Dix-septième colloque GRETSI, Vannes, 13-17 septembre 1999

Une Méthode de Conception des Filtres de Nyquist à Structure Treillis et IES Nulle

Didier PINCHON[1],Pierre SIOHAN[2]

[1]Laboratoire MIP, Université Paul Sabatier
31062 Toulouse Cedex, France

[2]CNET/DMR (CCETT), Groupe France Telecom
Rue du Clos Courtel, 35512 Cesson Sévigné Cedex, France
pinchon@cict.fr, pierre.siohan@cnet.francetelecom.fr

Résumé – Une nouvelle méthode de synthèse est proposée pour les filtres numériques de transmission. Par l'utilisation de l'analogie entre banc de filtres orthogonal à 2 sous-bandes et paire de Nyquist à interférence nulle entre symboles (IES), nous obtenons, pour un facteur de suréchantillonnage égal à 4, une implantation sous la forme d'une structure en treillis. Il en résulte une solution qui satisfait les caractéristiques idéales pour une paire de filtres en racine de Nyquist : une IES nulle, une paire adaptée, une linéarité de phase des filtres. Par une optimisation des coefficients treillis nous obtenons ensuite des filtres sélectifs en fréquence.

Abstract – A new design method is proposed for digital transmission filters. Taking advantage of the analogy between two-band orthogonal filterbanks and Nyquist pairs without InterSymbol Interference (ISI), we get for an oversampling factor of 4, an implementation scheme based on a lattice structure. As a result we obtain a solution which satisfies all ideal features with a pair of square-root Nyquist filters : zero ISI, matched pair, phase linearity. By an optimization of the lattice coefficients we get afterwards selective filters.

1 Introduction

Un système de transmission comprend des filtres d'émission et de réception. Actuellement ces filtres sont, le plus souvent, implantés sous forme numérique, comme le montre la figure 1 dans le cas d'un facteur de suréchantillonnage de M. Le but de notre article est de proposer une méthode de conception d'une telle paire de filtres $(F_T(z), F_R(z))$.

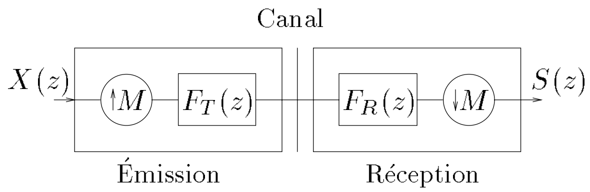

FIG. 1 – *Système de communication à facteur de suréchantillonnage égal à M.*

Divers types de contraintes sont imposées à ces filtres d'émission et de réception. Leur caractéristique fréquentielle doit être celle d'un passe-bas, dont on spécifie le facteur de retombée ("roll-off") , que l'on note ρ. Ceci correspond à une bande passante allant de 0 à $(1-\rho)\frac{\pi}{M}$ et une bande atténuée de $(1+\rho)\frac{\pi}{M}$ à π. Par ailleurs, si la paire de filtres $(F_T(z), F_R(z))$ n'est pas une paire dite de Nyquist il va en résulter de l'Interférence Entre Symboles (IES).

Une technique habituelle, voir par exemple [1], pour satisfaire les contraintes de sélectivité fréquentielle et de faible IES, est de synthétiser un filtre de Nyquist puis de le factoriser. Cette approche produit des filtres à phase non linéaire, or on sait qu'une caractéristique phase/fréquence parfaitement linéaire peut présenter de l'intérêt. Si on suppose à présent que le système complet n'introduit pas d'IES et que le canal est blanc et gaussien, on sait que la paire adaptée, i.e. $F_T(z) = z^{-N}F_R(z^{-1})$, où N est l'ordre du filtre, est la solution optimale du point de vue rapport signal-à-bruit.

Nous décrivons donc une méthode de conception d'une paire de filtres de Nyquist qui possède l'ensemble des caractéristiques requises : sélectivité en fréquence, phase linéaire, IES nulle et paire adaptée. Le cas où $M = 2$ ne permettant pas l'obtention d'une telle solution, on examine le cas où $M = 4$, valeur également très importante d'un point de vue pratique. La méthode de construction s'inspire très largement des relations entre paire de Nyquist et banc de filtres [2].

2 Banc orthogonal à 2 sous bandes

Un banc de filtres à 2 sous-bandes et à décimation maximale comprend, dans une implantation dite "dos-à-dos", 2 blocs principaux, avec une partie analyse et une autre de synthèse. L'analyse réalise une décomposition en 2 sous-canaux avec pour chaque canal un filtre d'analyse, noté $H_k(z), k = 0, 1$, et une décimation par 2. Pour chaque sous-bande, le bloc de synthèse réalise un suréchantillonage d'un facteur 2 et un filtrage par un filtre noté $G_k(z)$, $k = 0, 1$, les 2 voies sont ensuite additionnées pour former le signal de sortie, voir par exemple [3].

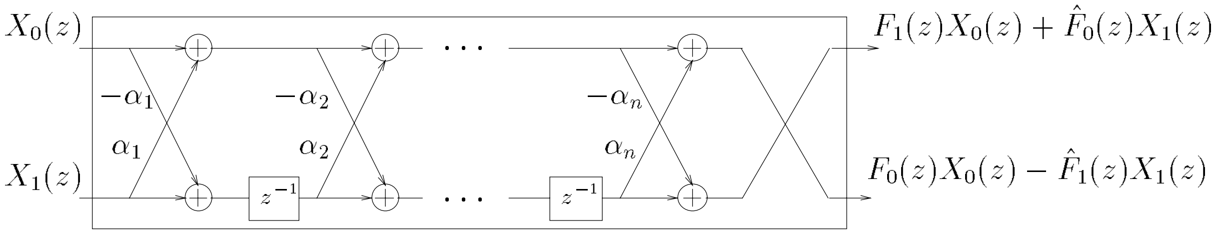

FIG. 2 – *Structure treillis à sorties inversées.*

Dans le cas orthogonal, le banc satisfait la condition de reconstruction parfaite (RP). C'est-à-dire que, d'une part, le repliement provoqué par la décimation est annulé par un choix de filtres tel que $G_0(z) = H_1(-z), G_1(z) = -H_0(-z)$, et, d'autre part, la matrice polyphase du banc d'analyse a pour déterminant un monôme. Soit $\mathbf{H}_{[H_0,H_1]}(z)$ cette matrice

$$\mathbf{H}_{[H_0,H_1]}(z) = \begin{bmatrix} H_{0,0}(z) & H_{0,1}(z) \\ H_{1,0}(z) & H_{1,1}(z) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

avec $H_{k,l}(z)$ les composantes polyphases de chaque filtre $H_k(z)$, i.e. $H_k(z) = \sum_{l=0}^{1} z^{-l} H_{k,l}(z^2)$. Pour un banc orthogonal composé de filtres de longueur $2n$, la condition de RP impose que Det $\mathbf{H}_{[H_0,H_1]}(z)$ soit un monôme et s'exprime donc par

$$H_{0,0}(z)H_{1,1}(z) - H_{1,0}(z)H_{0,1}(z) = \beta z^{-(n-1)}, \quad (2)$$

avec β une constante non nulle. Dans ces conditions le signal de sortie du banc est égal, à une constante multiplicative près que l'on peut normaliser à 1, et à un retard $(2n-1)$ près, au signal d'entrée. Pour obtenir un tel résultat la paire d'analyse doit être choisie telle que $H_1(z) = z^{-(2n-1)}H_0(-z^{-1})$, les filtres sont alors dits conjugués en quadrature (CQF). Soit $\hat{Q}(z)$ le filtre miroir de $Q(z)$, filtre d'ordre m, i.e. $\hat{Q}(z) = z^{-m}Q(z^{-1})$. Avec cette notation on peut vérifier que la paire CQF vérifie les relations $H_{0,1}(z) = -\hat{H}_{1,0}(z)$ et $H_{1,1}(z) = \hat{H}_{0,0}(z)$. La condition de RP peut alors se réécrire

$$H_{0,0}(z)\hat{H}_{0,0}(z) + H_{1,0}(z)\hat{H}_{1,0}(z) = \beta z^{-(n-1)}. \quad (3)$$

La matrice $\mathbf{H}_{[H_0,H_1]}(z)$ est paraunitaire et elle admet une factorisation sous la forme [3]

$$\mathbf{H}_{[H_0,H_1]}(z) = g\mathbf{A}(\alpha_n)\Lambda(z)\mathbf{A}(\alpha_{n-1})\ldots\Lambda(z)\mathbf{A}(\alpha_1). \quad (4)$$

où g est une constante non nulle, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont n nombres réels et les matrices $\mathbf{A}(\alpha)$, pour α réel, et $\Lambda(z)$ sont définies par

$$\mathbf{A}(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Il en résulte un schéma de réalisation comprenant n cellules treillis élémentaires, où chacune est associée à un coefficient α [3].

3 Paires adaptées à phase linéaire

Un seul filtre symétrique, que l'on note $F(z)$, suffit pour caractériser la paire adaptée à phase linéaire, en effet on a

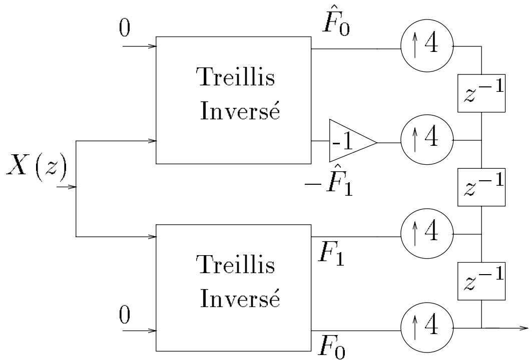

FIG. 3 – *Filtre d'émission pour une paire de Nyquist.*

alors $F_T(z) = F_R(z) = F(z)$. Soit $L = 4n+r$, avec $0 \leq r \leq 3$, la longueur du filtre $F(z)$ et $F(z) = \sum_{l=0}^{3} z^{-l} F_l(z^4)$ sa décomposition polyphase. Dans les références [4, 5], nous montrons qu'il existe 3 possibilités pour obtenir une paire (F, F) à IES nulle. En résumé, et avec γ un nombre réel non nul, il vient

– Pour $L = 4n$: $F_3(z) = \hat{F}_0(z)$ et $F_2(z) = \hat{F}_1(z)$, et la condition d'IES nulle s'écrit

$$F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1(z)\hat{F}_1(z) = \gamma z^{-(n-1)}. \quad (6)$$

– Pour $L = 4n + 1$: il n'existe pas de solution à IES nulle.

– Pour $L = 4n + 2$: $F_0(z) = \hat{F}_1(z)$ et $F_3(z) = \hat{F}_2(z)$, et la condition d'IES nulle s'écrit

$$F_1(z)\hat{F}_1(z) + z^{-1}F_2(z)\hat{F}_2(z) = \gamma z^{-n}. \quad (7)$$

– Pour $L = 4n + 3$, il vient : $F_2(z) = \hat{F}_0(z), F_1(z) = \hat{F}_1(z), F_3(z) = \hat{F}_3(z)$, et la condition s'écrit

$$2F_0(z)\hat{F}_0(z) + F_1^2(z) + z^{-1}F_3^2(z) = \gamma z^{-n} \quad (8)$$

3.1 Cas de la longueur $L = 4n$

L'analogie entre les équations (3) et (6) permet de mettre en évidence l'équivalence entre bancs de filtres orthogonaux à 2 sous-bandes et paire adaptée à phase linéaire avec $M = 4$. Ainsi en reprenant une variante de la structure treillis du banc à 2 sous-bandes, voir par exemple [3], on obtient la structure de filtre d'émission représentée par les figures 2 et 3.

3.2 Cas de la longueur $L = 4n + 2$

Dans les références [4, 5] nous établissons une connection entre les paires (F, F) de longueur $4n+2$ et celles de longueur $4n$. Elle peut se formaliser par le théorème qui suit.

Théorème 1.– *Soit $F(z)$ un filtre symétrique de longueur $4n+2$ tel que (F,F) soit une paire à IES nulle, alors si l'on note par $F_i(z), i=0,\ldots,3$ ses composantes polyphases, $F_0(z)$ est de degré strictement inférieur à n et $F_1(z)$ peut être écrit $F_1(z)=z^{-1}K_1(z)$. Ainsi nous avons $\hat{K}_1(z)=F_0(z)$ et le filtre $\bar{F}(z)$ avec pour composantes polyphases $[F_0(z),F_2(z),F_3(z),K_1(z)]$ est symétrique de longueur $4n$ et produit une paire de filtres $(\bar{F},\bar{F})$ à IES nulle.*

3.3 Cas de la longueur $L=4n+3$

La relation (8) permet d'obtenir une structure treillis caractérisant les paires (F,F) à IES nulle lorsque $F(z)$ est un filtre symétrique de longueur $4n+3$. On définit les matrices $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{M}(a)$ pour a réel, par

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z^{-1} \\ 0 & 0 & z^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathbf{M}(a)=\begin{bmatrix} 1 & a & -\frac{a^2}{2} & 0 \\ -a & 1-\frac{a^2}{2} & a & 0 \\ -\frac{a^2}{2} & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\frac{a^2}{2} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

Théorème 2.– *Soit $F(z)$ un filtre symétrique de longueur $4n+3$ et $F_i(z), i=0,\ldots,3$ ses composantes polyphases. Alors (F,F) est une paire à IES nulle si et seulement si il existe une suite de coefficients $\alpha_i, i=1,\ldots,n+1$ et un coefficient g, appelés coefficients canoniques, tels que*

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ F_2(z) \\ F_3(z) \end{bmatrix} = g\mathbf{M}(a_1)\mathbf{Z}\mathbf{M}(a_2)\ldots\mathbf{M}(a_n)\mathbf{Z}\begin{bmatrix} 1 \\ a_{n+1} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Démonstration.– Soit $K(z)$ un filtre symétrique de longueur $4n-1$, donnant une paire (K,K) à IES nulle et $K_i(z), i=0,\ldots,3$ ses composantes polyphases. Soit a_1 un nombre réel et $F(z)$ le filtre dont les composantes polyphases sont définies par l'égalité

$$[F_0,F_1,F_2,F_3]^T=\mathbf{M}(a_1)\mathbf{Z}\,[K_0,K_1,K_2,K_3]^T. \tag{12}$$

On a

$$F_0(z)=K_0(z)-\frac{a_1^2}{2}z^{-1}K_2(z)+a_1z^{-1}K_3(z), \tag{13}$$

$$F_1(z)=-a_1K_0(z)-a_1z^{-1}K_2(z)+(1-\frac{a_1^2}{2})z^{-1}K_3(z), \tag{14}$$

$$F_2(z)=-\frac{a_1^2}{2}K_0(z)+z^{-1}K_2(z)+a_1z^{-1}K_3(z), \tag{15}$$

$$F_3(z)=(1+\frac{a_1^2}{2})K_1(z). \tag{16}$$

Le membre de gauche de l'équation (8) est alors égal à

$$\frac{(2+a_1^2)^2}{4}z^{-1}\Big(2K_0(z)\hat{K}_0(z)+K_1^2(z)+z^{-1}K_3^2(z)\Big), \tag{17}$$

ce qui prouve que (F,F) est à IES nulle. Comme un filtre symétrique de longueur 3, donnant toujours une paire à IES nulle, a ses composantes polyphases proportionnelles à $[1,a,1,0]$ pour une constante a, la formule (11) donne des filtres symétriques de longueur $4n+3$ donnant des paires à IES nulle. Réciproquement posons $a_1=-F_1(0)/F_0(0)$. D'après la relation (8) pour $z^{-1}=0$, on obtient $\hat{F}_0(0)=F_2(0)=\frac{a_1}{2}F_1(0)$ d'où il résulte que les polynômes en z^{-1}

$$P=-\frac{a_1^2}{2}F_0-a_1F_1+F_2,\ Q=a_1F_0+(1-\frac{a_1^2}{2})F_1+a_1F_2$$

vérifient $P(0)=Q(0)=0$ et sont donc divisibles par z^{-1}. On vérifie alors que les fonctions $K_i(z)$ définies par

$$K_0(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2}\left(F_0(z)-a_1F_1(z)-\frac{a_1^2}{2}F_2(z)\right), \tag{18}$$

$$K_1(z) = \frac{2}{2+a_1^2}F_3(z), \tag{19}$$

$$K_2(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2}\left(P(z)\ \mathrm{quo}\ z^{-1}\right), \tag{20}$$

$$K_3(z) = \frac{4}{(2+a_1^2)^2}\left(Q(z)\ \mathrm{quo}\ z^{-1}\right), \tag{21}$$

sont les composantes polyphases d'un filtre symétrique de longueur $4n-1$ et vérifient les relations (13) à (16), ce qui termine la démonstration du théorème 2.

Les relations (13) à (16) servent également de base à la démonstration du résultat suivant.

Théorème 3.– *Soit $F(z)$ un filtre symétrique de longueur $4n+3$ tel que (F,F) soit à IES nulle, et g, $a_i, i=1,\ldots,n+1$ ses coefficients canoniques. Si a_1 tend vers ∞ et g tend vers 0 de telle sorte que $-\frac{1}{2}ga_1^2$ tende vers une limite finie g', les coefficients $a_i, i=2,\ldots,n+1$ restant fixes, alors $F(z)$ tend vers $z^{-2}\tilde{K}(z)$ où $\tilde{K}(z)$ est un filtre symétrique de longueur $4n-1$ produisant une paire $(\tilde{K},\tilde{K})$ à IES nulle et dont les coefficients canoniques sont g' et $(-1)^{i+1}a_i, i=2,\ldots,n+1$.*

4 Méthode de synthèse, résultats

Pour un filtre $F(z)$ de longueur donnée L, différente de $4n+1$, et pour une valeur fixée du facteur ρ de retombée, nous cherchons à minimiser la fonction coût

$$\Phi(F)=\sup\{w_P\,(1-|F(1)|)^2, w_C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-|F(e^{j\frac{\pi}{8}})|\right)^2,$$

$$w_S\sup_{[\omega_S,\pi]}|F(e^{j\omega})|^2\}. \tag{22}$$

Nous utilisons l'algorithme FSQP ("Feasible Sequential Quadratic Programming") développé par l'équipe de A.L. Tits [6] pour la recherche du minimum d'un ensemble de fonctions coût régulières non linéaires soumises à des contraintes générales, régulières et non linéaires. Comme cette méthode est une méthode d'optimisation locale, le choix d'un point initial est nécessaire. Pour un poids donné w dans la bande d'arrêt et un poids égal à 1 à l'origine et

Coefficients treillis		Coefficients transversaux			
α_1	-3.1848708937	f_0	$-1.033698\,10^{-4}$	f_{11}	$8.074275371845\,10^{-3}$
α_2	$2.648518499\,10^{-1}$	f_1	$-3.6954272174\,10^{-4}$	f_{12}	$1.5774357742194\,10^{-2}$
α_3	-2.9385797132	f_2	$6.60549905248\,10^{-4}$	f_{13}	$1.2603068512975\,10^{-2}$
α_4	$-9.349457966\,10^{-1}$	f_3	$-1.09979829792\,10^{-4}$	f_{14}	$-6.358804372375\,10^{-3}$
α_5	$9.246893837\,10^{-1}$	f_4	$4.31563793685\,10^{-4}$	f_{15}	$-3.3366501346017\,10^{-2}$
α_6	$-1.308356726\,10^{-1}$	f_5	$6.08998879046\,10^{-4}$	f_{16}	$-4.6538674170018\,10^{-2}$
α_7	3.6683584963	f_6	$6.39123817678\,10^{-4}$	f_{17}	$-2.1044564354449\,10^{-2}$
α_8	$-6.126257549\,10^{-1}$	f_7	$-7.82626716253\,10^{-4}$	f_{18}	$5.1214636348857\,10^{-2}$
α_9	-1.2465410017	f_8	$-3.761395765875\,10^{-3}$	f_{19}	$1.51186813816588\,10^{-1}$
α_{10}	$-1.439677875\,10^{-1}$	f_9	$-4.983816032565\,10^{-3}$	f_{20}	$2.39358058463701\,10^{-1}$
α_{11}	-3.5749582735	f_{10}	$-9.24070721312\,10^{-4}$	f_{21}	$2.74720061562686\,10^{-1}$

TAB. 1 – *Coefficients treillis et tranversaux de l'exemple avec $L = 43$ et $\rho = 0.5$ ($f_{42-i} = f_i$).*

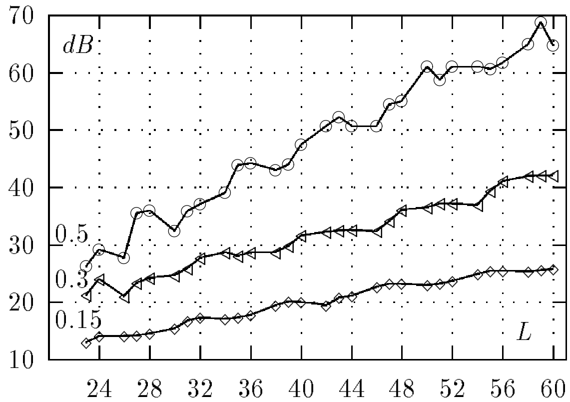

FIG. 4 – *Meilleure atténuation pour $\rho = 0.15, 0.3, 0.5$.*

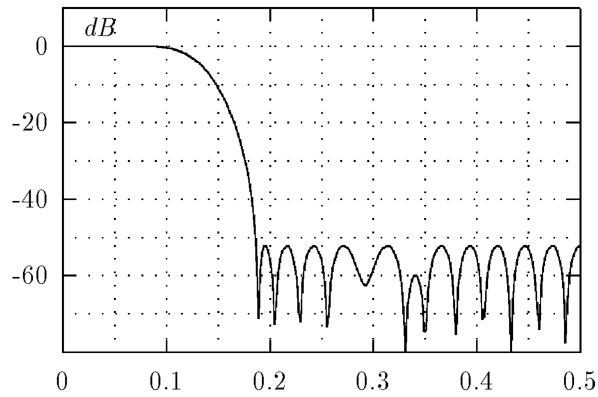

FIG. 5 – *Filtre d'émission pour $L = 43$ et $\rho = 0.5$.*

en la fréquence de Nyquist, c'est-à-dire $\pi/8$, nous calculons un filtre initial F^{init} optimal pour la norme du minimax. Ce filtre F^{init} est ensuite utilisé pour calculer directement un ensemble de coefficients treillis pour un filtre produisant une paire adaptée à IES nulle. Puisque F^{init} ne produit pas lui-même une paire adaptée à IES nulle, l'identification entre les deux ensembles de coefficients, les coefficients transversaux de F^{init} et les coefficients treillis, n'est pas exactement réalisée. Nous obtenons par conséquent un filtre différent, noté $\bar{F}^{init}$, dont les coefficients treillis sont considérés comme point initial du problème d'optimisation décrit par (22). Pour ce problème, nous fixons $w_P = 1, w_C = 2, w_S = 0.5$.

De plus, pour toute structure treillis optimisée pour une valeur donnée ρ_0, nous utilisons également un algorithme de "continuation" pour obtenir une structure treillis optimisée pour une valeur ρ_1 différente en considérant une suite de valeur intermédiaires pour ρ: le résultat de la structure treillis optimisée pour une valeur de ρ dans la suite est le point initial pour la valeur suivante de ρ.

La figure 4 montre la meilleure atténuation dans la bande d'arrêt que nous avons pu obtenir pour une longueur et un facteur de retombée fixés.

Considérons par exemple les valeurs $L = 43$ et $\rho = 0.5$: la meilleure atténuation, obtenue par optimisation directe, est égale à 52.28 dB. La réponse fréquentielle du filtre d'émission correspondant, F^{opt}, est donnée par la figure 5. Les coefficients transversaux et les coefficients de la structure treillis sont donnés dans la table 1.

5 Remerciements

Les auteurs remercient le Professeur A. L. Tits pour leur avoir transmis le logiciel CSFQP.

Références

[1] M. Renfors and T. Saramäki. Pulse-shaping filters for digital transmission systems. In *Proceedings Globecom'92 (Orlando, USA)*, December 1992.

[2] P. Siohan and F. Moreau de Saint-Martin. "New designs of linear-phase transmitter and receiver filters for digital transmission systems". *IEEE Transactions on Circuits and Systems II*, 46(4):428–433, April 1999.

[3] P. P. Vaidyanathan. *Multirate systems and filter banks.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, New-York, New Jersey, 1993.

[4] P. Siohan and D. Pinchon. Procédé de réalisation de filtres numériques de Nyquist à interférences nulles entre symboles, et dispositif de filtrage correspondant. Patent 98/09958, 1998.

[5] D. Pinchon and P. Siohan. "Design of zero ISI digital transmission filters based on a lattice structure". In *Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Electronics, Circuits and Systems (Paphos, Cyprus)*, September 1999.

[6] C. T. Lawrence and A. L. Tits. "Nonlinear equality constraints in feasible sequential quadratic programming". *Optimization Methods and Software*, 6:265–282, 1996.