Estimation décentralisée modélisation locale et observabilité partielle

Thierry Beley(1,2)

(1)DGA/DCE/CTME/GIP, Laboratoire perception pour la robotique
16 bis, avenue Prieur de la Côte d'Or
94114 Arcueil Cedex, France
e-mail : beley@etca.fr

(2) AEROSPATIALE MISSILES, Service E/ETS/V
1, rue Pablo Picasso
78140 Magny les Hameaux, France

RÉSUMÉ

Dans ce travail, on se pose le problème de l'estimation d'un processus linéaire gaussien par un ensemble d'observateurs, chacun menant un modèle local et ayant sa propre observation locale. On donne des conditions sur ces modèles locaux et des conditions d'observabilité sur l'ensemble du système constitué des différents observateurs de telle sorte qu'un estimateur efficace du processus observé puisse être construit.

ABSTRACT

In this work, we are interested in the problem of the estimation of a linear gaussian process by a set of observers, each one using a local model and his own local observation. We give conditions on these local models and conditions of observability for the global system of observers so that an efficient estimator of the observed process can be constructed.

1 Introduction

Dans [2], il est présenté un problème d'estimation statique où plusieurs agents ont une observation d'une variable aléatoire, chacun élaborant une estimée locale, ces estimées locales étant itérativement échangées et combinées pour converger vers une estimée finale commune.

Dans ce travail, on s'intéresse à un problème d'estimation analogue dans le cas d'un processus dynamique. Un processus initial est observé par plusieurs systèmes menant chacun un modèle local partiel, chacun ayant une observation partielle. Ces différents systèmes construisent donc une estimée locale à partir de ce modèle local et de cette observation locale. Les estimées locales ainsi obtenues sont ensuite échangées et combinées pour obtenir une estimée finale. Ceci est représenté sur la figure (1).

La question que l'on se pose donc est de savoir sous quelles conditions d'observation et de décentralisation du modèle l'estimateur ainsi obtenu peut converger.

L'intérêt de ce problème est qu'il correspond à des architectures décentralisées de fusion de données, tels que par exemple les systèmes de poursuite de cibles. Son étude fournit donc des limites théoriques dans la conception de tels systèmes.

Formellement le problème est le suivant :
Considérons le système linéaire gaussien, dont la dynamique est donnée par l'équation d'évolution en temps discret suivante :

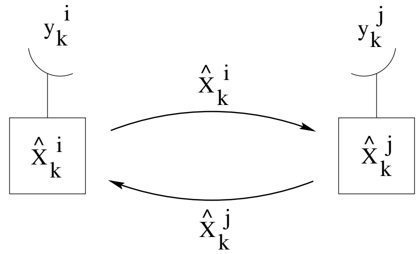

FIG. 1 — Modèle décentralisé de fusion de données

$$\begin{cases} z_{k+1} = F z_k + w_k \\ z_k \in R^n \text{ est l'état du système} \\ w_k \sim N(0, Q) \text{ est un bruit gaussien} \\ F \in M(n, n) \text{ supposée de rang plein} \end{cases}$$

Ce système est observé par plusieurs agents, chacun réalisant une estimation d'une projection x_k^i du vecteur d'état :

$$\begin{cases} x_k^i = T_i z_k \\ x_k^i \in R^{m_i}, \quad m_i \leqslant n \\ T_i \in M(m_i, n) \text{ supposée de rang plein} \end{cases}$$

On suppose que

$$\bigcap_i KerT_i = \{0\} \qquad (1)$$

Cette condition signifie qu'il n'existe pas de sous-espace de R^n qui ne soit modélisé par aucun agent, c'est à dire que l'état du système est bien entièrement représenté sur l'ensemble des agents même s'il n'est pas représenté entièrement sur chacun d'eux.

Chaque agent a de plus une observation sur la projection x_k^i qu'il doit estimer :

$$\begin{cases} y_k^i = H_i x_k^i + v_k^i \\ y_k^i \in R^{q_i} \\ v_k^i \sim N(0, R_i) \text{ est un bruit gaussien} \end{cases}$$

On ne fait pas d'hypothèse d'observabilité pour chaque agent, puisque chacun n'a une observation que sur une projection du vecteur d'état du système. L'observabilité ne peut donc s'exprimer de manière classique. Elle doit être formulée directement en terme de construction d'un estimateur par l'ensemble des observateurs.

Chaque agent doit donc construire une estimée d'une projection du vecteur d'état z_k à partir de son observation et des termes d'échange reçus des autres agents. Les termes d'échange sont les estimées locales de chaque agent. On cherche donc un estimateur de la forme la plus générale :

$$\hat{x}_{k+1}^i = M_{ii}\, \hat{x}_k^i + \sum_{j \neq i} M_{ij}\, \hat{x}_k^j + K_i\, y_{k+1}^i \qquad (2)$$

Le problème est donc déterminer sous quelles conditions il existe des matrices M_{ij} et K_i telles que l'estimateur (2) converge, et dans ce cas de déterminer la forme de ces matrices.

2 Existence d'un estimateur

Soit N le nombre d'observateurs, introduisons alors les notations suivantes :

$$x_k = \begin{bmatrix} x_k^1 \\ \vdots \\ x_k^N \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} \quad y_k = \begin{bmatrix} y_k^1 \\ \vdots \\ y_k^N \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} & & M_{iN} \\ & M_{ij} & \\ M_{N1} & & \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & H_N \end{bmatrix} K = \begin{bmatrix} K_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & K_N \end{bmatrix}$$

La condition (1) s'exprime alors par le fait que T est de rang n.

Pour déterminer le comportement de l'estimateur (2), on s'intéresse à l'erreur d'estimation $\tilde{x}_k = Tz_k - \hat{x}_k$

L'espérance et la covariance de l'erreur d'estimation vérifient :

Lemme 2.1 — *L'espérance de l'erreur vérifie la relation de récurrence :*

$$E(\tilde{x}_{k+1}) = ((I - KH)TF - MT)z_k + ME(\tilde{x}_k) \qquad (3)$$

La covariance de l'erreur vérifie la relation de récurrence :

$$\Sigma_{k+1} = M\Sigma_k M^T + KHRH^T K^T + TGQG^T T^T \qquad (4)$$

De l'équation (3), on déduit une condition pour que l'estimateur soit non biaisé, de l'équation (4), on déduit une condition pour que la covariance de l'erreur reste bornée. On a alors la proposition suivante :

Proposition 2.2 — *Sous les conditions*

$$(I - KH)TF - MT = 0 \qquad (5)$$

$$|\lambda_{\max}(M)| < 1, \qquad (6)$$

où $|\lambda_{\max}|$ est le module de la plus grande valeur propre de M, l'estimateur (2) est non biaisé et la covariance de l'erreur d'estimation reste bornée

Démonstration : En effet, la condition (5) assure que $E(\tilde{x}_{k+1}) = ME(\tilde{x}_k)$ et donc que $E(\tilde{x}_k) = 0$ pour tout k lorsque $E(\tilde{x}_0) = 0$
Et l'équation du type $\Sigma_{k+1} = M\Sigma_k M^T + Q$ admet une limite si et seulement si M est une matrice stable. ■

3 Forme de la matrice M

La condition (5) permet de déterminer la forme de la matrice M. En effet, on peut chercher M sous la forme $M = (I - KH)A$. La condition (5) implique alors que A vérifie l'équation $TF = AT$. Le lemme suivant assure l'existence de solutions quand T est de rang n :

Lemme 3.1 — *L'équation $TF = AT$ où $F \in R^n$, $A \in R^m$, $n \leqslant m$ admet une solution si et seulement si T est de rang n*
Si $n < m$, il y a une infinité de solutions.

Démonstration : En effet, si T est de rang n, T admet une inverse à gauche S telle que $ST = I_n$, alors $A = TFS$ est solution.
Si $m = n$, S est unique et $S = T^{-1}$, si $m > n$ T admet une infinité d'inverse à gauche. ■

La proposition suivante donne la forme de la matrice A et donc la forme de la matrice M garantissant que la condition (5) soit vérifiée :

Proposition 3.2 — *Soit S^i des matrices opérant de R^m dans R^n vérifiant pour tout i la condition*

$$S^i T = I_n.$$

S^i se décompose en bloc de la manière suivante, $S^i = [S_1^i, \ldots, S_N^i]$, où S_j^i opère de R^{m_i} dans R^n

Soit

$$A = \begin{bmatrix} T_1 F S_1^1 & \ldots & T_1 F S_N^1 \\ & T_i F S_j^i & \\ T_N F S_1^N & \ldots & T_N F S_N^N \end{bmatrix}$$

et $M = (I - KH)A$, alors M vérifie la condition

$$(I - KH)TF - MT = 0$$

Démonstration : En effet,

$$AT = \begin{bmatrix} T_1 F(S_1^1 T_1 + \ldots + S_N^1 T_N) \\ \vdots \\ T_N F(S_1^N T_1 + \ldots + S_N^N T_N) \end{bmatrix}$$

Et S^i est une inverse à gauche de T donc $S_1^i T_1 + \ldots + S_N^i T_N = S^i T = I_n$ ■

L'estimateur (2) a donc la forme suivante :

$$\hat{x}_{k+1} = (I - KH)A\hat{x}_k + Ky_{k+1}$$

On retrouve là une forme classique d'estimateur avec pour différence que K et H ont une structure bloc particulière, à savoir que KH est bloc diagonale.

La matrice S^i correspond à la manière dont l'agent i reconstitue une estimée de z_k à partir de sa propre estimée et des estimées qu'il reçoit des autres agents. Dans la mesure où $m \geq n$ l'application T introduit de la redondance, l'équation $ST = I_n$ admet alors une infinité de solutions. Chaque agent peut choisir un mode de reconstruction différent de celui choisi par un autre.

4 Stabilité de $(I - KH)A$

Le problème de la stabilité de la matrice $(I - KH)A$ est un problème de placement des pôles, avec ici la contrainte particulière que $(I - KH)$ est une matrice bloc-diagonale.

La démarche consiste à considérer la décomposition de R^n en sous-espaces stable par F. R^n se décompose en sous-espaces stables par F associés à la décomposition de la matrice F en blocs de Jordan :

$$R^n = \bigoplus_{k=1}^{K} E_k$$

où les E_k sont de trois sortes.

Soit ce sont des espaces propres de dimension 1 associés à la valeur propre λ_k

Soit ce sont des espaces de dimension supérieure à 1 que l'on peut décomposer sous la forme

$$E_k = \bigoplus_{l=1}^{L_k} E_k^l$$

où les E_k^l sont de dimension 1 et sont tels que sur une base associée la matrice F est de la forme

$$\begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & & \\ & \ddots & 1 \\ & & \lambda_k \end{bmatrix}$$

quand λ_k est une racine réelle du polynôme caractéristique

Soit ce sont des espaces de dimension supérieure à 1 que l'on peut décomposer sous la forme

$$E_k = \bigoplus_{l=1}^{L_k} E_k^l$$

où les E_k^l sont de dimension 2 et sont tels que sur une base associée la matrice F est de la forme

$$\begin{bmatrix} C(\alpha_k, \beta_k) & I_2 & \\ & \ddots & I_2 \\ & & C(\alpha_k, \beta_k) \end{bmatrix}$$

où sur E_k^l il existe une base telle que $C(\alpha, \beta)$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

quand $\alpha + i\beta$ est une racine complexe du polynôme caractéristique.

4.1 Cas d'une modélisation locale totale

On suppose ici que les matrices de projection T_i sont toutes égales à l'identité, c'est à dire que chaque observateur travaille sur l'état entier du système. On a alors le résultat suivant, qui est une généralisation du problème de placement de pôle pour un système classique.

***Proposition 4.1* —** *Supposons que pour tout i, $T_i = I_n$. Alors, il existe des matrices K et A de la forme précédemment définie telles que les pôles non nuls de $(I_m - KH)A$ puissent être placés arbitrairement si et seulement si*

le couple (HT, F) est observable

La démonstration peut être étendue au cas où T_i est inversible. Elle s'appuie sur les lemmes suivants :

***Lemme 4.2* —** *Soit U_i le sous-espace non observable par i*

$$U_i = Ker \begin{bmatrix} H_i T_i F^0 \\ \vdots \\ H_i T_i F^{n-1} \end{bmatrix}$$

Le couple (HT, F) est observable si et seulement si $\bigcap_i U_i = \{0\}$.

***Lemme 4.3* —** *U_i le sous-espace non observable par i est de la forme $U_i = \bigoplus_k V_k$ où les V_k sont de deux sortes :*
Soit $V_k = E_k$ quand E_k est de dimension 1
Soit $V_k = \bigoplus_{l=1}^{L<L_k} E_k^l$ quand E_k est de dimension supérieure à 1

Démonstration : En effet, les sous-espace stables par F inclus dans E_k sont soit E_k tout entier, soit les sous-espaces V_k de la forme indiquée. ■

***Lemme 4.4* —** *Si le couple (HT, F) est observable, pour tout E_k, il existe un i tel que les pôles associés à E_k puissent être placés arbitrairement par K_i.*

Démonstration : Sinon, comme d'après le lemme précédant les sous-espaces non observables de E_k sont emboités, il existerait un sous-espace qui serait non-observable par tous les observateurs i, ce qui est contraire au lemme (3) et donc à l'hypothèse. ■

La démonstration de la proposition (4.1) en résulte alors directement :

Démonstration : En effet il résulte du lemme (4.4) que pour chaque sous-espace E_k, il existe un observateur i tel que K_i permette de placer arbitrairement les pôles associés. Pour chaque observateur i, pour chaque E_k, la matrice S^i peut alors être définie sur E_k par :
$S^i_{j\ |E_k} = I_{|E_k}$ pour j tel que E_k soit observable par j
$S^i_{j\ |E_k} = 0$ pour les autres ■

Cette partie montre donc que dans le cas où chaque observateur utilise un modèle complet, la construction d'un estimateur nécessite une propriété d'observabiltité globale sur l'ensemble du système, et autorise donc une observabilité locale partielle. En fait, cette partie montre que les différents pôles du système se répartissent sur les différents observateurs, chacun assurant la stabilisation des pôles observables par lui. La propriété d'observabilité globale sur le système total assure que chaque pôle est observable par au moins l'un des observateurs, ce qui permet de garantir la convergence de l'estimateur global.

En outre, les échanges sont réduits, puisque chaque observateur ne doit recevoir que l'information concernant les pôles non observables d'un seul autre observateur.

4.2 Cas particulier de modèles locaux réduits

La démonstration précédante peut être étendue au le cas où les projection T_i sont "compatibles" avec la décomposition de R^n en sous-espaces E_k, ceci dant le sens suivant :

Proposition 4.5 — *Soit U_i le sous-espace défini dans le lemme (3)*
Si pour tout k, il existe i tel que $E_k \cap U_i = \{0\}$
Alors les pôles non nuls de $(I_m - KH)A$ peuvent être placés arbitrairementsi et seulement si le couple (HT, F) est observable

Cette proposition montre que les projections T_i peuvent se limiter à ne contenir que les sous-espaces E_k observables par l'observateur i.

Démonstration : De la même manière que dans la proposition (4.1), pour tout sous-espace E_k, il existera un observateur i tel E_k ne soit pas contenu dans $KerT_i$ et qui soit observable par i. On peut donc effectuer la même construction. ■

Cette partie montre donc que la démarche de la partie précédente peut être adoptée en réduisant la taille du modèle local. Cette réduction doit se faire de manière compatible avec le modèle du système global en ce sens que les projections T_i doivent se faire selon les sous-espaces stables E_k.

4.3 Cas général

Dans le cas général, le fait que le couple (HT, F) soit observable constitue une condition nécessaire mais non suffisante pour assurer le placement de pôles, comme on peut le constater sur l'exemple suivant.

$$F = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad K_1 = \begin{bmatrix} k_1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, le couple (HT, F) est observable, et :

$$(I - KH)A = \begin{bmatrix} (1-k_1)\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & k_2\lambda_1 \\ 0 & 0 & (1-k_3)\lambda_2 \end{bmatrix}$$

Il reste donc une valeur λ_1 qui ne peut être modifiée.

La condition que pour tout k il existe un i tel que $E_k \cap U_i = \{0\}$ n'est plus suffisante, en effet du fait de la projection T_i, il peut y avoir une perte de rang sur U_i de telle sorte que K_i ne contienne plus assez de paramètres pour effectuer le placement de tous les pôles associés au sous-espace E_k. C'est ce qui se produit dans l'exemple précédent. Il faut alors avoir autre une observation sur la partie restante du sous-espace E_k.

Il semble donc qu'il faille introduire une hypothèse supplémentaire garantissant pour un sous-espace E_k, qu'il n'existe pas de pôle qui ne puisse être déplacé. Cette hypothèse revient à augmenter l'observation.

5 Conclusion

Cette étude montre que pour un système décentralisé, des conditions d'observabilité locale partielle sont suffisantes, dans la mesure où l'on fait une hypothèse d'observabilité globale.

Enfin, elle montre le rôle fondamental que joue la décomposition de l'espace d'état en sous-espaces stables, l'utilisation de modèles locaux compatibles avec celle-ci donne lieu à la construction d'estimateurs simples, permettant en outre de réduire l'importance des données échangées.

Références

[1] A. T. Alouani. Distributed estimators for multi-sensor systems. *Advanced Information Processing in Automatic Control*, pages 273–7, 1990.

[2] M. Bacharach. Normal bayesian dialogues. *Journal of the American Statistical Association*, 74 :837–848, 1979.

[3] B. Y. S. Rao H. Hu, H. F. Durrant-Whyte. Toward a fully decentralized architecture for multi-sensor data fusion. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1990.

[4] A. T. Alouani J. D. Birdwell. Distributed estimation : constraints on the choice of the local models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(5), 1988.