

"DE-NOISING" ADAPTATIF

Dorina Isar,

Université "Politehnica" de Timisoara, 2 Boulevard V.Pârvan,
1900 Timisoara, Roumanie, disar@ee.utt.ro**Résumé**

Dans ce travail-ci on présente une méthode de traitement adaptatif du signal pour l'augmentation du rapport signal à bruit basée sur l'utilisation de la transformée en ondelettes discrète, TOD. L'effet de l'utilisation de la TOD est le blanchissement du signal perturbateur. On utilise un "filtre de seuillage" dans le domaine de la TOD. On trouve, à l'aide d'un algorithme adaptatif, la valeur optimale du seuil. On présente quelques résultats obtenus en utilisant la méthode proposée.

Abstract

In this paper we present an adaptive signal processing method for the enhancement of the signal to noise ratio based on the use of the discrete wavelet transform DWT. The consequence of the use of this transform is the whitening of the perturbation. We optimize the well-known Donoho's denoising method by the selection (based on an adaptive search algorithm) of a threshold that maximizes the output signal to noise ratio.

I. INTRODUCTION

Le terme "de-noising" a été introduit dans la littérature récente dédiée aux ondelettes. Une définition peut être trouvée dans [Don.'92]. Une méthode nouvelle de filtrage adaptatif est celle du filtrage adaptatif dans le domaine d'une transformée. On peut prendre l'exemple donné par Odile Macchi dans [Mac.'89]. Dans ce cas-là, le filtrage adaptatif est réalisé dans le domaine de la transformée de Fourier discrète (TFD). Une analyse complète du filtrage adaptatif linéaire dans le domaine des fréquences est présentée dans [Shy.'92]. Dans ce travail-ci on présente une méthode de traitement adaptatif du signal pour l'augmentation du rapport signal à bruit basée sur l'utilisation de la transformée en ondelettes discrète. On propose l'utilisation d'un filtre adaptatif non-linéaire dans le domaine de la transformée en ondelettes. Cette méthode de filtrage est une généralisation de la méthode "wavelet shrinkage" introduite par David Donoho dans [Don.'92].

II. LA TRANSFORMÉE EN ONDELETTES DISCRÈTE

Un problème moderne dans la théorie du signal est l'analyse des signaux non-stationnaires. Les outils pour cette analyse sont les représentations temps-fréquences [Fla.'93]. L'une de plus importante représentation temps-fréquence est la transformée en ondelettes continue (TOC) [Mal.'89]. Par sa discrétisation on obtient la transformée en ondelettes discrète, TOD, [Dau.'88]. Le système associé à cette transformée est formé par J filtres passe-bas (avec la réponse impulsionnelle $h[n]$), J filtres passe-haut (à réponse impulsionnelle $g[n]$) et $2J$ décimateurs. Les systèmes à réponses impulsionnelles $h[n]$ et $g[n]$ doivent être soigneusement construits. Le lecteur peut trouver des détails significatifs sur la construction de ces filtres dans [Dau.'92]. La TOD est une transformée linéaire et orthogonale. Elle a deux paramètres: les expressions des réponses impulsionnelles $h[n]$ et $g[n]$ et la résolution J .

En variant ces paramètres on peut obtenir différentes transformées en ondelettes adaptatives. Dans ce travail on utilise les filtres à réponse impulsionnelles finies proposés par Ingrid Daubechies dans [Dau.'88]. La transformée en ondelettes discrète inverse (TOI) fait la reconstruction du signal $b_{0,k}$ en utilisant les signaux $b_{j,k}$, $c_{j,k}$, $j=1, J$, [Dau.'88], [Dau.'92]. Les algorithmes pour le calcul des transformées TOD et TOI sont présentés dans [Dau.'92], [Rio.,Duh.'92]. Dans ce travail on utilise l'algorithme du Mallat.

III. UNE METHODE DE FILTRAGE DANS LE DOMAINE DE LA TOD

Soit le signal $x_u[k]$ perturbé aditivement par le bruit $n_x[k]$:

$$x[k] = x_u[k] + n_x[k].$$

La méthode de "de-noising" proposée concerne les étapes suivantes:

1. On calcule la TOD du signal $x[k]$ et on obtient:

$$y[k] = y_u[k] + n_y[k].$$

2. La forme du signal $y_u[k]$ est estimée à l'aide de l'estimateur: où t est un seuil.

3. On calcule la TOI de $\hat{y}_u[k]$ et on obtient le signal

$$\hat{y}_u[k] = \begin{cases} \text{sgn}\{y[k]\}(|y[k]| - t) & , |y[k]| \geq t \\ 0, & \text{en reste} \end{cases} \quad (1)$$

$\hat{x}_u[k]$ qui représente l'estimation du signal $x_u[k]$.

L'estimation du signal $y_u[k]$ est un filtrage dans le domaine de la TOD.

Dans la méthode originale (présentée par Donoho dans [Don.'92]) le bruit est considéré blanc, de puissance σ^2 , et la valeur du seuil t est choisi en fonction de la puissance du bruit et de la longueur du signal à analyser, N :

$$t_D = \sqrt{2 \log_2 N} \sigma$$

On peut observer que cette valeur ne dépend pas d'aucun paramètre du signal util $x_u[k]$. Il faut remarquer aussi que pour pouvoir appliquer cette méthode il faut estimer avant le filtrage dans le domaine transformé la valeur σ .

La seule hypothèse faite sur le signal d'entrée dans notre travail est qu'on connaît l'énergie du signal utile E_x . Pour comprendre l'importance du premier pas de la méthode déjà présentée il faut analyser la statistique des coefficients de la TOD.

III.1.1. LA STATISTIQUE DES COEFFICIENTS DE LA TOD

Ce problème a été étudié par Albert Cohen [Coh.'95]. Soit $x(t)$ un signal aléatoire stationnaire. En projetant ce signal sur les espaces W_j , $j=1, J$, les éléments

d'une décomposition orthogonale du $L^2(\mathbb{R})$, on obtient des signaux d'énergie finie. Les coefficients correspondants sont :

$$c_{j,k} = \langle x(t), \psi_{j,k}(t) \rangle.$$

Pour chaque entier $j, j=1, J, c_{j,k}$ est un signal aléatoire à temps discret avec la fonction de corrélation $R_{c_j}[k-l]$. On peut montrer que sa transformée de Fourier vaut:

$$\hat{R}_{c_j}(\Omega) = \sum_p \hat{R}_x(2^j(\Omega + 2p\pi)) / |\hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi)|^2.$$

Si on prend la limite pour j tendant vers l'infini on peut

$$\hat{R}_{c_\infty}(\Omega) = \sum_p \hat{R}_x(0) / |\hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi)|^2 =$$

écrire:

$$= \hat{R}_x(0) \sum_p |\hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi)|^2.$$

Mais une propriété importante d'une mère des ondelettes

$$\text{orthogonales est : } \sum_p |\hat{\Psi}(\Omega + 2p\pi)|^2 = 1$$

Ainsi :

$$\hat{R}_{c_\infty}(\Omega) = \hat{R}_x(0) \quad (\forall) \Omega \in \mathbb{R}.$$

Donc le signal $c_{j,k}$ est un bruit blanc. On peut affirmer que la TOD converge asymptotiquement vers la transformée de Karhunen-Loève. De plus, le signal $c_{j,k}$ converge vers une gaussienne. L'effet de la TOD est donc, dans notre cas, le blanchissement du signal $n_y[k]$. Bien sûr, le paramètre J doit avoir la plus grande valeur possible. En utilisant la TOD le bruit qui perturbe le signal $x_u[n]$ devient un bruit blanc. Cette observation est très importante parce qu'elle permet l'utilisation de la méthode proposée pour des signaux perturbés par des bruits qui ne sont pas blancs. L'hypothèse de bruit blanc est faite dans la plupart des articles sur le de-noising (voir les articles de Donoho). On peut observer, en analysant l'expression du seuil t_D que le bruit est entièrement éliminé (la probabilité d'avoir des échantillons de bruit supérieurs à t_D est pratiquement nulle). Malheureusement la forme du signal util est aussi affectée (parce-que quelques détails du signal util sont aussi éliminés).

Une analyse de la statistique des coefficients de la TOD, quand on utilise les paquets d'ondelettes, est présenté dans [Kri.,Pes.'95]. En concluant, l'utilisation de la TOD nous conduit vers un problème à solution déjà connue. On peut ajouter qu'il y a des applications (par exemple la compression de données) où l'utilisation de la TOD est supérieure à l'utilisation de la transformée de Karhunen-Loève [Coh.'95], [Mal.'97]. Une approche différente (qui n'exploite pas l'effet de blanchissement de la TOD) est présentée dans [Kol.'97].

III.1.2. PERFORMANCES DE L'ESTIMATEUR PROPOSE

Soit X la variable aléatoire obtenue en particulierisant le signal $n_y[k]$ à un moment donné. En utilisant l'estimateur définit

plus haut on obtient la variable aléatoire \hat{Y} . La relation entre les fonctions de répartition des ces deux variables aléatoires est :

$$F_{\hat{Y}}(y) = F_X(y-s) \sigma(-y) + F_X(y+s) \sigma(y)$$

où :

$$\sigma(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0 \\ 0, & \text{sin on} \end{cases}$$

[Isa.'95].

En dérivant la dernière relation on obtient la relation entre les densités de probabilité des variables aléatoires X et \hat{Y} :

$$p_{\hat{Y}}(y) = p_X(y-s) \cdot \sigma(-y) + [F_X(s) - F_X(-s)] \cdot \delta(y) + p_X(y+s) \cdot \sigma(y)$$

où $\delta(y)$ est la distribution de Dirac et $p_X(y)$ est la densité de probabilité de la variable aléatoire X . La dispersion de la variable aléatoire \hat{Y} est donnée par la relation :

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 = \int_{-\infty}^0 y^2 p_X(y-s) dy + \int_0^{\infty} y^2 p_X(y+s) dy$$

Parce que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est nulle on peut écrire :

$$p_X(y-s) \leq p_X(y) \quad (\forall) y \leq 0, s \geq 0$$

$$p_X(y+s) \leq p_X(y) \quad (\forall) y \geq 0, s \geq 0$$

On écrit de nouveau :

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 \leq \int_{-\infty}^0 y^2 p_X(y) dy + \int_0^{\infty} y^2 p_X(y) dy = \sigma_X^2$$

L'estimateur proposé induit une réduction de la puissance du bruit qui perturbe le signal à traiter.

Comme le signal aléatoire à l'entrée de notre estimateur est presque un bruit blanc, nous pouvons considérer que la variable aléatoire X est une gaussienne. La puissance de la variable aléatoire \hat{Y} est dans ce cas :

$$\sigma_{\hat{Y}}^2 = 2s^2(1 - F_X(s)) - 2s \sigma_X^2 p_X(s) + 2\sigma_X^2(1 - F_X(s))$$

[Isa.'95].

Autres propriétés mathématiques de l'estimateur peuvent être trouvées dans les travaux de Donoho [Don92] ou [Don93] ou dans les actes de la conférence des statisticiens franco-belges organisée en 1995. Pour chaque valeur positive du t l'estimateur proposé baisse la puissance du bruit. Cette réduction est plus importante si t est plus grand.

Autres estimateurs, appartenant à la même famille sont présentés dans [Hon.'97].

Une approche différente pour le de-noising est présentée dans [Nas.'94].

III.2. SOURCES D'OPTIMISATION DE LA METHODE PROPOSEE

La méthode de "de-noising" proposée est caractérisée par trois paramètres, deux spécifiques à la transformée en ondelettes: les réponses impulsives $h[n]$ et $g[n]$, la résolution J , et le troisième, le seuil t de l'estimateur. On a montré déjà que J doit avoir sa plus grande valeur possible. On peut utiliser comme critère d'optimisation de la méthode de "de-noising" l'augmentation de la vitesse de convergence de la

série $\hat{R}_{c_j}(\Omega)$ vers $\hat{R}_x[0]$. La vitesse de convergence est plus grande si on utilise des ondelettes plus régulières. En ce qui concerne le seuil t , sa valeur doit être choisie tel que l'augmentation du rapport signal à bruit soit importante et la forme du signal $x_u[n]$ ne soit pas affectée. On présente, dans la suite, un exemple pour la méthode de "de-noising" proposée. Dans les figures 1 et 2, le signal $x[k]$ est présenté en haut et le signal $\hat{x}_u[k]$ en bas. Dans l'exemple de la figure 1 on a utilisé le filtre

DAU9 et la valeur t_D pour le seuil. L'augmentation du rapport signal

à bruit obtenue est évidente. Dans le cas de la figure 2 on a utilisé le filtre DAU2 et on peut voir que la méthode de dé-noising fonctionne aussi pour autres catégories de bruit.. Cette méthode d'augmentation du rapport signal à bruit est efficace pour des signaux qui ont une valeur du rapport signal à bruit suffisamment grande (voir la figure 2). Pour le cas quand le rapport signal à bruit du signal à traiter est faible on doit utiliser des valeurs importantes pour le seuil t et la forme du signal utile est affectée. (voir la figure 1).

Le but de cet travail est de trouver automatiquement le seuil de l'estimateur sans estimer la valeur σ .

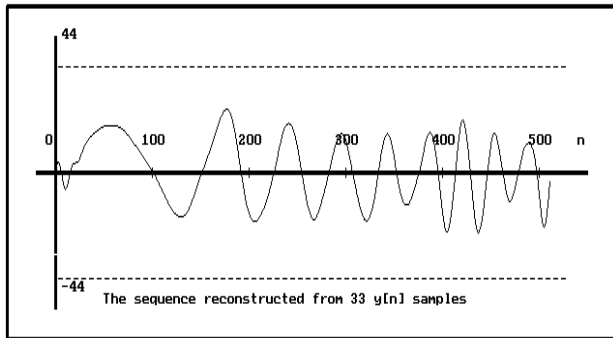
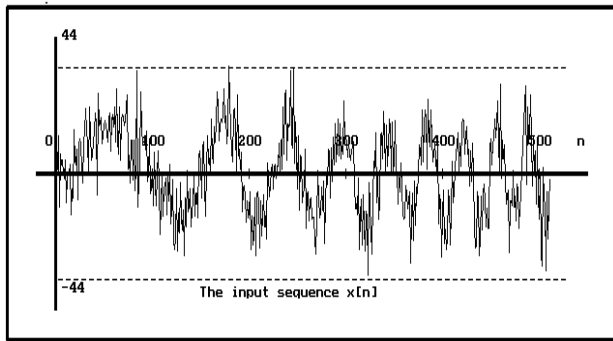


Figure 1. La méthode classique de débruitage

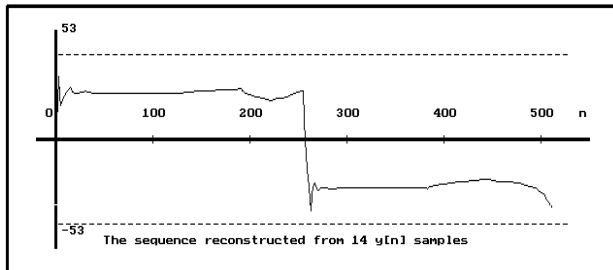
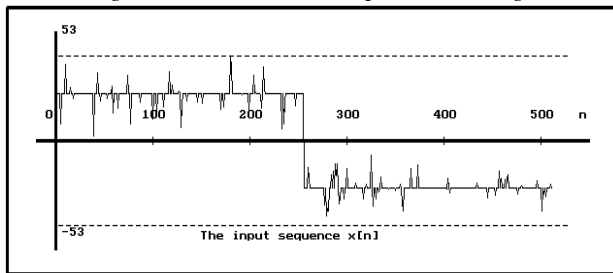


Figure 2. La généralisation de la méthode de Donoho pour bruit d'impulsions

IV. "DE-NOISING " ADAPTATIF

Le problème est de choisir la valeur du seuil t pour obtenir le plus grand rapport signal à bruit à la sortie. On peut utiliser dans ce but un

algorithme adaptatif qui suppose la connaissance de l'énergie du signal utile $x_u[n]$. Les étapes d'un tel algorithme sont les suivantes:

1. En choisissant une valeur petite pour le seuil t_0 , on applique la procédure déjà présentée. On obtient le signal $\hat{y}_1[k]$. On estime le rapport signal à bruit obtenu à la sortie RSB₁;

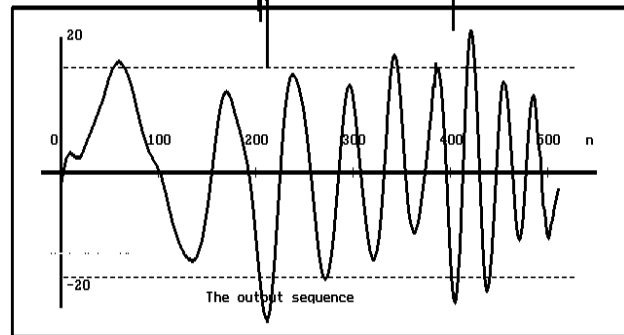
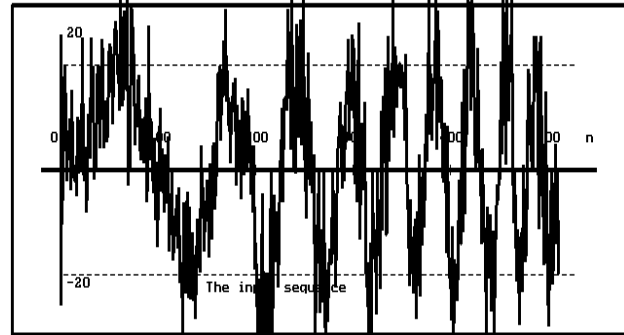


Figure 3. L'effet de la méthode adaptative proposée ici

2. En utilisant encore une fois l'estimateur donné avec la même valeur pour t_0 on obtient le signal $\hat{y}_2[k]$ et on estime la valeur RSB₂. Cette procédure peut être appliquée quelques fois. Elle doit être arrêtée quand le rapport signal à bruit à la sortie commence à s'abaisser. Par exemple le même signal $x_u[k]$, qui a été utilisé dans la première expérience, est utilisé pour envisager la méthode adaptative. En utilisant la méthode adaptative proposée ici, on obtient le signal présenté dans la figure 3 (en bas). Cet signal a été obtenu après P=6 itérations.

On ne peut montrer que cette procédure est équivalente, du point de vue du bruit, à la procédure non-adaptative qui utilise la valeur du seuil $P \cdot t_0$. On peut affirmer que le bruit est entièrement supprimé, mais malheureusement la forme du signal $x_u[k]$ est un peu affectée. La cause est la valeur plus grande du seuil équivalent utilisé.

En tout cas la forme du signal n'est pas plus affectée, en utilisant cette méthode, que dans le cas de l'utilisation de la méthode classique de Donoho.

On prouve maintenant la convergence de l'algorithme proposé. Une forme alternative de la relation (1) est:

$$\hat{y}_u[k] = \begin{cases} y[k] - t, & y[k] > +t, \\ y[k] + t, & y[k] < -t, \\ 0, & |y[k]| < t \end{cases}$$

Donc, son énergie est:

$$E_{\hat{y}} = \sum_{k=1}^N (\hat{y}_u[k])^2 = \sum_{k_1=1}^{N_1} (y[k]-t)^2 + \sum_{k_2=1}^{N_2} (y[k]+t)^2$$

On a noté le nombre des échantillons plus grandes que t avec N_1 et le nombre des échantillons plus petites que t avec N_2 . L'expression de l'énergie est donc:

$$E_{\hat{y}} = \sum_{k_1=1}^{N_1} y^2[k_1] + \sum_{k_2=1}^{N_2} y^2[k_2] + 2t \left(\sum_{k_2=1}^{N_2} y[k_2] - \sum_{k_1=1}^{N_1} y[k_1] \right) + (N_1 + N_2)t^2$$

Si la valeur du seuil est suffisamment petite (cette hypothèse a été faite quand l'algorithme a été décrit) on peut faire les approximations:

$$\sum_{k_2=1}^{N_2} y[k_2] - \sum_{k_1=1}^{N_1} y[k_1] \cong - \sum_{k=1}^N |y[k]|$$

qui est une constante pour un signal donné ($x_u[n]$). On note cette constante avec α .

L'autre approximation possible est (si t est assez petit):

$$\sum_{k_1=1}^{N_1} y^2[k_1] + \sum_{k_2=1}^{N_2} y^2[k_2] \cong E_y \cong E_x + \sigma^2$$

On peut écrire aussi:

$$N_1 + N_2 \cong \beta N \quad \text{avec } 0 < \beta < 1$$

Voilà pourquoi l'énergie du signal de la sortie peut être calculée avec la formule:

$$E_{\hat{y}} = E_y + 2t\alpha + \beta N t^2$$

et son rapport signal/bruit :

$$RSB = \frac{E_x}{E_{\hat{y}} - E_x} = \frac{E_y}{\beta N t^2 - 2t\alpha + \sigma^2}$$

On peut trouver facilement une valeur du seuil, t_0 , qui conduit à la plus grande valeur possible du rapport signal/bruit à la sortie.

$$\text{Cette valeur est: } t_0 = \frac{\alpha}{\beta N}$$

Donc l'algorithme peut trouver une valeur de seuil qui optimise le rapport signal/bruit à la sortie. Voilà pourquoi on dit que l'algorithme est convergent.

Une procédure alternative intéressante, semble être le "translation invariant de-noising" [Coi.,Don.'95].

V. CONCLUSIONS

On obtient un débruitage de haute qualité (la forme du signal utile est bien conservé et le bruit est entièrement éliminé). La méthode d'augmentation du rapport signal/bruit par de-noising est très moderne, il y a un grand nombre d'articles très récentes, qui présentent des aspects différents de cette méthode. En effet il y a un grand nombre de paramètres qui peuvent améliorer le débruitage : les ondelettes utilisées, le type de transformée utilisé, l'estimateur utilisé, la valeur du seuil utilisé.

Dans ce travail-ci on a présenté une méthode de "de-noising" adaptative qui peut remplacer la méthode de Donoho pour le cas quand on ne veut pas faire l'estimation de la puissance de bruit et quand on connaît l'énergie du signal à traiter. Ses avantages sont:

- le volume de calcul est relativement faible (on ne fait pas l'estimation de la puissance du bruit),

- la forme du signal à estimer est relativement bien conservée, et la méthode est presque universelle (elle fonctionne bien pour des signaux et bruits très différentes).

- la méthode proposée ne demande pas l'hypothèse de bruit blanc à l'entrée.

- la méthode proposée ne nécessite pas l'estimation de la puissance du bruit à l'entrée (σ^2) comme par exemple la méthode classique de Donoho.

- la méthode est adaptée au signal utile à l'entrée parce-que'elle exige la connaissance de son énergie.

L'application prévue pour cette méthode est l'augmentation du rapport signal/bruit dans les systèmes de télécommunications.

BIBLIOGRAPHIE

- [Don.'92] D.L. Donoho, "De-noising" by soft thresholding", Technical Report no.409, Stanford Univ., December, 1992;
- [Mac.'89] O.Macchi, "Adaptatif et non stationnaire", Traitement du Signal, vol.6, no.5, 1989;
- [Shy.'92] J.J.Shynk, "Frequency-Domain and Multirate Adaptive Filtering", S. P. M., Jan., 1992;
- [Fla.'93] P. Flandrin "Temps-fréquence", Masson, 1993;
- [Mal.'89] S. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE, PAMI, vol.2, no.7, 1989;
- [Dau.'88] I. Daubechies, "Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets"; Comm.Pure and Appl. Math., vol. 41;
- [Dau.'92] I.Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets", SIAM, 1992;
- [Rio.,Duh.'92] O. Rioul, P.Duhamel, "Fast Algorithms for Discrete and Continuous Wavelet Transforms", IEEE Trans. on Inform. Theory, vol. 38, no.2, march, 1992;
- [Isa.'95] D.Isar, "Tehnici adaptive de crestere a raportului semnal pe zgomot", Rapport pour la thèse de doctorat, coordonateur prof. I.Naornita, Université « Politehnica » de Timisoara, Roumanie;
- [Coh.,d'Al.'95] A. Cohen, J.P. d'Alles, "Nonlinear Approximation of Stochastic Processes", dans "Wavelets and Statistics", A.Antoniadis et G.Oppenheim, éditeurs, Springer-Verlag, 1995;
- [Mal.'97] S. Mallat, F. Falzon, "Understanding Image Transform Codes", Proceedings of the SPIE Aerospace Conference, Orlando, April, 1997;
- [Kri.,Pes.'95] H.Krim, J.P.Pesquet, "On the Statistics of Best Basis Criteria", dans "Wavelets and Statistics", A.Antoniadis et G.Oppenheim, éditeurs, Springer-Verlag, 1995.
- [Kol.'97] E.D. Kolaczyk, "A Method for Wavelet Shrinkage Estimation of Certain Poisson Intensity Signals using Corrected Thresholds", Preprint, The University of Chicago, Dept. of Statistics, 1997 ;
- [Don.'93] D.L.Donoho, "Nonlinear Wavelet Methods for Recovery of Signals, Densities, and Spectra from Indirect and Noisy Data" in "Proceedings of Symposia in Applied Mathematics", vol. 47, éditeur I. Daubechies, AMS, 1993.
- [Hon.'97] Hong-Ye Gao, "Threshold Selection in Wave Shrink", preprint, Math Soft Inc. February, 1997
- [Nas.'94] G.P.Nason, "Wavelet Regression by Cross-Validation" Technical Report 447, Stanford University, Statistics Department March, 1994;
- [Coi., Don.'95] R.R. Coifman, D.L. Donoho, "Translation Invariant Denoising" in A. Antoniadis and G. Oppenheim, editors, "Wavelets and Statistics, Springer Verlag, , 1995.