

Traitement d'antenne haute résolution pour des signaux non circulaires

P. Gounon⁽¹⁾, C. Adnet⁽²⁾

⁽¹⁾CEPHAG, ENSIEG, Domaine Universitaire, BP 46

38 402 Saint Martin d'Hères, France

⁽²⁾THOMSON CSF AIRSYS RD/RAN

7/9 Rue des Mathurins

92 221 Bagneux

RÉSUMÉ

Nous présentons dans cet article des algorithmes de localisation angulaire de sources non circulaires. Nous montrons comment prendre en compte la nature non circulaire des signaux en traitement d'antenne et développons des extensions des algorithmes MUSIC, Root-MUSIC et Capon. Ces extensions offrent, pour une mise en œuvre relativement simple, des performances sensiblement supérieures aux algorithmes classiques. Les principaux avantages liés à la non circularité concernent la résolution, la variance d'estimation et le nombre de sources localisables. Ces caractéristiques sont illustrées par des simulations.

ABSTRACT

We present in this article an angular location algorithm of non circular sources. We show how to take into account non circularity of signals in array processing and develop an extension of the MUSIC, Root-MUSIC and Capon algorithms. These extensions offer, for an implementation relatively simple, performance appreciably superior to the classic algorithms. The main improvement linked to the non circularity concern the resolution, the variance of estimation and the number of localizable sources. These characteristics are illustrated by simulations.

1 Introduction

L'estimation des paramètres du signal reçu sur une antenne est un problème analysé de façon classique depuis déjà de nombreuses années et la littérature relative à ce sujet est abondante.

Des méthodes basées sur des structures particulières de signaux ont aussi vu le jour. L'objectif de ces approches est d'introduire le maximum d'information a priori sur le signal afin d'améliorer les performances des traitements. Cette information a priori peut être des propriétés de cyclostationnarité ou encore l'utilisation de statistiques d'ordre supérieur à deux pour des signaux non gaussiens.

Plus récemment, plusieurs articles ont analysés les caractéristiques de signaux aléatoires complexes non circulaires [1] [2] [3].

Nous présentons dans cet article une méthode permettant d'introduire cette caractéristique dans les techniques de traitement d'antenne. L'algorithme utilisé pour présenter cette extension est MUSIC mais l'approche utilisée ici peut être généralisée à d'autres algorithmes.

2 Signaux non circulaires

L'objet de cette partie est de rappeler (brièvement) les principales caractéristiques des signaux non circulaires que nous utiliserons par la suite. Précisons dès maintenant que nous ne nous intéresserons pas à des statistiques d'ordre

supérieur à 2. De plus, les notations utilisées dans ce document sont T pour *transposé*, $*$ pour *conjugué* et H pour *transposé et conjugué*.

Nous considérons ici comme non circulaire (sous-entendu à l'ordre 2), des variables aléatoires telles que $E\{ZZ^T\} \neq \mathbf{0}$; ce qui, exprimé en terme de densité de probabilité, signifie qu'il n'existe pas d'angle $\phi \neq k\pi$ tel que Z et $Ze^{i\phi}$ ait la même densité de probabilité.

En traitement d'antenne, la circularité est une propriété qui apparaît naturellement dans l'analyse de signaux à bande étroite, signaux qui comportent souvent une phase aléatoire équirépartie entre 0 et 2π . Elle n'est pas pour autant universelle et l'on trouve de nombreux signaux non circulaires (modulation d'amplitude, modulation binaire de phase, ...).

Pour de tels signaux, les traitements mis en œuvre classiquement et n'utilisant que $E\{ZZ^H\}$ sont sous optimaux. Les gains que l'on peut envisager en effectuant une analyse complète (exploitant $E\{ZZ^H\}$ et $E\{ZZ^T\}$) sont significatifs.

3 Matrice interspectrale non circulaire

Considérons le signal reçu sur une antenne de M capteurs éclairée par P sources :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)$$

avec

- $\mathbf{y}(t) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$: Observation à l'instant t .
- $\mathbf{x}(t) \in \mathcal{C}^{P \times 1}$: Signal émis par les P sources.

- $\mathbf{b}(t) \in \mathcal{C}^{M \times 1}$: Bruit additif.
- $\mathbf{A} \in \mathcal{C}^{M \times P}$: Matrice de transfert.

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2, \dots, a_P]$$

$$\mathbf{a}_k^T = [1, e^{-j\psi_1}, \dots, e^{-j\psi_{M-1}}]$$

On suppose que le signal reçu est à bande étroite autour de ν_0 , que les P sources sont décorréliées et que l'on a $P < M$. Considérons de plus les hypothèses suivantes :

- $E\{\mathbf{b}(t)\} = \mathbf{0}$ et $E\{\mathbf{x}(t)\} = \mathbf{0}$
- $E\{\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^H\} = \sigma^2 \mathbf{Id}$ et $E\{\mathbf{b}(t)\mathbf{b}(t)^T\} = \mathbf{0}$
- $E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H\} = \Gamma_1$ et $E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T\} = \Gamma_2$

La matrice interspectrale classique définie par

$$\mathbf{R} = E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H\} = \mathbf{A}\Gamma_1\mathbf{A}^H + \sigma^2\mathbf{Id} \quad (1)$$

résume complètement les caractéristiques statistiques du signal reçu lorsque les sources sont gaussiennes circulaires. Cependant, si les signaux émis ne sont pas circulaires, il faut non seulement prendre en compte $E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^H\}$ mais aussi $E\{\mathbf{y}(t)\mathbf{y}(t)^T\}$. Ceci peut être réalisé en construisant le vecteur $\mathbf{y}_{nc}(t)$:

$$\mathbf{y}_{nc}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{y}(t)^* \end{bmatrix} \quad (2)$$

Avec ce nouveau vecteur observation, il est possible de définir une matrice interspectrale contenant toutes les caractéristiques statistiques du signal reçu :

$$\mathbf{R}_{nc} = E\{\mathbf{y}_{nc}(t)\mathbf{y}_{nc}(t)^H\} \quad (3)$$

Il est possible de montrer [4] que \mathbf{R}_{nc} , de dimension $2M \times 2M$, s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{R}_{nc} = \mathbf{A}_{nc}\Gamma_{nc}\mathbf{A}_{nc}^H + \sigma^2\mathbf{Id} \quad (4)$$

où $\mathbf{A}_{nc}\Gamma_{nc}\mathbf{A}_{nc}^H$ est de rang $2P$.

Par suite on peut distinguer un sous espace signal et un sous espace bruit engendrés respectivement par les $2P$ premiers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} et par les $2M - 2P$ derniers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} . On peut ainsi, dès lors que l'on dispose d'un vecteur directionnel modèle du signal reçu de mettre en œuvre un algorithme de type MUSIC ou autre.

4 Signaux modulés en amplitude

Considérons le cas de signaux modulés en amplitude. Le signal $s_p(t)$ émis par la source p s'écrit :

$$s_p(t) = e_p(t)e^{-2i\pi\nu_0 t}$$

Après démodulation et filtrage passe-bas, le signal en bande de base peut s'écrire sous la forme :

$$x_p(t) = e_p(t)e^{i\psi_p}$$

Ces signaux ne sont évidemment pas circulaires et de plus :

$$E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^H\} = \Gamma_1 \quad (5)$$

et

$$E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t)^T\} = \Gamma_1\Phi \quad (6)$$

$$\text{avec } \Phi = \begin{bmatrix} e^{i2\psi_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{i2\psi_2} & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & e^{i2\psi_P} \end{bmatrix}$$

Pour cet exemple de signaux, les termes de l'expression (4) se simplifient :

$$\begin{aligned} - \Gamma_{nc} &= \Gamma_1 \\ - \mathbf{A}_{nc} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* \cdot \Phi^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\mathbf{R}_{nc} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^* \cdot \Phi^* \end{bmatrix} \Gamma_1 \begin{bmatrix} \mathbf{A}^H & \Phi^T \cdot \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \quad (7)$$

Cette situation est particulièrement intéressante puisque la dimension du sous espace signal est P alors que la dimension de l'observation est $2M$. Il est alors possible de localiser deux fois plus de sources qu'avec la formulation classique pour des signaux circulaires.

5 MUSIC non circulaire

5.1 Principe

En considérant l'expression (7), la mise en œuvre de l'algorithme MUSIC avec des signaux modulés en amplitude est très similaire à celle de la formulation standard. Après la décomposition en éléments propres de \mathbf{R}_{nc} , on définit les sous espace signal et bruit à partir respectivement des P premiers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} et des $2M - P$ derniers vecteurs propres de \mathbf{R}_{nc} :

$$\mathbf{R}_{nc} = \mathbf{U}_{s_{nc}}\Lambda_{nc}\mathbf{U}_{s_{nc}}^H + \sigma^2\mathbf{U}_{b_{nc}}\mathbf{U}_{b_{nc}}^H$$

Le vecteur modèle se déduit de l'expression de \mathbf{A}_{nc} :

$$\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi) = \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\theta) \\ \mathbf{a}(\theta)^* \cdot e^{2i\Psi} \end{bmatrix}$$

ou $\mathbf{a}(\theta)$ est le vecteur directionnel classique traduisant les déphasages entre capteurs pour une source de paramètre θ . Ce vecteur directionnel dépend de la direction d'arrivée mais aussi de la phase Ψ_p de la source p . Puisque les vecteurs propres associés au bruit sont orthogonaux à \mathbf{A}_{nc} , on obtient lorsque θ et Ψ correspondent aux paramètres effectifs d'une source :

$$\mathbf{U}_{b_{nc}}^H \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi) = 0$$

Ceci conduit donc à la fonctionnelle à maximiser :

$$f(\theta, \Psi) = \frac{1}{\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)^H \mathbf{U}_{b_{nc}} \mathbf{U}_{b_{nc}}^H \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)} \quad (8)$$

La fonctionnelle (8) est à deux dimensions. Cependant, pour chaque valeur de θ donnée, il est possible de calculer analytiquement (cf [4]) la valeur de Ψ maximisant (8). La maximisation de (8) se réduit alors à la maximisation d'une fonctionnelle à une dimension :

$$f(\theta) = \frac{1}{P_{11} - P_{21}} \quad (9)$$

avec

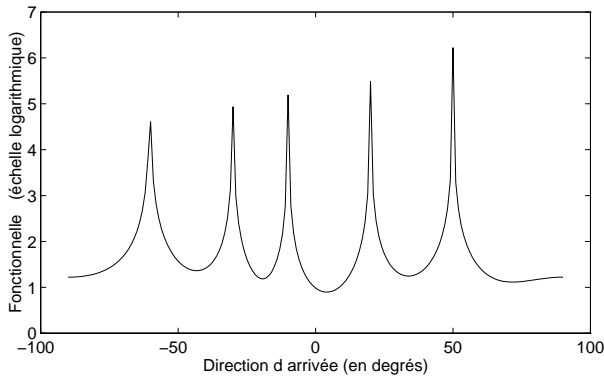


FIG. 1 — localisation de 5 sources à l'aide de 4 capteurs

$$\begin{aligned}
 - \mathbf{U}_{b_nc} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \\
 - P_{11} &= \mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta) \\
 - P_{21} &= \|\mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{U}_2 \mathbf{U}_1^H \mathbf{a}(\theta)\|
 \end{aligned}$$

5.2 Illustrations

Cette section illustre les principales caractéristiques de l'algorithme proposé. Ces résultats, non exhaustifs, sont obtenus à partir de simulations. Ces simulations correspondent à la situation suivante :

- On dispose d'une antenne linéaire de 4 capteurs équidistants. La distance intercapteurs est égale la la moitié de la longueur d'onde du signal à la fréquence de travail.
- Les signaux émis sont des modulations d'amplitude autour de la fréquence de travail. Les P sources sont décorrélées et de même puissance. Le rapport signal sur bruit est de 20 dB.
- Le bruit additif est blanc spatialement. Le nombre de sources est supposé connu. La matrice interspectrale non circulaire est estimée à partir de 100 observations.

5.2.1 Nombre de sources

Comme nous l'avons déjà signalé dans le chapitre précédent, le nombre maximal de sources identifiables est égal à $2(M - 1)$. Il est donc possible de localiser plus de sources que de capteurs. Ceci est illustré sur la figure (1). L'antenne est ici constituée de 4 capteurs et 5 sources ont été simulées. Leurs directions d'arrivée sont égales respectivement à -60° , -30° , -10° , 20° et 50° . Comme on peut le constater sur la figure, ces 5 sources sont parfaitement localisées. Ceci serait impossible avec des signaux non circulaires puisque le nombre maximal de sources localisables serait alors égal à 3.

5.2.2 Variance d'estimation

Un autre point particulièrement intéressant de cet algorithme concerne la variance d'estimation des directions d'arrivée. Nous avons en effet constaté sur de nombreuses simulations que la variance d'estimation est plus faible en utilisant l'algorithme MUSIC non circulaire qu'en utilisant l'al-

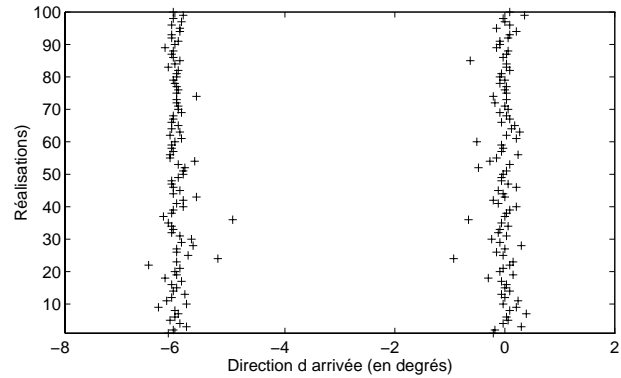


FIG. 2 — Localisation avec MUSIC non circulaire

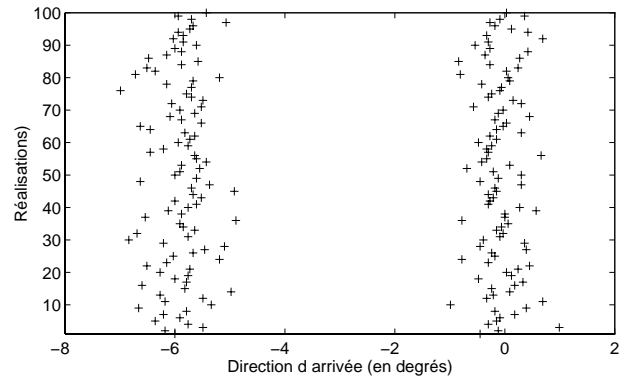


FIG. 3 — Localisation avec MUSIC standard

gorithme MUSIC standard. Ceci est illustré avec les figures (2) et (3).

Deux sources de directions d'arrivée égales à -6° et 0° sont simulées. La figure (2) représente les résultats de MUSIC non circulaire sur 100 réalisations de cette simulation et la figure (3) les résultats de MUSIC standard sur ces mêmes 100 réalisations. Les croix représentent les directions d'arrivée estimées à partir des maxima des deux fonctionnelles.

La variance d'estimation pour MUSIC non circulaire est de l'ordre de $0.03\sigma^2$ alors que celle de MUSIC standard est de l'ordre de $0.20\sigma^2$, soit 7 fois plus importante. Ceci se traduit sur les figures par une dispersion très importante des directions d'arrivée estimées par MUSIC standard vis-à-vis de celles estimées par MUSIC non circulaire.

6 Autres algorithmes

A partir de l'expression (7), il est clair que l'ensemble des algorithmes reposant sur une analyse de la matrice interspectrale (décomposition en éléments propres ou autre) peuvent être transposés du cas circulaire vers le cas non circulaire. Nous présentons ici l'adaptation pour les algorithmes Root-MUSIC et Capon. La démarche utilisée est similaire à celle présentée pour MUSIC. Nous ne donnons donc que les principaux résultats.

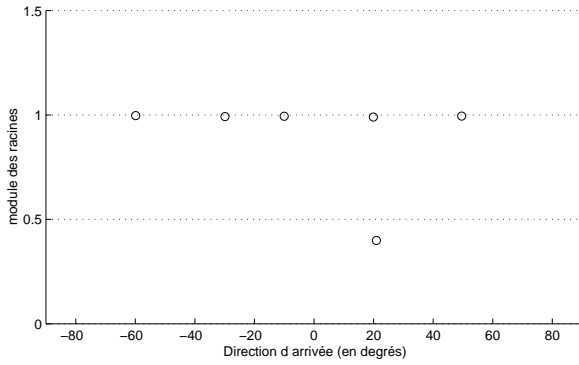


FIG. 4 — Localisation avec Root-MUSIC non circulaire

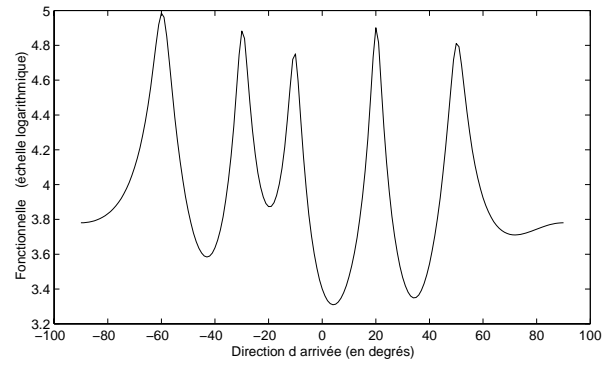


FIG. 5 — Localisation avec Capon non circulaire

6.1 Root-MUSIC

Dans le cas d'une antenne linéaire, on peut montrer que la maximisation de la fonctionnelle (9) peut s'effectuer en cherchant les racines du polynôme :

$$R(z) = F_{11}(z).F_{11}^*(z) - F_{21}(z).F_{21}^*(z) \quad (10)$$

avec $F_{ij}(z) = [1, z, \dots, z^{N-1}] \cdot P_{ij} \cdot [1, z^{-1}, \dots, z^{-(N-1)}]^T$

Le polynôme ainsi obtenu est de degré $4N - 4$ et il possède $2N - 2$ paires de racines complexes. De même que dans la version standard de root-MUSIC, l'angle d'arrivée des sources s'obtient à partir de la phase des racines dont le module est proche de 1.

La figure (4) montre les résultats obtenus sur la même simulation que pour la figure (1) (5 sources et 4 capteurs). On a représenté par des cercles les angles d'arrivée estimés à partir des phases des racines du polynôme $R(z)$. On retrouve 5 racines de module très proche de 1 correspondant aux 5 sources simulées. La dernière racine ne peut être interprétée comme une source, son module étant proche de 0.4

6.2 Capon

L'adaptation de l'algorithme Capon pour des signaux non circulaires conduit à la maximisation de la fonctionnelle :

$$f(\theta, \Psi) = \frac{1}{\mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)^H \mathbf{R}_{nc}^{-1} \mathbf{a}_{nc}(\theta, \Psi)}$$

De même que pour MUSIC, cette maximisation peut se ramener à une maximisation de la fonctionnelle à une dimension :

$$f(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}(\theta)^H \mathbf{Q}_{11} \mathbf{a}(\theta) - \|\mathbf{a}(\theta)^T \mathbf{Q}_{21} \mathbf{a}(\theta)\|} \quad (11)$$

\mathbf{Q}_{ij} correspondant à une partition de \mathbf{R}_{nc}^{-1} .

Les résultats obtenus avec la simulation de la figure (1) sont représentés sur la figure (5). On retrouve les 5 sources simulées et on constate le bon fonctionnement de l'algorithme ainsi que l'intérêt de la prise en compte de la non circularité des signaux dans les traitements.

7 Conclusion

Nous avons présenté une approche permettant d'introduire la caractéristique de non circularité de certains signaux

dans l'estimation de la localisation angulaire de sources. Les fonctionnelles proposées sans augmenter exagérément la complexité des algorithmes, permet de prendre en compte les spécificités des signaux circulaires. Les performances des estimateur en sont significativement améliorées. Les principaux avantages concernent le nombre de sources identifiables, la variance d'estimation et la résolution.

Références

- [1] B. Picinbono : "On Circularity", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 42, no 12, pp. 3473-3482, December 1994
- [2] B. Picinbono, P. Chevalier : "Widely Linear Estimation with Complex Data", IEEE Trans. Signal Processing, vol. 43, no 8, pp. 2030-2033, August 1995
- [3] P.O. Amblard, M. Gaeta, J.L. Lacoume : "Statistics for complex variables and signals - Part I : Variables", Signal Processing, vol. 53, no 1, pp. 1-13, August 1996
- [4] P. Gounon, C. Adnet : "Localisation angulaire de signaux non circulaire" Soumis à Traitement du Signal, 1997.