

# Influence de la puissance de l'entrée sur la capacité de poursuite des filtres adaptatifs

S. Ben Jabara<sup>(1)(2)</sup>, M. Jaïdane-Saïdane<sup>(1)</sup>

<sup>(1)</sup> L.S.Télécoms, ENIT, Campus Universitaire, Le Belvédère, Tunis, TUNISIE

Tél : (216-1) 874-700, Fax : (216-1) 870-729

<sup>(2)</sup> ESPTT, Route de Raoued, Km3.5 Cité El Ghazala 2083, Tunis, TUNISIE

Tél : (216-1) 762-000, Fax : (216-1) 762-819

## RÉSUMÉ

Une analyse de l'influence de la puissance de l'entrée sur la capacité de poursuite de l'algorithme du gradient stochastique (GS) est présentée. Cet algorithme est utilisé en identification d'un système non stationnaire dont les variations sont modélisées par une promenade aléatoire. Nous montrons l'influence contradictoire de la puissance de l'entrée sur la déviation quadratique moyenne et l'erreur quadratique moyenne résiduelle optimales. Lorsque deux non stationnarités sont combinées, celle de l'entrée du système à identifier et celle du système, nous montrons l'apport relatif de certains algorithmes normalisés pour une identification robuste face aux variations de la puissance de l'entrée.

## ABSTRACT

The analysis of the input power influence on the tracking capabilities of the LMS algorithm is presented. This algorithm is used in order to identify system variations modeled by a random walk. We prove that the tracking capabilities deduced from the optimal mean square deviation and misadjustment are contradictory. When input and system non stationarities are combined, the use of some normalized gradient-based algorithms in order to reinforce the identification robustness when the input is subject to power variations is justified.

## 1 Introduction

Dans le but d'améliorer les performances d'une structure d'identification en temps réel d'un système non stationnaire, il est intéressant d'analyser l'influence des caractéristiques de l'entrée (puissance, corrélation, contenu spectral, ...) sur les performances de l'algorithme d'adaptation utilisé. Lorsque l'entrée est stationnaire, ces caractéristiques n'ont une influence que sur la qualité du régime transitoire lors de l'identification adaptative d'un système linéaire invariant dans le temps. Lorsque l'on considère l'identification d'un système non stationnaire, c'est la capacité de poursuite de l'algorithme, qui caractérise le comportement en régime permanent, que l'on analyse. Pour un système non stationnaire dont les variations de la réponse impulsionnelle sont modélisées par une promenade aléatoire, une analyse de l'influence de la corrélation de l'entrée ([1]) sur la capacité de poursuite, a permis de montrer l'apport du couplage structures prédictives/structures classiques d'identification.

Nous présentons ici une analyse de l'influence de la puissance de l'entrée sur la capacité de poursuite du GS. Cette analyse permet de montrer, pour des entrées telles que la parole, pour lesquelles la non stationnarité se traduit par des variations de puissance, que la robustesse des algorithmes normalisés vis à vis de telles fluctuations est toute relative lorsque l'on combine les non stationnarités de l'entrée et du système.

## 2 Influence de la puissance de l'entrée

### 2.1 Formulation mathématique

La figure (1) représente le schéma classique d'identification d'un système. L'entrée  $x(k)$  peut être stationnaire ou non. On se place dans un contexte non stationnaire ou les variations de la réponse impulsionnelle  $F(k)$  du système sont modélisées par une promenade aléatoire

$$F(k+1) = F(k) + \Omega(k+1) \quad (1)$$

où chaque composante  $\omega_i(k)$ ,  $i = 0..N-1$  de  $\Omega(k)$  est une séquence stationnaire, indépendante de l'entrée  $x(k)$  et du bruit stationnaire d'observation  $b(k)$  de puissance  $P_b$ .

Le système inconnu  $F(k)$  est identifié en utilisant l'algorithme du gradient stochastique (GS). Le vecteur paramètre  $H(k)$  du filtre adaptatif évolue selon :

$$H(k+1) = H(k) + \mu e(k)X(k) \quad (2)$$

où  $e(k) = y(k) - H(k)^T X(k)$  est l'erreur d'estimation,  $X(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]^T$  est le vecteur d'observation de l'entrée et  $\mu > 0$  est le pas d'adaptation.

Sous l'hypothèse classique d'indépendance entre les séquences des vecteurs observation  $X(k)$  et déviation  $V(k) = H(k) - F(k)$ , les expressions analytiques des 2 critères de mesure des performances étudiés : l'Erreur Quadratique Moyenne Résiduelle normalisée  $EQMR = (E\{e(k)^2\} - P_b) / P_b$  et la Déviation Quadratique Moyenne  $DQM = E\{V(k)^T V(k)\}$  obtenues dans le cas d'une entrée

stationnaire, gaussienne et blanche sont les suivantes ([2])

$$EQMR = \frac{1}{2 - \frac{2+N}{N}v} \left[ v + \frac{N\delta}{v} \right] = \frac{P_x DQM}{P_b} \quad (3)$$

On note  $P_x = E \{x(k)^2\}$  la puissance de l'entrée,  $P_\omega = E \{\omega_i(k)^2\}$ ,  $\forall i = 0, \dots, N-1$ ,  $\delta = NP_x P_\omega / P_b$  le degré de non stationnarité et  $v = \mu NP_x$  le pas d'adaptation normalisé.

Lorsque l'entrée  $x(k)$  et les composantes du bruit qui caractérise la non stationnarité du système  $\Omega(k)$  sont corrélées, on se limitera au cas des faibles pas d'adaptation ([3])

$$EQMR = \frac{1}{2} \left[ v + \frac{N\delta}{v} \right] \quad (4)$$

$$DQM = \frac{P_b}{2P_x} \left[ v + \frac{\delta Tr(R_x^{-1} R_\Omega)}{v} \right] \quad (5)$$

où  $R_x = E \{X(k)X(k)^T\} / P_x$  est la matrice de corrélation normalisée de l'entrée,

$R_\Omega = E \{\Omega(k)\Omega(k)^T\} / P_\omega$  est la matrice de corrélation normalisée des bruits de non stationnarités.

Notons qu'une nouvelle approche de calcul a été développée dans ([1]) afin d'estimer la capacité de poursuite pour une plus large gamme du pas d'adaptation incluant ainsi le pas d'adaptation optimal.

## 2.2 Cas d'une entrée blanche

Lorsque l'entrée est blanche, il est possible, à partir de l'équation (3) de donner les expressions analytiques de la  $DQM$  minimale ( $DQM_{min}$ ) et l' $EQMR$  minimale ( $EQMR_{min}$ ) pour le pas d'adaptation optimal

$$EQMR_{min} = \frac{2}{\frac{2+N}{N} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{4P_b}{(2+N)^2 P_x P_\omega}} \right]} \quad (6)$$

$$DQM_{min} = \frac{P_b EQMR_{min}}{P_x} \quad (7)$$

Ainsi, lorsque la puissance de l'entrée augmente, de meilleures performances en terme de  $DQM_{min}$  sont obtenues, alors que l' $EQMR_{min}$  se dégrade.

Ce résultat contradictoire est illustré sur la figure (2) pour un système à 2 coefficients ( $N = 2$ ) caractérisé par  $P_\omega = 0.005$  et  $P_b = 0.1$  et une entrée blanche gaussienne.

## 2.3 Cas d'une entrée corrélée

Lorsque l'entrée et les composantes  $\Omega(k)$  sont corrélées, les équations (4) et (5) montrent que les conclusions énoncées dans le cas d'une entrée blanche se généralisent pour les faibles pas d'adaptation. Les figures (3.a) et (3.b) illustrent ce résultat dans le cas du système précédent avec

$\rho_\omega = E \{\omega_0(k)\omega_1(k)\} / P_\omega = 0.5$ . L'entrée choisie est corrélée avec

$$\rho_x = E \{x(k)x(k-1)\} / P_x = 0.5.$$

La figure (3.b) montre de plus, qu'à partir d'un certain pas, la  $DQM$  évolue dans le même sens que l' $EQMR$ , c'est à dire se dégrade aussi lorsque la puissance de l'entrée augmente.

## 3 Difficulté de choix d'un algorithme robuste

Nous combinons maintenant deux types de non stationnarités, la première est liée aux variations du système, tandis que la seconde est liée aux variations de la puissance de l'entrée, comme cela est le cas en transmission du signal de parole sur un canal par exemple de type radio-mobile.

### 3.1 Insuffisances du gradient stochastique

Lorsque l'on analyse la robustesse de la capacité de poursuite du GS vis à vis des fluctuations de la puissance, deux résultats issus de l'analyse précédente montrent la difficulté de cette analyse.

Tout d'abord, il faut noter que si la  $DQM$  définie par le moment du second ordre de l'écart entre le filtre inconnu et son identifiant, mesure effectivement la capacité de poursuite, seule l' $EQMR$  est mesurable. L'analyse précédente montre, dans le cas d'une entrée blanche, qu'à une puissance de l'entrée élevée correspond une bonne capacité de poursuite en terme de  $DQM$ , alors que, contrairement elle dégrade l' $EQMR$ .

D'autre part, lorsqu'on est en présence d'une entrée corrélée, comme cela est le cas pour le signal de parole, on constate que les pas d'adaptation optimaux qui dépendent de la puissance  $P_x$  de l'entrée (et des caractéristiques du système à poursuivre) sont différents selon que c'est le critère de la  $DQM$  ou de l' $EQMR$  que l'on cherche à optimiser.

Ceci est illustré sur la figure (4) dans le cas d'une entrée stationnaire fortement corrélée  $\rho_x = 0.9$  et pour le système non stationnaire étudié précédemment. Cette figure montre d'une part que les pas d'adaptation optimaux décroissent en fonction de la puissance de l'entrée et d'autre part que le pas d'adaptation optimal minimisant l' $EQMR$  ( $\mu_{EQMR}^{opt}$ ) est toujours inférieur à celui minimisant la  $DQM$  ( $\mu_{DQM}^{opt}$ ).

### 3.2 Apport relatif des algorithmes normalisés

Les algorithmes normalisés utilisés pour la prédiction de signaux non stationnaires, tels que les signaux de parole, présentent une certaine robustesse vis à vis des fluctuations de la puissance.

Afin d'améliorer la capacité de poursuite du GS, lorsque l'entrée du système non stationnaire à identifier est sujette à des fluctuations de la puissance, on se propose d'utiliser encore de tels algorithmes normalisés caractérisés par

$$H(k+1) = H(k) + \mu \Delta(k) \quad (8)$$

où l'incrément  $\Delta(k)$  est égal à  $e(k)X(k)/\hat{P}_x(k)$  pour le GS normalisé;  $\hat{P}_x(k)$  étant une estimation récursive de la puissance de l'entrée.

On considère également les incréments  $Sgn(e(k))X(k)$  (algorithme S1),  $e(k)Sgn(X(k))$  (Algorithme S2) et  $Sgn(e(k))Sgn(X(k))$  (Algorithme S3).

Quelques résultats de simulations relatifs aux performances de ces algorithmes sont résumés dans le tableau (1). Ce dernier

donne les critères de performances  $DQM_{min}$  et  $EQMR_{min}$  atteints par les algorithmes. Deux séquences de parole de 50.000 points, prélevés à la fréquence de 8 KHz ont été testées. Chaque échantillon de valeur comprise entre  $-1$  et  $+1$  est codé sur 16 bits.

La première séquence correspond à la phrase “Il se garantira du froid avec ce bon capuchon” tandis que la seconde séquence est relative à la phrase “Le loup se jeta immédiatement sur la petite chèvre”.

Le tableau (1) montre que comparativement au GS, l’algorithme  $Sgn(e(k))Sgn(X(k))$  dégrade systématiquement les performances de l’identification. Par contre, l’algorithme du GS Normalisé améliore toujours l’ $EQMR_{min}$  alors qu’il dégrade la  $DQM_{min}$ . Avec l’algorithme du signe de l’entrée, on aboutit au même type de conclusion, pour une complexité plus faible.

Si l’on s’intéresse maintenant à la capacité de poursuite de non stationnarités des algorithmes, c’est à dire à la  $DQM_{min}$ , on constate que seul l’algorithme du signe de l’erreur, de faible complexité, améliore la poursuite. Cependant, comme cet algorithme dégrade toujours l’ $EQMR_{min}$  il peut être rejeté dans un contexte réel de simulations, puisque seule l’ $EQMR$  est mesurable.

## 4 Conclusion

Lorsqu’en identification de système, on considère deux non stationnarités : celle liée aux variations de la puissance de l’entrée et celle liée aux variations de la réponse impulsionnelle du système, le choix d’un algorithme conduisant à une bonne capacité de poursuite est délicat.

Les algorithmes normalisés apportent une relative amélioration devant le GS. La difficulté de l’interprétation est liée à l’influence contradictoire de la puissance de l’entrée sur les mesures de performances des algorithmes.

## Références

- [1] S.Ben Jebara and M. Jaidane, “Best Input for Optimal Tracking Randomly Time-Varying Systems : Justification of Adaptive Predictive Structure”, ICASSP, pp. 1957–1960, Avril 1997.
- [2] O. Macchi, “LMS Adaptive Processing with Applications in Transmission”, Wiley, 1994.
- [3] E.Eweda, “Comparison of RLS, LMS, and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels”, IEEE Trans. Signal Processing, Vol 42, N° 11, pp. 2937–2944, Nov 1994.

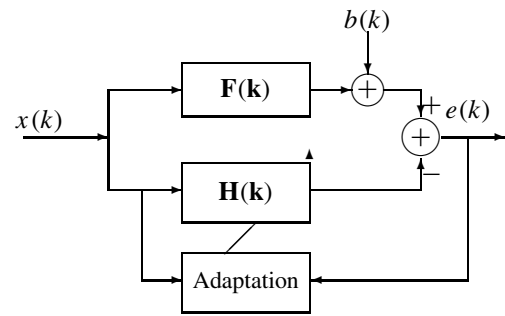


Figure 1 — Schéma d’identification classique

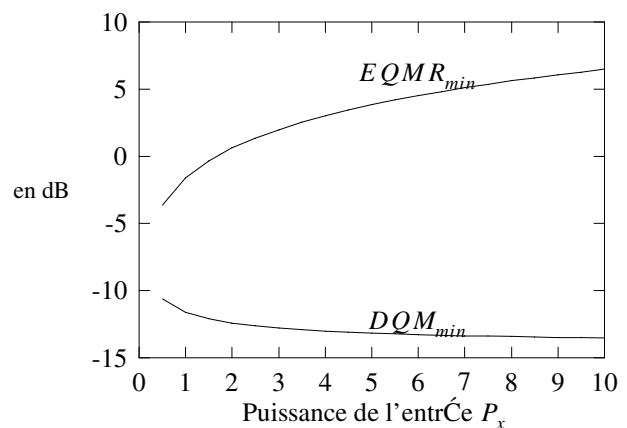


Figure 2 — Influence de la puissance de l’entrée sur la capacité de poursuite optimale pour  $N = 2$ ,  $P_b = 0.1$ ,  $P_\omega = 0.005$  et une entrée blanche

		GS	GSN	S1	S2	S3
Séq 1	$EQMR_{min}$	-13.4	-14.2	-13.0	-13.4	-12.0
	$DQM_{min}$	5.6	6.3	4.5	6.5	7.0
Séq 2	$EQMR_{min}$	-16.0	-16.4	-15.5	-17.2	-15.8
	$DQM_{min}$	7.8	7.9	7.1	8.2	8.3

Table 1 — Comparaison des performances (en dB) des algorithmes GS, GSN et algorithmes du signe

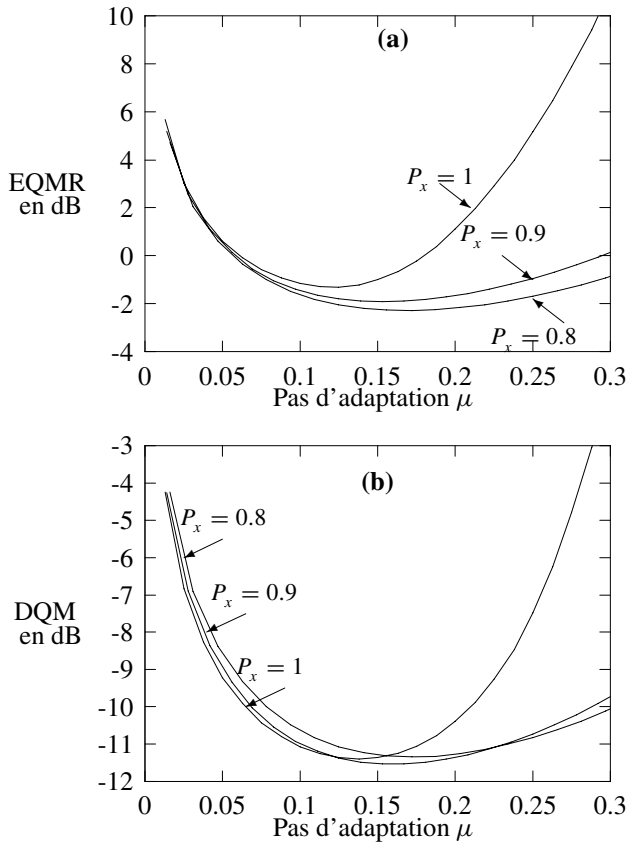


Figure 3 — Influence de la puissance de l'entrée sur l'EQMR et la DQM pour  $N = 2$ ,  $P_b = 0.1$ ,  $P_\omega = 0.005$ ,  $\rho_\omega = 0.5$  et  $\rho_x = 0.5$

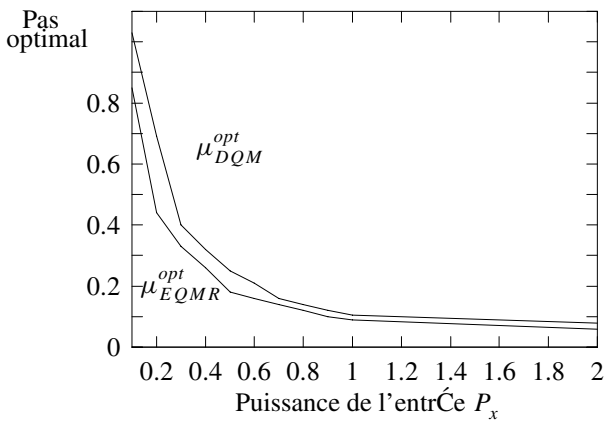


Figure 4 — Influence de la puissance de l'entrée sur  $\mu_{EQMR}^{opt}$  et  $\mu_{DQM}^{opt}$  pour  $N = 2$ ,  $P_b = 0.1$ ,  $P_\omega = 0.005$ ,  $\rho_\omega = 0$  et  $\rho_x = 0.9$