

# Application de l'optimisation combinatoire à l'extraction-poursuite de sources multiples

Hervé Gauvrit<sup>(1)</sup>, Claude Jauffret<sup>(2)</sup> et Jean-Pierre Le Cadre<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup>IRISA-CNRS

Campus de Beaulieu  
35042 Rennes Cedex, France.

<sup>(2)</sup>Université de Toulon

GESSY  
Avenue G. Pompidou, BP 56  
83162 La Valette du Var

## RÉSUMÉ

Dans cette communication, on présente une méthode d'association de données développée pour l'extraction-poursuite de sources multiples en sonar/radar. L'approche retenue cherche à remédier à la complexité exponentielle du problème d'association de données. Le problème d'extraction-poursuite est alors formulé comme un problème d'optimisation combinatoire. L'algorithme mis en oeuvre résout le problème d'association spatio-temporelle pour des sources en mouvement.

## ABSTRACT

In this paper, a data association method is developed for the multisensor multitarget tracking problem in sonar/radar. This approach consists to face the combinatorial complexity of the problem. The multisensor multitarget tracking problem is thus formulated as a combinatorial optimization problem. The algorithm we present solves the spatio-temporal data association for moving targets.

## 1 Introduction

Dans cette communication, on présente une méthode d'association de données développée pour l'extraction-poursuite de sources multiples en sonar/radar. Le problème de l'association de données (ie : déterminer de quelle source, s'il en existe une, la mesure provient) représente l'un des deux problèmes qui doivent être résolus conjointement. Le second est celui de l'estimation des paramètres des sources. Le premier problème représente le problème central pour tout système d'extraction-poursuite de sources multiples.

L'approche retenue dans ce papier cherche à remédier à la complexité exponentielle du problème d'association de données. Morefield [7] le premier puis plus récemment Pattipati et al. [8] et Poore et al. [9] ont formulé le problème d'extraction-poursuite de sources multiples comme un problème d'affectation de dimension  $N$  (ND). Le problème est converti en une recherche d'un partitionnement admissible des mesures (ie : soumis à des contraintes d'association) maximisant une fonctionnelle de coût. Cependant, la théorie de la programmation en nombre entiers nous apprend que dès lors que la dimension du problème d'affectation est supérieure à 3 ( $N \geq 3$ ), ce problème appartient à la classe des problèmes dits NP-complets. Une solution consiste alors à relâcher un certain nombre de contraintes (relaxation lagrangienne) de façon à produire une

borne supérieure (inférieure) sur l'optimum du problème de maximisation (minimisation). Plus précisément, la résolution du problème dual fournit la meilleure borne. En combinant un algorithme de sous-gradient (pour optimiser le dual) et un algorithme d'affectation 2D (pour résoudre le problème de relaxation lagrangienne), on peut obtenir une solution approchée au problème primal. Ces méthodes héritées de la recherche opérationnelle [4] furent appliquées pour la première fois au problème d'extraction-poursuite par Pattipati et al. [8]. Ils s'intéressaient au problème d'association de mesures provenant de plusieurs sonars passifs géographiquement répartis afin de repérer des sources fixes. Seule l'information spatiale permettait de résoudre l'association de données.

Dans cette communication, au contraire, on cherche à résoudre le problème d'association de données pour des sources en mouvement. Ce problème devient donc un problème d'association spatio-temporelle. Nous montrons que le problème d'extraction-poursuite de sources multiples à partir de plusieurs plateformes peut se formuler comme un problème d'affectation multi-dimensionnelle. Nous présentons le calcul de la fonctionnelle de coût dans le cas général d'un problème avec  $T$  scans et  $S$  capteurs. Nous décrivons minutieusement les différentes étapes de l'algorithme et étudions avec attention l'introduction d'un modèle pour tenir compte des non-détections et des fausses-alarmes. De plus, une méthode est proposée qui à partir d'une solution du problème de relaxation lagrangienne recherche la "meilleure" solution admissible

Ce travail a été financé par la DCN/Ingénierie/Sud dans le cadre de la convention entre la DCN et l'IRISA

pour le problème primal. Enfin, des simulations permettent d'évaluer l'algorithme dans un environnement multi-scans et multi-plateformes.

## 2 Formulation du problème et notations

Soit  $\mathcal{L}$  l'ensemble des mesures reçues. On considère le problème général d'extraction-poursuite comportant  $T$  scans et  $S$  plateformes observatrices de telle sorte que  $N = S * T$  est la dimension du problème d'affectation spatio-temporelle correspondant. Il faut remarquer que le problème d'association temporelle de  $N$  scans à partir d'une même plateforme est équivalent au problème d'association spatiale des mesures provenant de  $N$  plateformes à un instant donné. Le but est d'estimer le nombre et les paramètres cinématiques des sources présentes dans la zone de surveillance. On introduit les notations suivantes :

- $z_{i_n}^n$  ( $n = 1 \dots N$ ,  $i_n = 0 \dots m_n$ ) est la  $i_n$ ème mesure du  $n$ ème ensemble de mesures<sup>1</sup>.  $m_n$  représente le nombre de mesures. De plus, on introduit une mesure supplémentaire  $z_0$ , dite mesure factice, pour modéliser une non-détection ou une fausse-alarme ;
- $Z_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \{z_{i_1}^1, z_{i_2}^2, \dots, z_{i_N}^N\}$  où  $i_1 = 0, \dots, m_1 \dots i_N = 0, \dots, m_N$ . Cet ensemble caractérise une hypothèse de piste ;
- $\gamma = \{Z_{i_1, i_2, \dots, i_N}\}$  est un hypothétique partitionnement des mesures en pistes et fausses-alarmes soumis à des contraintes d'affectation :
  1. Une "vraie" mesure ne peut provenir de plusieurs pistes ;
  2.  $\cup_{\gamma} Z_{i_1, i_2, \dots, i_N} = \mathcal{L}$  ;
- $\gamma_0$  est le partitionnement constitué uniquement de fausses-alarmes. Une fausse-alarme est définie comme un Nuplet où toutes les mesures le composant sont des mesures factices sauf une<sup>2</sup> ;
- $\Gamma = \{\gamma\}$  est l'ensemble de tous les partitionnements admissibles ;
- $\mathcal{H}_\gamma = \{\gamma \text{ est la partition correcte}\}$  est l'évènement associé à la partition  $\gamma$  ;
- $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_\gamma | \gamma \in \Gamma\}$  est l'ensemble de tous les évènements correspondant à des partitions admissibles.
- on note  $\mathcal{X}$  le vecteur d'état des sources à estimer dans la zone de surveillance.

Pour pouvoir formuler le problème d'association de données en un problème d'optimisation combinatoire, la fonctionnelle de coût doit pouvoir se décomposer en une somme cumulée des contributions de chacun des Nuplets composant  $\gamma$ . On

<sup>1</sup>Par ensemble de mesures, on entend les mesures reçues par une même plateforme à un instant donné.

<sup>2</sup>Cette définition peut être modifiée en fonction de l'application

considère pour cela, un coût bayésien de la forme :

$$\frac{\max_{\mathcal{X}} p(\mathcal{H}_\gamma | \mathcal{L}, \mathcal{X})}{\max_{\mathcal{X}} p(\mathcal{H}_{\gamma_0} | \mathcal{L}, \mathcal{X})} \quad (1)$$

Cette définition a pour avantage de prendre en compte la probabilité a priori des hypothèses puisqu'en utilisant la règle de Bayes :

$$p(\mathcal{H}_\gamma | \mathcal{L}, \mathcal{X}) = \frac{p(\mathcal{L} | \mathcal{H}_\gamma, \mathcal{X}) p(\mathcal{H}_\gamma | \mathcal{X})}{p(\mathcal{L} | \mathcal{X})} \quad (2)$$

avec  $p(\mathcal{L} | \mathcal{X}) = \sum_{\mathcal{H}_\gamma \in \mathcal{H}} p(\mathcal{L} | \mathcal{H}_\gamma, \mathcal{X}) p(\mathcal{H}_\gamma | \mathcal{X})$  le facteur de normalisation.  $p(\mathcal{L} | \mathcal{H}_\gamma, \mathcal{X})$  représente la vraisemblance des observations conditionnellement à l'hypothèse de partitionnement  $\mathcal{H}_\gamma$  et  $p(\mathcal{H}_\gamma | \mathcal{X})$ , la probabilité a priori de  $\mathcal{H}_\gamma$ . La première probabilité se décompose en un produit des contributions de chaque Nuplet composant l'hypothèse<sup>3</sup>, soit une somme pour le log-vraisemblance. Par contre, la probabilité a priori contient des termes combinatoires indécomposables. Par conséquent, on fait l'approximation que ces termes combinatoires sont équiprobables quelque soit l'hypothèse ce qui conduit à retenir les probabilités faisant intervenir seulement les probabilités de détection et de fausse-alarme du problème. Le problème d'extraction-poursuite revient alors à choisir le partitionnement qui maximise le rapport (1). Ainsi, pour le problème avec  $T$  scans et  $S$  plateformes observatrices, le coût du Nuplet  $Z_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  correspondant à une source  $\hat{x}$  vaut :

$$c_{i_1 \dots i_N} = \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^S \left\{ \delta_{i_s}^s(t) \left[ \frac{1}{2\sigma_s^2} (z_{i_s}^s(t) - \beta_s(\hat{x}, t))^2 + \log \left( \frac{\sqrt{2\pi}\sigma_s \lambda_s}{Pd_s(t)} \right) \right] - (1 - \delta_{i_s}^s(t)) \log(1 - Pd_s(t)) \right\} \quad (3)$$

avec

- la variable binaire  $\delta_{i_s}^s(t)$  définit par :

$$\delta_{i_s}^s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_n = 0 \text{ (} n = s \text{)} \\ 0 & \text{sinon (} z_{i_s}^s(t) \text{ est une mesure factice)} \end{cases}$$

- l'équation de mesure pour la plateforme  $s$  :

$$z(t) = \begin{cases} \beta_s(x, t) + v_s(t) & \text{si } z = \text{source de paramètres } x \\ w_s(t) & \text{si } z = \text{une fausse-alarme} \end{cases}$$

( $v_s$  bruit de mesure blanc gaussien de variance  $\sigma_s^2$ ,  $w_s$  localisation d'une fausse-alarme de d.d.p. uniforme) ;

- $\hat{x}$  vecteur paramètre estimé de la source par maximum de vraisemblance à partir du Nuplet  $Z_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  ;
- $\lambda_s$  densité de fausse-alarme par unité de volume ;
- $Pd_s(t)$  probabilité de détection de la plateforme  $s$ .

Le problème d'extraction-poursuite de sources multiples peut alors se formuler comme un problème d'optimisation

<sup>3</sup>Cette décomposition se justifie sous l'hypothèse d'indépendance des observations entre deux scans et entre deux plateformes

combinatoire, plus précisément comme un problème d'affectation de dimension  $N$ , sous la forme suivante :

$$\Phi_N = \min_{\rho_{i_1 i_2 \dots i_N}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_N=0}^{m_N} c_{i_1 i_2 \dots i_N} \rho_{i_1 i_2 \dots i_N} \quad (4)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_N=0}^{m_N} \rho_{i_1 i_2 \dots i_N} = 1, & i_1 = 1 \dots m_1 \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_{N-1}=0}^{m_{N-1}} \rho_{i_1 i_2 \dots i_N} = 1, & i_N = 1 \dots m_N \end{cases} \quad (5)$$

avec  $\rho_{i_1 i_2 \dots i_N} \in \{0, 1\}$  une variable binaire indiquant l'absence ou la présence du Nuplet  $Z_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  dans la partition optimale. Les  $N$  ensembles de contraintes correspondent à l'expression mathématique des règles d'association pour que le partitionnement des mesures soit admissible.

Ce problème d'optimisation en nombres entiers appartient à la classe des problèmes NP-complets [5]. Cependant, un algorithme de relaxation lagrangienne permet d'approcher au mieux la solution optimale. Cet algorithme est présenté brièvement dans le paragraphe suivant. On pourra se référer à [6] [8] pour une présentation détaillée des différentes étapes de l'algorithme.

### 3 Obtention d'une solution approchée par relaxation lagrangienne

Le but est de relâcher les ensembles de contraintes qui rendent le problème NP-hard. Le nouveau problème peut alors se résoudre par des algorithmes efficaces. De plus, l'optimum du nouveau problème est une borne sur l'optimum du primal (4). Puisque des algorithmes de complexité polynomiale existent pour des problèmes d'affectation de dimension  $N=2$ , ( $N-2$ ) ensembles de contraintes sont relâchées dans (4). Donc, en supposant les ( $N-2$ ) derniers ensembles de contraintes relâchés, le problème de relaxation lagrangienne se met sous la forme :

$$\begin{aligned} \Phi_u^2(u_3, \dots, u_N) = & \quad (6) \\ \min_{\rho_{i_1 \dots i_N}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_N=0}^{m_N} & (c_{i_1 \dots i_N} - u_{3, i_3} - \dots \\ & - u_{N, i_N}) \rho_{i_1 \dots i_N} + \sum_{i_3=0}^{m_3} u_{3, i_3} + \dots + \sum_{i_N=0}^{m_N} u_{N, i_N} \end{aligned}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_N=0}^{m_N} \rho_{i_1 \dots i_N} = 1, & i_1 = 1 \dots m_1 \\ \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_3=0}^{m_3} \dots \sum_{i_N=0}^{m_N} \rho_{i_1 \dots i_N} = 1, & i_2 = 1 \dots m_2 \end{cases} \quad (7)$$

où  $u_3 = \{u_{3, i_3}\}_{i_3=0 \dots m_3}, \dots, u_N = \{u_{N, i_N}\}_{i_N=0 \dots m_N}$  sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes relâchées. Par souci de clarté dans les notations, on introduit un multiplicateur de Lagrange factice (ie : ne correspondant à aucune

contrainte relâchée) :  $u_{j,0} = 0, \forall j = 3 \dots N$ .

Ce problème peut se réécrire comme un problème d'affectation de dimension 2 comme suit [8] [6] :

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_u^2(u_3, \dots, u_N) = & \quad (8) \\ \min_{w_{i_1 i_2}^2} \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} d_{i_1 i_2}^2 w_{i_1 i_2}^2 + \sum_{i_3=0}^{m_3} u_{3, i_3} + \dots + \sum_{i_N=0}^{m_N} u_{N, i_N} \end{aligned}$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} \sum_{i_2=0}^{m_2} w_{i_1 i_2}^2 = 1, & i_1 = 1 \dots m_1 \\ \sum_{i_1=0}^{m_1} w_{i_1 i_2}^2 = 1, & i_2 = 1 \dots m_2 \end{cases} \quad (9)$$

avec  $d_{i_1 i_2}^2$  et  $w_{i_1 i_2}^2$  définis par :

$$\begin{aligned} d_{i_1 i_2}^2 = & \begin{cases} \min_{i_3} \dots \min_{i_N} (c_{i_1 \dots i_N} - u_{3, i_3} - \dots \\ \quad - u_{N, i_N}) & , \forall (i_1, i_2) \neq (0, 0) \\ 0 & , (i_1, i_2) = (0, 0) \end{cases} \\ w_{i_1 i_2}^2 = & 0, 1 \end{aligned}$$

L'équivalence entre ces deux problèmes n'est pas directe car les mesures factices introduites pour modéliser les fausses-alarms et les non-détections ne sont soumises à aucune contrainte. Nous donnons une preuve de (9) dans [6]. Le problème de relaxation lagrangienne mis sous la forme (9) peut se résoudre exactement en utilisant un algorithme d'affectation 2D comme par exemple l'algorithme des enchères (auction algorithm)<sup>4</sup> [3] ou l'algorithme des signatures [1]. Ces algorithmes ont une complexité en  $n^3$  si  $n$  représente le nombre d'objets à affecter. L'intérêt majeur des méthodes de relaxation et plus particulièrement de la relaxation lagrangienne provient de la propriété suivante :

**Proposition 1** —

$$\Phi_N \geq \Phi^{(2)*} = \max_{u_3 \dots u_N} \Phi_u^{(2)} \geq \Phi_u^{(2)}.$$

Cette propriété se déduit directement en remarquant que l'ensemble des contraintes de (4) est inclus dans (6). Par conséquent, on obtient une borne inférieure sur l'optimum de (4). De plus, à partir d'une solution du problème (9), il est possible de reconstruire une solution réalisable au problème primal par résolution de problèmes 2D en renforçant successivement les contraintes relâchées [6][8]. On obtient ainsi un encadrement de la valeur optimale du problème c'est à dire une surestimation du saut de dualité défini par  $(\Phi^{(2)*} - \Phi_N)$  qui n'est pas nul en général en programmation en nombres entiers contrairement à la programmation linéaire. Cette mesure fournit donc un critère d'arrêt de l'algorithme.

La seconde partie de l'algorithme est dédiée à la recherche de l'optimum du problème dual  $\Phi^{(2)*}$ , celui qui fournit la meilleure borne de  $\Phi_N$ . La maximisation de la fonction duale  $\Phi_u^{(2)}$  s'obtient par un algorithme de sous-gradient puisque cette fonction est concave, linéaire par morceaux mais non partout

<sup>4</sup>Cet algorithme doit être modifié pour prendre en compte les mesures factices

différentiable. A partir d'une initialisation des multiplicateurs de Lagrange (en général,  $u^{(0)} = \{u_j^{(0)}\}_{j=1 \dots N} = 0$ ), on obtient une solution au problème de maximisation en calculant une séquence de multiplicateurs :

$$u_{j,i_j}^{(k+1)} = u_{j,i_j}^{(k)} + \lambda^{(k)} g_{j,i_j}^{(k)} \quad \forall j = 3 \dots N, i_j = 1 \dots n_j \quad (10)$$

Il existe un sous-gradient  $g_j^{(k)}$  qui se calcule aisément. Il correspond à la violation des contraintes relâchées. Il se calcule directement à partir de la solution  $\rho_{i_1 \dots i_j \dots i_N}^*$  du problème de relaxation lagrangienne (6) :

$$\forall j = 3 \dots N, i_j = 1 \dots n_j$$

$$g_{j,i_j}^{(k)} = \quad (11)$$

$$1 - \sum_{i_1=0}^{n_1} \dots \sum_{i_{j-1}=0}^{n_{j-1}} \sum_{i_{j+1}=0}^{n_{j+1}} \dots \sum_{i_N=0}^{n_N} \rho_{i_1 \dots i_j \dots i_N}^* \quad (12)$$

Différentes stratégies peuvent être utilisées pour choisir le pas  $\lambda^{(k)}$  dans la direction d'un sous-gradient  $g_j^{(k)}$ . Celle mise en oeuvre dans l'algorithme provient de [2]. La performance de l'algorithme global dépend essentiellement de celle de l'algorithme du sous-gradient.

En conclusion, l'algorithme global peut se résumer ainsi

1. Pour un scénario donné, calculer les coûts  $c_{i_1 \dots i_N}$  de tous les Nuplets  $Z_{i_1, i_2, \dots, i_N}$  ;
2. Initialiser les multiplicateurs de Lagrange
3. Répéter jusqu'à ce qu'une condition d'arrêt soit valide
  - Construire le problème de relaxation lagrangienne (9) pour les nouveaux multiplicateurs ;
  - Résoudre le problème d'affectation 2D (9) par l'algorithme des enchères (auction) ou autres . . .
  - Calculer par (12) un sous-gradient  $g_j^{(k)}$  à partir de la solution obtenue ;
  - Mettre à jour les multiplicateurs de Lagrange par (10)
  - Calculer pour la solution de (9) une solution réalisable au problème primal (par résolution successives de problèmes 2D) pour déterminer une sur-estimation du saut de dualité

## 4 Conclusion

Nous avons présenté un algorithme pour résoudre le problème d'association de données en extraction-poursuite de sources multiples. Les différentes étapes de l'algorithme ont été détaillées. Des résultats sur des scénarios comportant plusieurs plateformes et plusieurs scans viendront compléter cette communication.

Une étude de méthodes de réduction d'informations doit être envisagée afin de s'affranchir de la dimension réduite du problème d'affectation que l'on peut espérer résoudre par relaxation lagrangienne.

## Références

- [1] M.L. Balinski, "Signature methods for the assignment problems", Operations research, Vol. 33, No. 3, pp. 527-536, May-June 1985.
- [2] M.S. Bazaraa, H.D. Sherali, "On the choice of step size in subgradient optimization", European Journal of Operational Research, Vol. 7, pp. 380-388, 1981.
- [3] D.P. Bertsekas, "The auction algorithm : a distributed relaxation method for the assignment problem", Annals of Operations Research, Vol. 14, pp. 105-123, 1988.
- [4] A.M. Frieze, J. Yadegar, "An Algorithm for Solving 3-Dimensional Assignment Problems with Application to Scheduling a Teaching Practice", Journal of the Operational Research Society, Vol. 32, No. 11, pp. 989-995, 1981.
- [5] M.R. Garey, D.S. Johnson, "Computers and Intractability : A Guide to the theory of NP-Completeness", Freeman, San-Francisco, 1979.
- [6] H. Gauvrit, C. Jauffret, J.P. Le Cadre, "A N-dimensional Assignment Algorithm to solve multitarget tracking", Proceedings of the first Australian Data Fusion Symposium, pp. 172-177, Adelaide, Nov. 1996.
- [7] C. L. Morefield, "Application of 0-1 integer programming to multitarget tracking problems", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, No. 3, pp. 302-311, June 1977.
- [8] K. R. Pattipati, S. Deb, Y. Bar-Shalom, R. B. Washburn, "A new relaxation algorithm and passive sensor data association", IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-37, No. 2, pp. 198-213, February 1992.
- [9] A. B. Poore, N. Rijavec, "Multi-target tracking and multi-dimensional assignment problems", SPIE Int. Symposium, Signal and Data Processing of Small Targets 1991, SPIE Proceedings Vol. 1481, Orlando, FL, April 1991.