Une présentation explicite de mesures d'estimabilité en trajectographie passive

J.-Pierre Le Cadre

IRISA/ CNRS
Campus de Beaulieu - 35042 Rennes Cedex, France
e-mail : lecadre@irisa.fr

RÉSUMÉ

L'étude de l'observabilité en trajectographie passive a déjà motivé de nombreuses études. On développe ici une présentation unifiée de l'estimabilité et de l'observabilité. Un formalisme général est ainsi développé, celui-ci permet d'obtenir des résultats explicites pour un grand nombre de situations.

ABSTRACT

An important amount of studies has been devoted to the observability analysis for passive target motion analysis. An unified presentation of observability ans estimability is here provided. Using a common formalism, explicit results are thus obtained.

1 Introduction

Tout d'abord, le but de ce article [1] est de donner une nouvelle interprétation aux critères d'observabilité en trajectographie passive (mesures d'angle), tel celui de Nardone et Aidala [1].
Ce critère peut, bien sûr, être obtenu par un calcul intensif et direct. Toutefois, nous allons montrer qu'il peut se déduire de résultats bien plus généraux, basés sur l'utilisation de l'algèbre multilinéaire. Ceci met en évidence sa véritable nature. En particulier, on montre que ce critère est, avant tout, lié à l'estimabilité locale de la trajectoire source.

Les applications de ceci sont nombreuses. En effet, on dispose ainsi de critères *explicites* d'estimabilité, applicables à une large variété de contextes : trajectographie plane, récepteurs multiples, source manœuvrante et optimisation (locale) des manœuvres du récepteur.

2 Formulation du problème

L'équation du mouvement d'une source à vitesse constante prend la forme ci-dessous [1] :

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + t\mathbf{v}(0) - \int_0^t (t-\tau)\mathbf{a}_o(\tau)d\tau \qquad (1)$$

où :

$$\left| \begin{array}{l} \text{la réference "temps" est : } 0 \text{ ,} \\ \mathbf{r} \text{ et } \mathbf{v} \text{ sont resp. le vecteur position} \\ \text{ et le vecteur vitesse relatifs ,} \\ \mathbf{a}_o \text{ est l'accélération "observateur" .} \end{array} \right.$$

On dispose uniquement (cas usuel en trajectographie passive) des gisements de la source, i.e. :

$$\beta(t) = \tan^{-1}\left[r_x(t)/r_y(t)\right] \quad . \qquad (2)$$

Soit encore, en utilisant (1) et (2) [1] :

$$\mathbf{M}_t^* \mathbf{X} = y(t) \ ,$$

où :

$$\begin{array}{l} \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}(0) \\ \mathbf{v}(0) \end{pmatrix} , \\ \mathbf{M}_t^* = \left(\cos\beta_t, -\sin\beta_t, t\cos\beta_t, -t\sin\beta_t\right) \ , \\ y(t) = \int_{t_0}^t (t-\tau)\left[a_{ox}(\tau)\cos\beta_t - a_{oy}(\tau)\sin\beta_t\right]d\tau \quad . \end{array}$$

Le problème de l'observabilité consiste à étudier les conditions qui garantissent la détermination (algébrique) de la trajectoire de la source.

Soit $A(t)$ la matrice (4×4) définie par[2] :

$$A(t) = \left(\mathbf{M}_t, \mathbf{M}_t^{(1)}, \mathbf{M}_t^{(2)}, \mathbf{M}_t^{(3)}\right)$$

un "critère" classique d'observabilité [1] consiste à examiner le rang de la matrice $A(t)$. En fait, nous allons démontrer que ce "critère" relève davantage d'une mesure de l' "estimabilité" du système. Dans ce but, considérons le système (1,2,3) ; les mesures étant bruitées (σ^2 : variance du bruit de mesure). Alors la matrice de Fisher relative à l'état du vecteur $\mathbf{X}$ prend la forme suivante :

$$\begin{array}{l} \text{FIM} = (\sigma\, r)^{-2}\mathcal{M}(t,t+k)\mathcal{M}^*(t,t+k) \ , \\ \text{où :} \\ \mathcal{M}(t,t+k) = (\mathbf{M}_t, \mathbf{M}_{t+1}, \cdots, \mathbf{M}_{t+k}) \ , \ k \geqslant 3 \,. \end{array} \qquad (3)$$

Le déterminant de cette matrice est une "mesure" convenable de l'estimabilité. Ce choix est justifié par des considérations

[1] Ce travail a été effectué dans le cadre d'une convention de recherche IRISA/ Direc. Constr. Navales (DCN/Ing/Sud)

[2] $\mathbf{M}_t^{(i)}$ représente la i-ème dérivée (temporelle) du vecteur $\mathbf{M}_t$

statistiques (cf les problèmes d'"optimal design" [3]). On considère donc :

$$\det(\mathrm{FIM}(t,t+3)) = (\sigma\, r)^{-8}[\det(\mathcal{M}(t,t+3))\,]^2.$$

Il est particulièrement révélateur d'en calculer une approximation en considérant un développement limité d'ordre 3 (D.L.) des vecteurs $\mathbf{M}_{t+i}$.

$$\mathbf{M}_{t+i} \stackrel{3}{=} \mathbf{M}_t + i\mathbf{M}_t^{(1)} + \frac{i^2}{2}\mathbf{M}_t^{(2)} + \frac{i^3}{6}\mathbf{M}_t^{(3)}\ . \tag{4}$$

Grâce aux propriétés de l'algèbre multilinéaire, on obtient :

Prop. 1

Considérons un D.L d'ordre 3 des vecteurs $\mathbf{M}_{t+i}$*, alors* :
$\det(\mathcal{M}(t,t+3) \stackrel{3}{=} \det(\mathbf{M}_t, \mathbf{M}_t^{(1)}, \mathbf{M}_t^{(2)}, \mathbf{M}_t^{(3)})$.

Preuve : On note $\mathbf{M} \wedge \mathbf{N}$ les élements du produit extérieur$\Lambda^2\mathbb{R}^4$. On a alors :

$$\det(\mathcal{M}(t,t+3)) = (\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_{t+1}) \wedge (\mathbf{M}_{t+2} \wedge \mathbf{M}_{t+3})\ . \tag{5}$$

Il reste à calculer les deux vecteurs $\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_{t+1}$ et $\mathbf{M}_{t+2} \wedge \mathbf{M}_{t+3}$ de $\Lambda^2\mathbb{R}^4$ [4]. En utilisant la définition du produit extérieur, on obtient [4][5] :

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_{t+1} &= \mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_t^{(1)} + \frac{1}{2}\,\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_t^{(2)}\ , \\
&\quad + \frac{1}{6}\,\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_t^{(3)}, \\
\mathbf{M}_{t+2} \wedge \mathbf{M}_{t+3} &= 3\,\mathbf{M}_t^{(1)} \wedge \mathbf{M}_t^{(2)} + 3\,\mathbf{M}_t^{(2)} \wedge \mathbf{M}_t^{(3)}\ , \\
&\quad + 5\,\mathbf{M}_t^{(1)} \wedge \mathbf{M}_t^{(3)}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Notons que les termes de $\mathbf{M}_{t+2} \wedge \mathbf{M}_{t+3}$ dans lesquels se trouve $\mathbf{M}_t$ ne sont pas pris en compte car leur contribution à $\det(\mathcal{M}(t,t+3))$ est nulle. On en déduit aisément $\det(\mathcal{M}(t,t+3))$, soit :

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{M}(t,t+3)) &= 3\,\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_t^{(1)} \wedge \mathbf{M}_t^{(2)} \wedge \mathbf{M}_t^{(3)}\ , \\
&\quad + \frac{5}{2}\,\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_t^{(2)} \wedge \mathbf{M}_t^{(1)} \wedge \mathbf{M}_t^{(3)}\ , \\
&\quad + \frac{1}{2}\,\mathbf{M}_t \wedge \mathbf{M}_t^{(3)} \wedge \mathbf{M}_t^{(1)} \wedge \mathbf{M}_t^{(2)}\ ,
\end{aligned}$$

d'où, finalement :

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{M}(t,t+3)) &= \det(\mathbf{M}_t, \mathbf{M}_t^{(1)}, \mathbf{M}_t^{(2)}, \mathbf{M}_t^{(3)})\ , \\
&= \det(A(t))\ .
\end{aligned} \tag{7}$$

□□□

En outre, nous allons montrer que ce déterminant est indépendant de t et β_t. Pratiquement, celà signifiera que le calcul de ce déterminant peut être grandement simplifié.

En considérant un D.L. d'ordre 3 de la distance relative r_{t+i}, on montre qu'il est, de plus, indépendant des variations de distance.

Prop. 2

Considérons un D.L d'ordre 3 des vecteurs $\mathbf{M}_{t+i}$ *ainsi que de la distance relative* r_{t+i}*, alors* :
$\det(\mathrm{FIM}_{t,t+3}) = (\sigma\, r_t)^{-8}\big[\det(\mathbf{M}_t, \cdots, \mathbf{M}_{t+3})\big]^2$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
&\det(\mathrm{FIM}) = \Big[\det\Big(\mathbf{G}_t, \cdots, \mathbf{G}_t^{(3)}\Big)\Big]^2\ , \\
&\text{où : } \mathbf{G}_{t+i} = \tfrac{1}{r_{t+i}}\mathbf{M}_{t+i}\ .
\end{aligned} \tag{8}$$

Explicitant le calcul des vecteurs $\mathbf{G}_t^{(i)}$ ($i = 1, 2, 3$)), on a :

$$\left|\begin{aligned}
&\mathbf{G}^{(1)} = \tfrac{1}{r}\mathbf{M}^{(1)} - \tfrac{g}{r}\mathbf{M}\ , \\
&\mathbf{G}^{(2)} = \tfrac{1}{r}\mathbf{M}^{(2)} - 2\tfrac{g}{r}\mathbf{M}^{(1)} + (\tfrac{g^2}{r^2} - \tfrac{g^{(1)}}{r})\mathbf{M}\ , \\
&\mathbf{G}^{(3)} = \tfrac{1}{r}\mathbf{M}^{(3)} - 3\tfrac{g}{r}\mathbf{M}^{(2)} + 3(\tfrac{g^2}{r^2} - \tfrac{g^{(1)}}{r})\mathbf{M}^{(1)}\ , \\
&\quad +(3\tfrac{g^{(1)}g}{r^2} - 2\tfrac{g^3}{r^2} - \tfrac{g^{(2)}}{r})\mathbf{M}\ , \quad g = \dot{r}/r\ .
\end{aligned}\right. \tag{9}$$

D'après les propriétés des produits extérieurs, on a alors :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{G} \wedge \mathbf{G}^{(1)} = \tfrac{1}{r^2}\,\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{(1)}\ , \\
&\mathbf{G}^{(2)} \wedge \mathbf{G}^{(3)} = \tfrac{1}{r^2}\,\mathbf{M}^{(2)} \wedge \mathbf{M}^{(3)} + \textit{autres termes}\ .
\end{aligned} \tag{10}$$

Autres termes est uniquement composé de produits exterieurs de, soit le vecteur $\mathbf{M}$ ou $\mathbf{M}^{(1)}$ avec un autre vecteur ($\mathbf{M}^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$). Puisque $\mathbf{G} \wedge \mathbf{G}^{(1)} = \frac{1}{r^2}\,\mathbf{M} \wedge \mathbf{M}^{(1)}$, la contribution des *autres termes* dans det(FIM) est nulle.

□□□

Le calcul d'une approximation de $\det(\mathrm{FIM}_{t,t+k})$ où $k \geqslant 4$ est également très simple. En utilisant la formule de Binet-Cauchy [3] [5], on obtient :

$$\begin{aligned}
&\det(\mathrm{FIM}_{t,t+k}) = (\sigma\, r)^{-8} \textstyle\sum_{i_1,i_2,i_3,i_4} \Big[\det(\mathbf{M}_{t+i_1}, \cdots, \mathbf{M}_{t+i_4})\Big]^2, \\
&\text{où : } (0 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 < i_3 \leqslant k) \\
&\det(\mathbf{M}_{t+i_1}, \cdots, \mathbf{M}_{t+i_4}) = P(i_1, i_2, i_3, i_4)\ (\det A(t))\ , \\
&\text{de telle sorte que :} \\
&\det(\mathrm{FIM}_{t,t+k}) = c_k(\det(A(t)))^2\ .
\end{aligned} \tag{11}$$

Dans l' eq. 12, P_{i_1,i_2,i_3,i_4} est un polynôme homogène en i_1, i_2, i_3, i_4 de degré 12.

Il est donc essentiel d'avoir une expression explicite de $\det A(t)$, le calcul en est grandement facilité par le résultat ci-dessous, qui constitue le résultat central de cet article.

Prop. 3

$\det A(t)$ *est indépendant de* β_t*, de plus, on peut supposer que le temps de réference est nul* .

Preuve : Définissons [4] la matrice $\mathcal{R}_t$ par :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_t = \begin{pmatrix} R_t & 0 \\ tR_t & R_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \otimes R_t\ , \\
&\text{où : } R_t = \begin{pmatrix} \cos\beta_t & \sin\beta_t \\ -\sin\beta_t & \cos\beta_t \end{pmatrix}\ .
\end{aligned} \tag{12}$$

[3] on suppose que σ and r sont constants pour la durée de l'analyse
[4] {$\otimes$: Kronecker produit de Kronecker }

On vérifie immédiatement l'égalité ci-dessous :

$$\begin{array}{l} \mathbf{M}_t = \mathcal{R}_t \mathbf{E}_1 \ , \quad \mathbf{E}_1 = (1,0,0,0)^* \ , \\ \text{et donc} : \mathbf{M}_t^{(1)} = \mathcal{R}_t^{(1)} \mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{M}_t^{(3)} = \mathcal{R}_t^{(3)} \mathbf{E}_1 \ . \end{array} \quad (13)$$

En outre, les égalités suivantes se déduisent aisément de (13,14) :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_t &=& C_t \otimes R_t \ , \\ \mathcal{R}_t^{(1)} &=& \beta_t^{(1)} \left(C_t \otimes R_t^{(1)} \right) + D \otimes R_t \ , \\ \mathcal{R}_t^{(3)} &=& \beta_t^{(3)} \left(C_t \otimes R_t^{(1)} \right) - 2 \beta_t^{(2)} \mathcal{R}_t + \cdots \ , \end{array}$$

où :

$$C_t \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, D \triangleq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (14)$$

On remarque alors que :

$$R_t^{(1)} = R_t J \quad \text{où} : \ J \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

En utilisant la multilinéarité du déterminant, on déduit de ce qui précède que $\det A(t)$ est une somme d'expressions élémentaires du type (noté (17)) défini ci-dessous :

$$\det \left[\mathcal{R}_t \mathbf{E}_1, \left(C_t \otimes R_t J \right) \mathbf{E}_1, \left(D \otimes R_t J \right) \mathbf{E}_1, \left(C_t \otimes R_t J \right) \mathbf{E}_1 \right], \ \text{etc} \ . \quad (16)$$

La propriété suivante joue alors un rôle fondamental :

$$(H_1 F_1) \otimes (H_2 F_2) = (H_1 \otimes H_2)(F_1 \otimes F_2) \ , \quad (17)$$

où H and F sont des endomorphismes de l'espace des états. En appliquant cette propriété à (17), on obtient [5] :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R}_t &=& C_t \otimes R_t \ , \\ &=& (Id \ C_t) \otimes (R_t \ Id) \ , \\ &=& (Id \otimes R_t)\ (C_t \otimes Id) \ , \end{array} \quad (18)$$

et de manière similaire :

$$\begin{array}{rcl} C_t \otimes R_t J &=& (Id \ C_t) \otimes (R_t \ J) \\ &=& (Id \otimes R_t)\ (C_t \otimes J) \ ... \end{array} \quad (19)$$

Ainsi, chacun des termes de (17) admet la factorisation suivante ($\det(A \otimes B) = (\det A)^2 (\det B)^2$) :

$$\begin{array}{l} (17) = \left(\det R_t \right)^2 , \times \\ \det \left[\left(C_t \otimes Id_2 \right) \mathbf{E}_1, \left(C_t \otimes J \right) \mathbf{E}_1, \left(D \otimes Id_2 \right) \mathbf{E}_1, \left(C_t \otimes J \right) \mathbf{E}_1 \right] \ . \end{array} \quad (20)$$

Puisque $\det R_t = 1$, on déduit de l'égalité ci-dessus que $\det A(t)$ lui-même est indépendant de β_t.

La dernière étape est justifiée par le même argument. Plus précisément, on considère les factorisations suivantes :

$$\begin{array}{l} C_t \otimes J = (C_t \otimes Id)\ (Id \otimes J) \ , \\ D \otimes Id = (C_t \ D) \otimes Id = (C_t \otimes Id)\ (D \otimes Id) \ , \\ \text{d'où, l'on déduit :} \\ (17) = \det \left(C_t \otimes Id \right) \ \det[\mathbf{E}_1, (Id \otimes J)\, \mathbf{E}_1, \\ \qquad \left(D \otimes Id_2 \right) \mathbf{E}_1, (Id \otimes J) \mathbf{E}_1] \ , \end{array} \quad (21)$$

ce qui prouve que (17) et donc det(FIM) est indépendant de t (le temps de référence). On peut donc choisir $t = 0$, $\beta_t = 0$, ce qui simplifie énormément les calculs qui vont suivre. □□□

[5] Id : identity matrix

3 Applications

Nous allons maintenant considérer diverses applications des résultats obtenus précedemment.

3.1 Le problème plan classique

En utilisant la Prop.3 ($\det A(t) = \det(\mathcal{M}_{t,t+3})$ ($t = 0; \beta_t = 0$)), on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \det A(t) &=& \det \begin{pmatrix} -\dot\beta_t & \beta_t^{(2)} & \dot\beta_t^3 - \beta_t^{(3)} \\ 1 & 0 & -3\dot\beta_t^2 \\ 0 & -2\dot\beta_t & -3\beta_t^{(2)} \end{pmatrix} , \\ && = 4\dot\beta_t^4 + 2\dot\beta_t \beta_t^{(3)} - 3\left(\beta_t^{(2)}\right)^2 , \end{array} \quad (22)$$

d'où :

$$\det(\text{FIM}_{t,t+k}) = c(k) \left[\ 4\dot\beta_t^4 + 2\dot\beta_t \beta_t^{(3)} - 3\left(\beta_t^{(2)}\right)^2 \ \right]^2 . \quad (23)$$

On retrouve ainsi (*explicitement*) le critère d'observabilité de Nardone [1]. En dépit de son apparente complexité, l'équation différentielle associée à (24) admet une solution simple (le MRU [1]).

Notons aussi que le problème consiste, en général, à *maximiser* ce critère et non à l'*annuler*. Il s'agit, alors, d'un problème de commande optimale.

En outre, si on considère un modèle stochastique (à accroissements indépendants) de $\dot\beta$ tel que :

$$\begin{array}{l} \dot\beta_{t+1} = \dot\beta_t + w \ , \ w_i \ : \ \mathcal{N}(0, \tau^2) \ , \\ \text{alors, on obtient :} \\ \mathbb{E}\left[\det(\text{FIM}_{t,t+k}) \right] = c_k (1 - \alpha_k \tau^2) \left(\frac{\dot\beta}{r} \right)^8 , \end{array} \quad (24)$$

où α_k est un réel positif [6]. On voit donc que $\left(\frac{\dot\beta}{r} \right)^8$ est une borne (supérieure) acceptable de det(FIM), lorsque le mouvement de l'observateur est rectiligne uniforme.

Considérons maintenant une source à accélération constante [1]. Le vecteur d'état $\mathbf{X}$ est alors de dimension 6 ($\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{a})^*$), et on obtient alors :

$$\begin{array}{l} \det(A(t)) = c_k \ [-64\ \dot\beta^9 + 288\ \dot\beta^5 (\beta^{(2)})^2 + 540\ \dot\beta (\beta^{(2)})^4 \ , \\ +192\ \dot\beta^6 \beta^{(3)} - 720\ \dot\beta^2 (\beta^{(2)})^2 \beta^{(3)} \ , \\ +40\ {\beta^{(3)}}^3 + 240\ \dot\beta^3 \beta^{(2)} \beta^{(4)} - , 60\ \beta^{(2)} \beta^{(3)} \beta^{(4)} \ , \\ +15\ \dot\beta (\beta^{(4)})^2 - 24\ \dot\beta^4 \beta^{(5)} + 18\ (\beta^{(2)})^2 \beta^{(5)} - 12\ \dot\beta \beta^{(3)} \beta^{(5)} \ ] \end{array} \quad (25)$$

On voit donc que l'introduction du vecteur accélération complique très sensiblement le critère différentiel (24).

3.2 Récepteurs multiples

On se restreint ici au cas de deux récepteurs animés d'un mouvement rectiligne uniforme. L'observation est vectorielle, i.e. $\mathbf{y}(t) = (y_1(t), y_2(t))^*$. En particulier, notons $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ les matrices $\mathcal{M}$ associées avec les récepteurs (1) et (2). Alors, d'après la Prop.3, on a :

$$\det(\text{FIM}_{t,t+m}) \quad = \quad c(k) \ \det(\mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1^* + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2^*) \ ,$$

[6] Par exemple, on a : $\alpha_4 = 3/2$

$$= \quad c(k)\ \det\left[(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2) \begin{pmatrix} \mathcal{M}_1^* \\ \mathcal{M}_2^* \end{pmatrix} \right] .$$

D'où :

$$\begin{aligned} &\det(\mathrm{FIM}) \approx \sum [\ (\mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{M}_2) \wedge (\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{N}_2)\ ]^2 , \\ &\quad \text{où : } \mathbf{M}_i \in \mathrm{col}(\mathcal{M}_1)\ ,\ \mathbf{N}_i \in \mathrm{col}(\mathcal{M}_2)\ . \end{aligned} \tag{26}$$

Le calcul de det($\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$) est aisément effectué en utilisant les propriétés de l'algèbre extérieure. Plus précisément, on calcule les composantes (notées resp. α_0, β_0, γ_0) de $\mathbf{M}_1 \wedge \mathbf{M}_2$, dans la base "réduite" $\{\mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_2\ ,\ \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_3\ ,\ \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_4\}$ de [7] $\Lambda^2(\mathbb{R}^4)$, puis celles (notées de α_1, β_1, γ_1) de $\mathbf{N}_1 \wedge \mathbf{N}_2$ dans la base "réduite" $\{\mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_4\ ,\ \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_4\ ,\ \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_3\}$; on a alors :

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_0 = \sin(\ (i-j)x\ ) \ \longleftarrow \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_2\ , \\ \beta_0 = (j-i)\cos(ix)\cos(jx) \ \longleftarrow \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_3\ , \\ \gamma_0 = -j\sin(jx)\cos(ix) + i\sin(ix)\cos(jx) \ \longleftarrow \mathbf{E}_1 \wedge \mathbf{E}_4\ , \\ \alpha_1 = kl\sin(\ (l-k)y\ ) \ \longleftarrow \mathbf{E}_3 \wedge \mathbf{E}_4\ , \\ \beta_1 = (l-k)\sin(\alpha+ky)\sin(\alpha+ly) \ \longleftarrow \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_4\ , \\ \gamma_1 = -l\cos(\alpha+ly)\sin(\alpha+ky) + k\cos(\alpha+ky)\sin(\alpha+ly)\ , \\ \longleftarrow \mathbf{E}_2 \wedge \mathbf{E}_3\ , \end{array} \right. \tag{27}$$

d'où :

$$\det(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2) = \alpha_0\alpha_1 - \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1\ . \tag{28}$$

Notant α l'angle formé entre les deux vecteurs joignant la source et les récepteurs et det : det(FIM) ; on déduit de (28,29) les importantes approximations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} 1) - \alpha \gg \dot\beta\ ,\ \text{alors : } (\det) \approx m^6\ (\sin(\alpha))^4\ , \\ 2) - \alpha \approx \delta\ \dot\beta\ ,\ \text{alors : } (\det) \approx m^{16}\ \dot\beta^8\ . \end{array} \right.$$

Au vu de (30), l'interêt d'une grande base de mesure est donc évident.

3.3 Optimisation locale des maœuvres de l' observateur

On reste dans un problème plan et on note v le module du vecteur vitesse et u le cap observateur, les équations du mouvement relatif prennent la forme ci-dessous :

$$\left| \begin{array}{l} \dot r_x = v_x = v\sin u - v_{s,x}; \quad r_x = r\sin\beta\ , \\ \dot r_y = v_y = v\cos u - v_{s,y}; \quad r_y = r\cos\beta\ . \end{array} \right. \tag{29}$$

d'où :

$$\left| \begin{array}{l} \dot\beta = \frac{1}{r}[v\sin(u-\beta) + c] \\ \dot r = v\cos(u-\beta) - c'\ , \\ \text{avec :} \\ c = v_{s,y}\sin(\beta) - v_{s,x}\cos(\beta)\ , \\ c' = -v_{s,y}\cos(\beta) - v_{s,x}\sin(\beta)\ , \end{array} \right. \tag{30}$$

Dans (32), c représente un terme de "vélocité croisée". Puisque l'objectif est ici de déterminer le cap optimal u qui maximise la fonctionnelle de coût $\mathcal{C} = \left(4(\dot\beta)^4 + 2\dot\beta\beta^{(3)} - 3(\beta^{(2)})^2\right)^2$, il faut donc calculer $\beta^{(2)}$, $\beta^{(3)}$ en fonction de u. On obtient :

$$\begin{aligned} &\beta^{(2)} = -2g\dot\beta + g\dot u - \tfrac{\dot\beta}{r}c' - \tfrac{g}{r}c\ , \\ &\beta^{(3)} = -2\dot g\dot\beta - 2g\beta^{(2)} + \dot g\dot u + gu^{(2)} + \tfrac{\beta^{(2}}{r}c - 2\tfrac{g\dot\beta}{r}c\ , \\ &\quad + \tfrac{(\dot\beta)^2}{r}c' + \tfrac{\dot g}{r}c' - \tfrac{g^2}{r}c'\ . \\ &\text{où : } \dot g = \left(\tfrac{\dot r}{r}\right)^{(1)} = (\dot\beta^2 - g^2) - \dot\beta\dot u + \tfrac{\dot\beta}{r}c + \tfrac{g}{r}c'\ . \end{aligned} \tag{31}$$

En insérant ces expressions de $\beta^{(2)}$ and $\beta^{(3)}$ dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}$ devient une fonction explicite de u et de ses dérivées $\dot u$ et $u^{(2)}$. Les autres termes (de $\mathcal{C}$) sont directement estimables à partir des gisements estimés (i.e. β, $\dot\beta$, g). Le problème de commande optimale associé doit être traité par des techniques numériques.

Il peut cependant être notablement simplifié si on suppose que la vitesse observateur est bien plus grande que la vitesse source. Dans ce cas, $v_{s,x}$, $v_{s,y}$ sont négligeables, et $\mathcal{C}$ prend la forme suivante :

$$\mathcal{C} = 6\left(\frac{v}{r}\right)^2 \dot u\,\dot\beta - \dot u^2\left[\left(\frac{v}{r}\right)^2 + g^2\right] + 2\,\dot\beta\,\ddot u\ .$$

4 Conclusion

En utilisant un formalisme général basé sur l'algèbre multilinéaire, une nouvelle présentation des critères d'observabilité a été obtenue. L'interêt de cette approche va au delà de l'analyse de l'observabilité puisqu'elle fait le lien avec les notions d'estimabilité et permet d'obtenir des outils généraux pour l'analyse des performances (en estimation et en détection [6]) ainsi que l'optimisation de manœuvres.

Références

[1] S.C. NARDONE and V.J. AIDALA, Observability Criteria for Bearings-Only Target Motion Analysis. IEEE *Trans. on* AES, vol. AES–17, n^o 2, March 1981, pp. 162–166.

[2] S.C. NARDONE, A.G. LINDGREN and K.F. GONG, Fundamental Properties and Performance of Conventional Bearings-Only Target Motion Analysis. IEEE *Trans. on* AUT. CONTROL, vol. AC–29, n^o 9, September 1984, pp. 775–787.

[3] P. WHITTLE, Some general points in the Theory of Optimal Experimental Design, *J.R. Statist. Soc.* B 35, 1973, pp. 123–130.

[4] R.W.R. DARLING, *Differential Forms and Connections*. Cambridge University Press, Cambridge UK, 1994.

[5] T. YOKONUMA, *Tensor Spaces and Exterior Algebra*. Transl. of Math. Monographs, vol. 108, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1992.

[6] A.R. WASHBURN, *Search and Detection*. ORSA books, Arlington, 1989.

[7] $\mathbf{E}_1, \cdots, \mathbf{E}_4$ base canonique de $\mathbb{R}^4$