non significatifs W_I^{ns} dont la valeur correspond à une fluctuation purement statistique dans l'image.

$$W_I^s(2^j) = \begin{cases} W_I(2^j) & \text{si } |W_I(2^j)| > t_{2^j}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$W_I^{ns}(2^j) = \begin{cases} W_I(2^j) & \text{si } |W_I(2^j)| \leq t_{2^j}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette description multiéchelles en termes de coefficients en ondelette significatifs va permettre de reconstruire l'image en conservant la contribution du signal et en éliminant celle du bruit.

3 Reconstruction régularisée

L'objectif est d'obtenir une estimation de l'objet X . Ce problème sera résolu itérativement en calculant une estimation du paramètre de la loi de Poisson λ_p (ou Y), à partir de l'information fournie par les coefficients en ondelette significatifs. La valeur à donner aux coefficients non significatifs représente un problème mal posé. Ce problème sera résolu par l'introduction d'une contrainte de régularisation basée sur la connaissance a priori sur la douceur de l'objet X . Un algorithme de déconvolution itératif sera utilisé pour calculer X à partir de Y .

3.1 Contrainte de Régularisation

Le but est de calculer les coefficients en ondelette associés à Y de telle manière à ce que la reconstruction de Y avec ces coefficients minimise le gradient de l'objet X :

$$\|D_x X\|^2 + \|D_y X\|^2 \quad \text{minimum}$$

avec D_x et D_y les opérateurs de gradient horizontal et vertical. Ceci conduit à la résolution de l'équation

$$L_2 X = 0 \quad (4)$$

où L_2 correspond au Laplacien obtenu par convolution avec le filtre:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

La résolution de l'équation (4) par l'algorithme de Van Cittert fournit l'itération:

$$X^{(n+1)} = X^{(n)} - \alpha L_2 X^{(n)} \quad (5)$$

Soient H_2 , G_h , G_v et G_d les opérateurs de l'analyse en ondelette, tels que les équations de l'analyse multirésolution s'écrivent:

$$\begin{aligned} F(2^{j+1}) &= H_2 F(2^j) & W_h(2^{j+1}) &= G_h F(2^j) \\ W_v(2^{j+1}) &= G_v F(2^j) & W_d(2^{j+1}) &= G_d F(2^j) \end{aligned}$$

En multipliant les deux termes de l'égalité (5) par l'opérateur P , nous obtenons:

$$Y^{(n+1)} = Y^{(n)} - \alpha P L_2 X^{(n)} \quad (6)$$

On multiplie ensuite j fois l'égalité (6) respectivement par les opérateurs G_h , G_v et G_d . Le résultat est donné par les équations ci-dessous:

$$\begin{aligned} W_{h,Z^{(n+1)}}(2^j) &= W_{h,Y^{(n)}}(2^j) - \alpha W_{h,PL_2 X^{(n)}}(2^j) \\ W_{v,Z^{(n+1)}}(2^j) &= W_{v,Y^{(n)}}(2^j) - \alpha W_{v,PL_2 X^{(n)}}(2^j) \\ W_{d,Z^{(n+1)}}(2^j) &= W_{d,Y^{(n)}}(2^j) - \alpha W_{d,PL_2 X^{(n)}}(2^j) \end{aligned} \quad (7)$$

Noter à ce point l'introduction de la notation $Z^{(n+1)}$ dans les termes de gauche du système d'équation (7) pour remplacer $Y^{(n+1)}$. Le but est d'insister sur la différence entre le résultat de la convolution de P avec $X^{(n+1)}$ quand $X^{(n+1)}$ est connu, que nous noterons $Y^{(n+1)}$, et l'image qui est calculée en utilisant les coefficients en ondelette de $PX^{(n)}$ et $PL_2 X^{(n)}$. Nous ferons référence à cette dernière par $Z^{(n+1)}$.

3.2 Contraintes secondaires

Les contraintes secondaires permettent de prendre en compte un autre type d'information a priori comme la positivité des images ou la dynamique des coefficients. Il s'agit de contraintes non linéaires qui sont appliquées après la contrainte de régularisation en projetant la solution obtenue à chaque itération sur l'espace des fonctions satisfaisant aux contraintes secondaires.

La signification des coefficients en ondelette calculés à chaque itération $W_{Z^{(n)}}(2^j, k_x, k_y)$ est comparée à celle des coefficients en ondelettes correspondants de l'image d'origine $W_I(2^j, k_x, k_y)$. Le résultat de la comparaison détermine la valeur à attribuer aux coefficients en ondelette calculés.

Si $W_I(2^j, k_x, k_y)$ n'est pas significatif, le domaine de variation de $W_{Z^{(n)}}(2^j, k_x, k_y)$ devra être limité à l'intervalle $[-t_{2j}; t_{2j}]$.

$$W_{Z^{(n)}}^{ns}(2^j) = \begin{cases} -t_{2j} & \forall W_{Z^{(n)}}^{ns}(2^j) < -t_{2j} \\ W_{Z^{(n)}}^{ns}(2^j) & \forall W_{Z^{(n)}}^{ns}(2^j) \in [-t_{2j}; t_{2j}] \\ t_{2j} & \forall W_{Z^{(n)}}^{ns}(2^j) > t_{2j} \end{cases}$$

Si $W_I(2^j, k_x, k_y)$ est significatif, l'action de la contrainte de régularisation sera limitée à l'intervalle $[-k t_{2j}; k t_{2j}]$ centré autour de la valeur initiale $W_I(2^j, k_x, k_y)$.

$$W_{Z^{(n)}}^s(2^j) = \begin{cases} (W_I^s)^- & \forall W_{Z^{(n)}}^s(2^j) < (W_I^s)^- \\ W_{Z^{(n)}}^s(2^j) & \forall W_{Z^{(n)}}^s(2^j) \in [(W_I^s)^-; (W_I^s)^+] \\ (W_I^s)^+ & \forall W_{Z^{(n)}}^s(2^j) > (W_I^s)^+ \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} (W_I^s)^- &= W_I^s(2^j, k_x, k_y) - k t_{2j} \\ (W_I^s)^+ &= W_I^s(2^j, k_x, k_y) + k t_{2j} \end{aligned}$$

3.3 Reconstruction de $Z^{(n)}$

Une fois les coefficients en ondelette de $Z^{(n)}$ à l'échelle 2^j obtenus, nous pouvons calculer l'image lissée de $Z^{(n)}$ à l'échelle 2^{j-1} . Nous introduisons pour cela les opérateurs de synthèse \widetilde{H}_2 , \widetilde{G}_h , \widetilde{G}_v et \widetilde{G}_d . Le calcul de l'image lissée de $Z^{(n)}$ à l'échelle 2^{j-1} se fait alors à l'aide de l'équation:

$$\begin{aligned} F_{Z^{(n)}}(2^{j-1}) &= \widetilde{H}_2 F_{Z^{(n)}}(2^j) + \widetilde{G}_h \widehat{W}_{h,Z^{(n)}}(2^j) \\ &+ \widetilde{G}_v \widehat{W}_{v,Z^{(n)}}(2^j) + \widetilde{G}_d \widehat{W}_{d,Z^{(n)}}(2^j) \end{aligned} \quad (8)$$

L'image lissée ainsi obtenue est projetée sur l'espace des fonctions positives.

$$F_{Z^{(n)}}(2^j) = \begin{cases} F_{Z^{(n)}}(2^j) & \forall F_{Z^{(n)}}(2^j) \geq 0 \\ 0 & \forall F_{Z^{(n)}}(2^j) < 0 \end{cases}$$

Après avoir remonté toutes les échelles jusqu'à l'échelle 2^0 , nous obtenons l'image reconstruite à l'itération (n): $Z^{(n)}$. L'objet à l'itération (n), $X^{(n)}$, est calculé par l'algorithme de déconvolution de Richardson-Lucy [4]:

$$X^{(n)} = X^{(n-1)} \left[\tilde{P} \frac{Z^{(n)}}{P X^{(n-1)}} \right]$$

l'opérateur \tilde{P} représente la transposée de la fonction d'étalement.

4 Exemple

L'exemple suivant vise à tester les performances de la méthode proposée sur les scintigrammes de la thyroïde. Les maladies les plus courantes qui touchent cet organe se traduisent par l'apparition de nodules hypo-fixants ou hyper-fixants l'iode. Ces nodules, que l'on appelle aussi nodules froids car ils ne fixent plus assez l'iode, et nodules chauds car ils fixent trop l'iode, provoquent un dérèglement de la glande. Certains d'entre eux pouvant être cancéreux, il est important de pouvoir les détecter au plus tôt, c'est à dire pour des tailles aussi petites que possible. L'objet simulé (fig. 1) consiste en un fond d'intensité

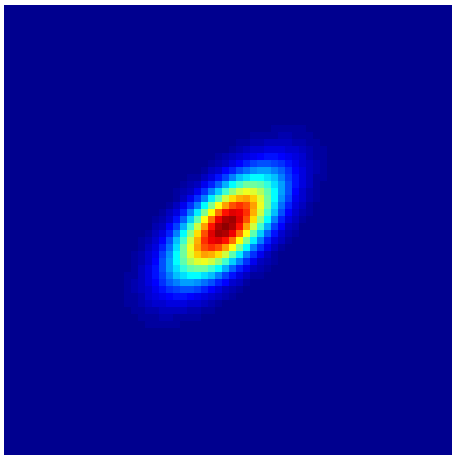


FIG. 1: Objet X

constante où un nodule chaud elliptique ayant subi une rotation de 45 degrés est représenté par un profil d'intensité gaussien. L'image bruitée $I(k_x, k_y)$ (fig. 2) est obtenue par l'introduction d'un bruit Poissonien sur le résultat de la convolution de l'objet X avec une PSF gaussienne. L'application de l'algorithme de restauration sur l'image bruitée fournit l'objet restauré, X_R représenté figure 3. Le rapport signal sur bruit a été nettement amélioré, en effet $SNR(I(k_x, k_y), X) = 14.9 \text{ dB}$ alors que $SNR(X_R, X) = 30.2 \text{ dB}$. Nous constatons que l'objet dans l'image a été protégé dans le sens où l'information relative à l'intensité, la position et la morphologie de l'objet est restée fidèle à l'image d'origine.

5 Perspectives

Les travaux futurs se concentreront sur le développement d'un modèle de vision pour une analyse automatique de l'image restaurée. Le but de ce modèle est d'extraire séparément les différents objets de l'image restaurée et ainsi de permettre de mesurer quantitativement la qualité de la restauration.

Références

[1] H.H. Barrett. Objective assessment of image quality: effects of quantum noise and object variability. *J. Opt. Soc. Am. A*, 7(7):1266–1278, July 1990.

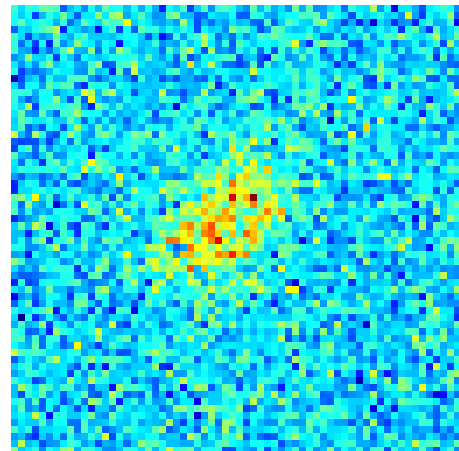


FIG. 2: Image bruitée $I(k_x, k_y)$

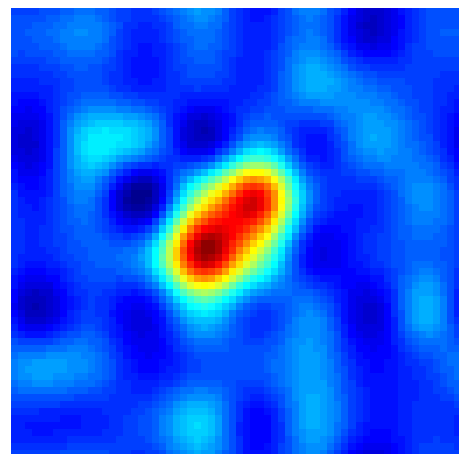


FIG. 3: Objet restauré X_R

- [2] A. Gray and G.B. Mathews. *A treatise on Bessel functions and their applications to physics*. Macmillan and co. London, 1952.
- [3] G. Jammal and A. Bijaoui. A multiresolution image restoration method for photon imaging systems. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 6:3401–3404, March 1999.
- [4] L.B Lucy. An iteration technique for the rectification of observed distributions. *Astronomical journal*, 79:745–754, 1974.
- [5] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [6] A.S. Moore. *Statistics concepts and controversies*. W.H. Freeman and Company New York, 1991.
- [7] B. Saleh. *Photoelectrons statistics*. Springer Verlag, 1978.
- [8] J.A. Sorenson and M.E. Phelps. *Physics in nuclear medicine*. New York: Grune and Stratton, 1980.
- [9] J.L. Starck, F. Murtagh, and A. Bijaoui. Multiresolution support applied to image filtering and restoration. *Graphical models and image processing*, 57(5):420–431, 1995.