

# Détection fiable des pannes dans les systèmes de navigation par satellites

Bacem BAKHACHE<sup>1</sup>, Igor NIKIFOROV<sup>1</sup>

<sup>1</sup>UTT - LM2S

12, rue Marie Curie, B.P. 2060, 10010 Troyes cedex, France

bacem.bakhache@univ-troyes.fr, Igor.Nikiforov@univ-troyes.fr

**Résumé** – L’objet de cet article est d’étudier une nouvelle approche de *détection fiable* de changements brusques (ruptures) dans un système stochastique. Il y a un certain nombre d’applications où le problème de sécurité est primordial. Dans ce type d’application, l’utilisateur exige une détection *fiable* de ruptures, autrement dit: une détection pendant une durée donnée avec une faible probabilité de non détection pour une probabilité de fausse alarme fixée *a priori*. Nous envisageons comme application, le contrôle d’intégrité du système de positionnement et de navigation par satellites GPS.

**Abstract** – The goal of this paper is to give a new approach to the *reliable detection* of abrupt changes in stochastic systems. There are applications where the problem of security is extremely important. The users impose a constraint on the maximum delay for the detection in such a case. Specifically, they fix the probability of missed detection within a given time-to-alarm and the probability of false alarms. The application of the proposed algorithms to the problem of the GPS integrity monitoring is also discussed in the paper.

## 1 Introduction

Les systèmes de mesure utilisent des sources d’information multiples ou capteurs pour fournir une estimation précise d’un certain paramètre physique. Dans des conditions normales de fonctionnement, les signaux de sortie de ces systèmes contiennent des informations utiles entachées des erreurs de fonctionnement normales. Si l’un des capteurs tombe en panne, alors les signaux de sortie impliquent des erreurs supplémentaires qui sont manifestement indésirables. Tout d’abord, il nous faut *détecter* la présence d’une panne et *localiser* cette panne. Ensuite il faut *reconfigurer* le système de mesure, afin d’éliminer le capteur défaillant. Il y a un certain nombre d’application où le problème de sécurité est primordial. L’utilisateur de ce genre d’application exige une détection *fiable*, autrement dit: une détection pendant une durée donnée et avec une faible probabilité de non détection pour une probabilité de fausse alarme fixée *a priori*.

Une approche de détection fiable pour ce genre d’application est proposée. Cette approche est fondée sur les deux principes suivants: premièrement, il nous faut détecter seulement les pannes qui causent des erreurs d’estimation plus grandes qu’un certain seuil permis; deuxièmement, on fixe *a priori* un retard maximum  $\tau_r$  pour la détection des pannes et on considère toutes les détections avec un retard plus grand que  $\tau_r$  comme ratées. Afin d’illustrer les propriétés de la détection fiable, on présente l’application de cette approche au problème du contrôle de l’intégrité du système de navigation par satellite GPS.

## 2 Critère

Soit  $(Y_k)_{k \geq 1}$  une suite aléatoire observée séquentiellement telle que  $\{Y_1, \dots, Y_{\nu-1}\} \sim P_0$  et  $\{Y_\nu, Y_{\nu+1}, \dots\} \sim P_1$ , où  $P_0$  et  $P_1$  sont deux lois de distribution connues et  $\nu$  est l’instant (inconnu) de rupture. Soit  $P_\nu$  la distribution des observations  $Y_1, \dots, Y_{\nu-1}, Y_\nu, \dots$ , lorsque  $\nu = 1, 2, \dots$  et  $P_\infty = P_0$ . L’espérance mathématique de la variable aléatoire  $\xi = \xi(Y_1, \dots, Y_\nu, \dots)$ , où  $\{Y_1, \dots, Y_{\nu-1}, Y_\nu, \dots\} \sim P_\nu$ , sera désignée par  $\mathbb{E}_\nu(\xi)$  et la probabilité de l’événement  $\xi \in \Xi$  par  $\mathbb{P}_\nu(\xi \in \Xi)$ . Le problème consiste à détecter la rupture dans la suite  $(Y_k)_{k \geq 1}$ , et les algorithmes de détection doivent calculer l’instant  $N$  de détection de rupture (l’instant d’arrêt). Le critère d’optimalité traditionnel, introduit par Lorden, minimise le pire retard moyen à la détection:

$$\tau^* = \sup_{\nu \geq 1} \text{esssup} \mathbb{E}_\nu(N - \nu + 1 | N \geq \nu, Y_1, \dots, Y_{\nu-1}),$$

pour une valeur  $T = \mathbb{E}_0(N)$ , donnée *a priori*, de la durée moyenne avant une fausse alarme. Le nouveau critère proposé pour la détection *fiable* consiste à minimiser le “pire cas” de la probabilité de non détection:

$$P^* = \sup_{\nu \geq 1} \text{esssup} \mathbb{P}_\nu(N - \nu + 1 > \tau_r | N \geq \nu, Y_1, \dots, Y_{\nu-1}),$$

pour une probabilité de fausse alarme  $\mathbb{P}_0(N < M)$  donnée *a priori*, où  $M$  est une durée donnée.

## 3 Contrôle de l’intégrité du système GPS

Pour chaque phase de vol l’Organisation de l’Aviation Civile Internationale (OACI) a défini les exigences : probabilité de

fausse alarme  $P_{fad}$ , probabilité de non détection  $P_{ndd}$ , temps de réaction  $\tau_r$  et les limites (horizontale et verticale) des erreurs permises  $HL$  et  $VL$ , que doit respecter un système de navigation universel. Comme la figure 1 le montre, la limite de protection horizontale  $HL$  (Horizontal Limit) est le rayon d'un disque horizontal, centré sur la vraie position du véhicule (récepteur), qui doit contenir la position horizontale estimée. La limite de protection verticale  $VL$  (Vertical Limit) est la moitié d'un segment vertical, centré sur la vraie position du véhicule et qui doit contenir la position verticale estimée. Le temps de réaction  $\tau_r$  est le délai permis pour détecter une panne avec la probabilité de non détection  $P_{ndd}$  et le taux de fausse alarme  $P_{fad}$ . Autrement dit, un algorithme de détection doit être capable de détecter toute panne qui cause une erreur supérieure à  $HL$  ou à  $VL$  dans le délai permis en satisfaisant les probabilités de fausse alarme et de non détection exigées. On peut décomposer le problème du contrôle d'intégrité d'un

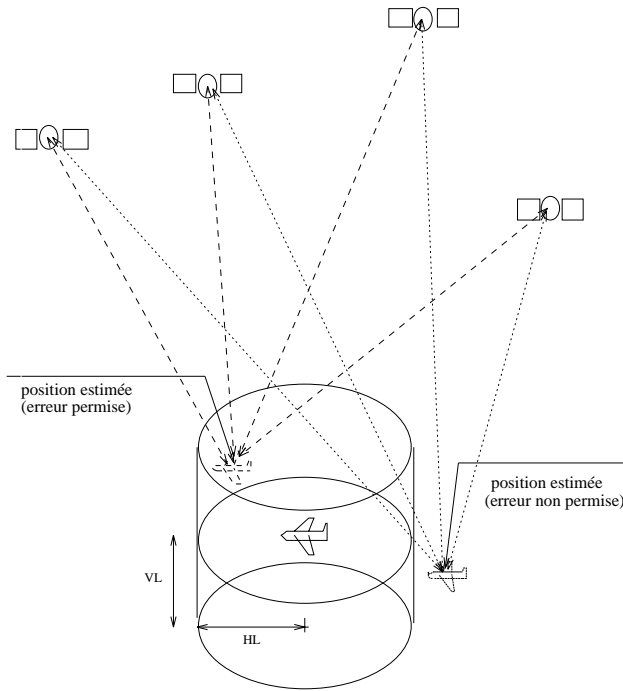


Figure 1: la zone de protection.

système de navigation en deux étapes: détection de panne; identification et élimination éventuelle de l'origine de la panne. Dans ce papier, on va étudier l'étape détection de panne au niveau des récepteurs GPS. Pour cela deux algorithmes de détection sont possibles: les méthodes *snapshot*, actuellement utilisées dans les récepteurs, qui exploitent la redondance des informations fournies par les mesures instantanées, et les méthodes *séquentielles* qui exploitent cette redondance dans les mesures instantanées et les mesures précédentes. La principale limitation des algorithmes *snapshot* est leur manque de disponibilité. L'approche séquentielle va améliorer cette situation, le but de cet article est de le montrer en utilisant la comparaison entre les algorithmes.

## 4 Modèle du système GPS

Les mesures du système GPS peuvent être modélisées par l'équation régressive suivante:

$$Y = HX + b,$$

où  $Y \in \mathbb{R}^n$  est la différence entre le vecteur des pseudo-distances mesurées et celui des pseudo-distances estimées,  $X \in \mathbb{R}^4$  est un vecteur inconnu (formé par la position du récepteur et son biais d'horloge),  $H$  est la matrice des cosinus directeurs utilisateur-satellites, de dimension  $[n \times 4]$ ,  $n \geq 5$  est le nombre des satellites visibles,  $b$  est un bruit gaussien affectant les mesures tel que  $b \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n)$ .

## 5 Impact de la panne

On suppose qu'une seule panne  $\Upsilon_l(t, \nu)$  peut tomber à la fois sur l'un des  $n$  canaux GPS. On représente cette panne par un biais additif affectant les mesures de pseudo-distances du canal  $l$ :

$$Y_k = HX_k + b_k + \Upsilon_l(k, \nu), \Upsilon_l(k, \nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < \nu \\ \Upsilon_l & \text{si } k \geq \nu \end{cases}, \quad (1)$$

où  $\Upsilon_l = (0 \dots 0 \pm B_l 0 \dots 0)$ ,  $\nu$  est l'instant d'arrivée de la panne et  $B_l (> 0)$  est son amplitude. Cette panne implique une erreur systématique  $e$  sur le vecteur estimé  $\hat{X}$  telle que  $e = E(\hat{X} - X) = A\Upsilon_l$ , où  $A = (H^T H)^{-1} H^T$ . Les impacts de cette erreur sur le plan horizontal et sur l'axe vertical sont donnés par:

$$e_h = \pm \sqrt{A_{1l}^2 + A_{2l}^2} B_l, \quad e_v = \pm A_{3l} B_l, \quad (2)$$

où  $A_{ij}$  est l'élément  $ij$  ( $i^{\text{ème}}$  ligne et  $j^{\text{ème}}$  colonne) de la matrice  $A$ . Notons que ces erreurs dépendent de l'amplitude de la panne et de la constellation des satellites (via les paramètres  $A_{1l}$ ,  $A_{2l}$  et  $A_{3l}$ ). Donc une panne de faible amplitude peut impliquer une erreur grave si la géométrie des satellites est mauvaise, et inversement, une panne de grande amplitude peut impliquer une petite erreur si on a une bonne géométrie.

## 6 Détection minimax

Soit  $(Y_k)_{k \geq 1}$  la sortie du modèle (1). Le problème de détection de panne  $\Upsilon_l(t, \nu)$  se distingue par le fait que le vecteur *non aléatoire*  $X$  est inconnu. Définissons le problème du test des hypothèses suivantes [1]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1 &= \{Y \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2 I_n); \theta = HX + \Upsilon_l\} \text{ et} \\ \mathcal{H}_0 &= \{Y \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2 I_n); \theta = HX\}. \end{aligned}$$

Ce qui nous intéresse, c'est de détecter une panne  $\Upsilon_l(t, \nu)$ , tout en considérant  $X$  comme un paramètre *inconnu* du modèle (1). La conception de l'algorithme *minimax* consiste à trouver le couple de valeurs  $X^1$  (correspond à l'hypothèse  $\mathcal{H}_1$ ) et  $X^0$  (correspond à l'hypothèse  $\mathcal{H}_0$ ) les *moins favorables*, pour lequel l'information de Kullback-Leibler  $\rho$  est minimale, et à calculer le rapport de vraisemblance de l'algorithme optimal pour ces valeurs [1]. L'information de Kullback-Leibler  $\rho = \rho(X^0, X^1)$  est donnée par

$$\rho = \frac{1}{2\sigma^2} \|H(X^1 - X^0) + \Upsilon_l\|^2.$$

On note que  $\rho$  est une fonction de  $x = X^1 - X^0$  :

$$\rho(x) = \frac{1}{2\sigma^2} \|Hx + \Upsilon_l\|^2.$$

Il nous faut, donc, trouver un point  $x^*$  qui réalise le minimum de la fonction  $\rho : x \mapsto \rho(x)$ . Pour trouver les points critiques, on résout le système d'équations suivant :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\rho(x)) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{1}{2\sigma^2} \|Hx + \Upsilon_l\|^2\right) = 0.$$

Finalement, le point critique est

$$x^* = -(H^T H)^{-1} H^T \Upsilon_l.$$

La matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_1 \partial x_4} \\ \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_2 \partial x_4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_4 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_4 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \rho_{1,0}(x)}{\partial x_4^2} \end{pmatrix} = H^T H,$$

où  $x_i$  est l'élément  $i$  du vecteur  $x \in \mathbb{R}^4$ , est définie positive. C'est-à-dire, la fonction  $\rho(x)$  admet en  $x^*$  le minimum et la valeur minimale de l'information de Kullback-Leibler est

$$\rho(x^*) = \frac{1}{2\sigma^2} \Upsilon_l^T P \Upsilon_l, \quad (3)$$

où  $P = I - H(H^T H)^{-1} H^T$  est la matrice de projection, rang  $P = n - 4$ . Donc, le rapport de vraisemblance pour les observations  $Y_k, \dots, Y_t$  correspondant à  $x^*$  est

$$S_k^t(Y_k, \dots, Y_t | x^*) = \sum_{i=k}^t \frac{1}{\sigma^2} \Upsilon_i^T P Y_i - \frac{t-k+1}{2\sigma^2} \Upsilon_l^T P \Upsilon_l.$$

## 7 Algorithme snapshot

La règle d'arrêt de l'algorithme snapshot est défini par [4]:

$$N_s = \inf\{t \geq 1 : r_t^T r_t \geq h_s\},$$

où  $r_t = P Y_t$  est le vecteur résidu. Les probabilités de fausse alarme  $P_{fa}$  et de non détection  $P_{nd}$  sont définies par:

$$P_{fa} = \mathbb{P}_0(r_t^T r_t \geq h_s); \quad P_{nd} = \mathbb{P}_1(r_t^T r_t < h_s).$$

Si  $t < \nu$ , alors  $r_t$  suit une loi gaussienne de moyenne nulle et donc  $\frac{1}{\sigma^2} r_t^T r_t$  suit une loi  $\chi^2$  centrée de  $d = n - 4$  degrés de liberté. C'est-à-dire

$$P_{fa} = Q_d\left(\frac{h_s}{\sigma^2}\right),$$

où  $Q_d(u) = 1 - \mathcal{P}_d(u)$  et  $\mathcal{P}_d(u)$  est la distribution de la loi  $\chi^2$  centrée à  $d$  degrés de liberté :

$$\mathcal{P}_d(u) = \left[2^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\right]^{-1} \int_0^u e^{-t/2} t^{d/2-1} dt.$$

Pour  $P_{fa}$ ,  $d$  et  $\sigma^2$  donnés, on détermine le seuil  $h_s$  par :

$$h_s = \sigma^2 Q_d^{-1}(P_{fa}),$$

où  $Q_d^{-1}$  est la fonction inverse de la fonction  $Q_d$ .

Si  $t \geq \nu$ , alors  $r_t$  suit une loi gaussienne de moyenne  $P \Upsilon_l$  et donc  $\frac{1}{\sigma^2} r_t^T r_t$  suit une loi  $\chi^2$  non centrée à  $d = n - 4$  degrés

de liberté et de paramètre de non centralité  $\lambda = \frac{1}{\sigma^2} \Upsilon_l^T P \Upsilon_l = \frac{1}{\sigma^2} B_l^2 p_{ll}$ , où  $p_{ll}$  est l'élément  $ll$  de la matrice  $P$ . Donc, la probabilité de non détection du test, en utilisant un seul vecteur  $r_t$ , est :

$$P_{nd} = \mathbb{P}_1(r_t^T r_t < h_s) = \hat{\mathcal{P}}_d\left(\frac{h_s}{\sigma^2}, \lambda\right),$$

où  $\hat{\mathcal{P}}_d(u, \lambda)$  est la distribution de la loi  $\chi^2$  non centrée

$$\hat{\mathcal{P}}_d(u, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} e^{-\lambda/2} \frac{(\lambda/2)^j}{j!} \mathcal{P}_{d+2j}(u).$$

Sachant que le retard à la détection suit une loi géométrique, on déduit que:  $P^*(N_s) = P_{nd}^{\tau_r}$ . Cette probabilité est une fonction de l'amplitude de panne  $B_l$ . En pratique cette amplitude est totalement inconnue, c'est pourquoi on prend pour le calcul l'amplitude du pire cas. D'après l'équation (2), cette amplitude se calcule comme suite:

$$B_l^* = \min\left\{\frac{HL}{\sqrt{A_{1l}^2 + A_{2l}^2}}, \frac{VL}{|A_{3l}|}\right\}, \quad l = 1, \dots, n.$$

**Test de disponibilité.** On détermine à chaque instant  $t$  les probabilités  $P^*(N_s, l)$  pour les  $n$  satellites visibles. On compare  $p = \max\{P^*(N_s, l) \mid l = 1, \dots, n\}$  avec la probabilité de non détection permise  $P_{ndd}$ . Si  $p \leq P_{ndd}$ , alors l'algorithme *snapshot* est disponible. Si  $p > P_{ndd}$ , alors l'algorithme est indisponible.

## 8 Algorithme séquentiel

En effet, l'approche *snapshot* n'est capable de détecter que des pannes de fort rapport signal sur bruit, alors que les algorithmes séquentiels permettent de détecter des pannes de faible rapport signal sur bruit.

La règle d'arrêt du CUSUM adoptée pour notre problème est la suivante [2]:

$$N = \inf\{t \geq 1 : S_t^- \geq h \cup S_t^+ \geq h\}$$

$$S_t^\pm = \max\left(0, S_{t-1} \pm \frac{\tilde{B}_l r_{t,l}}{\sigma^2} - \frac{\tilde{B}_l^2 p_{ll}}{2\sigma^2}\right),$$

où  $r_{t,l}$  est l'élément  $l$  du vecteur  $r_t$ , et  $\tilde{B}_l (> 0)$  est le paramètre à régler. Puisque le numéro  $l$  du canal GPS qui peut tomber en panne est inconnue, il faut appliquer cette même règle d'arrêt à tous les  $n$  satellites visibles et l'instant d'arrêt du test sera donc:

$$N_c = \min\{N^1, \dots, N^n\}.$$

On a ici  $n$  paramètres inconnus  $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n$  à déterminer. D'après le critère proposé, ils sont ceux qui minimisent le pire cas de la probabilité de non détection  $P^*(N_c)$ . Le calcul exact de cette probabilité est très compliqué, c'est pour cela qu'on a déterminé pour lui une borne supérieure:

$$P^*(N_c) \leq \mathbb{P}_1(S_1^{\tau_r} < h),$$

où

$$S_1^{\tau_r} = \sum_{j=1}^{\tau_r} \left(\frac{\tilde{B}_l r_{t,l}}{\sigma^2} - \frac{\tilde{B}_l^2 p_{ll}}{2\sigma^2}\right).$$

Sachant que la somme  $S_1^{\tau_r}$  suit une loi gaussienne, et en fixant  $P^*(N_c)$  à la valeur exigée  $P_{ndd}$  nous avons démontré

que chaque paramètre  $\tilde{B}_l$ ,  $l = 1, \dots, n$ , est la solution de l'équation quadratique:

$$\frac{\tau_r p_{ll}}{2\sigma^2} \tilde{B}_l^2 - \left( \frac{\tau_r p_{ll} B_l^*}{\sigma^2} + \Phi^{-1}(P_{ndd}) \frac{\sqrt{\tau_r p_{ll}}}{\sigma} \right) \tilde{B}_l + h = 0,$$

telle que  $\tilde{B}_l \geq \sqrt{\frac{2h\sigma^2}{\tau_r p_{ll}}}$ , où  $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$  et  $h \sim \log n (P_{fad})^{-1}$  lorsque  $P_{fad} \rightarrow 0$ .

**Test de disponibilité.** On détermine, pour la constellation actuelle des satellites, l'amplitude  $B_{l0}$  de panne (pour les  $n$  canaux GPS) à partir de laquelle on est capable de satisfaire les exigences de l'OACI. Nous avons démontré que  $B_{l0}$  est donné par:

$$B_{l0} = \sigma \frac{\sqrt{2h} - \Phi^{-1}(P_{ndd})}{\sqrt{\tau_r p_{ll}}}, \quad l = 1, \dots, n.$$

Si  $B_{l0} \leq B_l^*$  pour  $l = 1, \dots, n$ , alors l'algorithme séquentiel est disponible (capable de satisfaire les exigences). S'il existe  $l \in [1, n]$  tel que  $B_{l0} > B_l^*$ , alors l'algorithme est indisponible.

## 9 Exemple

Puisque la dégradation volontaire S.A. (Selective Availability) va être arrêtée dans quelques années, le modèle de l'erreur choisi pour faire nos simulations est celui du service S.P.S. (Standard Positioning Service), mais sans la dégradation S.A. On suppose que le bruit des mesures est une suite indépendante gaussienne de variance  $\sigma^2 = 12.5\text{m}$ . Les mesures des pseudo-distances utilisées dans les simulations ont été générées par un simulateur de constellation GPS à partir d'un fichier d'almanach daté de la semaine 977 (temps GPS), entre le 5/10/1998 à 0h00 et le 6/10/1998 à 0h00 avec un pas d'échantillonnage de deux minutes. A cette date, 27 satellites étaient disponibles et valides.

La figure 2 représente le retard à la détection nécessaire pour satisfaire les exigences de l'OACI pour l'approche de vol non-précision et en prenant l'impact sur l'axe vertical. Pour ce type de vol on a:  $VL = 250\text{ft}$ ,  $\tau_r = 10\text{s}$ ,  $P_{fad} = 10^{-5}/h$  et  $P_{ndd} = 10^{-3}$ . Pour tracer ces courbes on a considéré les pannes qui induisent une erreur  $e_v$  sur l'axe vertical égale à la limite de protection verticale  $VL$ . On voit clairement la supériorité de l'algorithme séquentiel: il est disponible (capable de satisfaire les exigences de l'OACI) 37% de la période considérée. L'algorithme snapshot est disponible seulement pendant 8mn (0.56% de la période considérée). Malheureusement, l'algorithme séquentiel présente encore des trous de disponibilité, et le recours à l'aide des satellites auxiliaires ou au système hybride nous paraît indispensable.

## 10 Conclusion

Une nouvelle approche de *détection fiable* de changements brusques dans un système stochastique a été décrite dans cet article. Il nous semble qu'elle est très prometteuse pour les applications où le problème de sécurité est primordial.

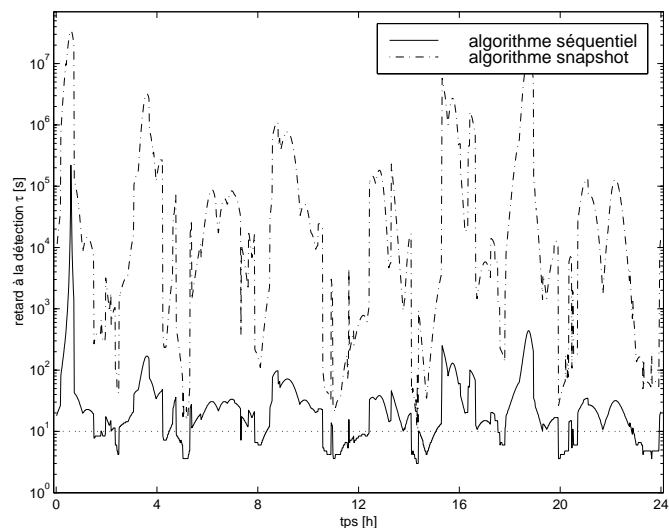


Figure 2: le retard à la détection  $\tau$  des deux algorithmes pour l'impact sur l'axe vertical.

## References

- [1] Basseville M. et Nikiforov I. *Detection of abrupt changes. Theory and applications*. Prentice Hall, Information and System Sciences Series, 1993.
- [2] Nikiforov I.V. *New optimal approach to Global Positioning System/Differential Global Positioning System integrity monitoring*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 19, 5, pp. 1023-1033 ; Sept-Oct 1996.
- [3] Lee Y.C. *Receiver autonomous integrity monitoring (RAIM) capability for sole-means GPS Navigation in the oceanic phase of flight*. IEEE Magazine, pp. 29-36, May, 1992.
- [4] Parkinson B.W. et Axelrad P. *Autonomous GPS integrity monitoring using the pseudorange residual*. Navigation, 35, no.2, pp. 255-274, 1988.
- [5] Younes A., Bakhache B., Nikiforov I. et Benhallam A. *Sequential RAIM : Theory and application to civil aviation needs*. The 11th International Meeting of The Satellite Division of The Institute of Navigation, Nashville, Tennessee, USA, September 15 - 18, 1998 Proceedings of ION, pp. 1993-2002.