Certaines propriétés des codeurs convolutifs

Guillaume Planquette, Georges Vezzosi

Laboratoire de Traitement du Signal et de l'Image, Université de Rennes 1
Bat. 22, Campus de Beaulieu, 35042 RENNES CEDEX
Email : guillaume.planquette@univ-rennes1.fr

RESUME

Nous présentons certaines propriétés des codeurs convolutifs. Tout d'abord nous explicitons une caractérisation apparemment nouvelle des codeurs catastrophiques : un codeur convolutif (N, K, b) est catastrophique si et seulement si l'on peut annuler sa sortie entre les instants $t = b$ et $t = b + p$ inclus avec une suite d'entrée persistante (c'est-à-dire qui ne laisse pas retomber le codeur à son état nul), où $p = K(b+1) - \mathrm{rg}\, \boldsymbol{G}_1$ et $\boldsymbol{G}_1$ est une matrice qui définit le codeur. De là, on tire facilement une propriété de saut de rang qui se simplifie dans le cas d'un codeur systématique. La propriété de saut de rang permet ensuite de trouver la structure des vecteurs de contrôle du code puis de reconstruire un codeur minimal.

ABSTRACT

Some new properties of convolutional encoders will be presented. Firstly a new characterization of catastrophic encoders is presented : an (N, K, b) convolutional encoder, defined by its $\boldsymbol{G}_1$ matrix , is catastrophic if and only if it is possible to find a persistent input sequence that produces the null output for all instants t between b et b+p where $p = K(b+1) - \mathrm{rg}\, \boldsymbol{G}_1$. An input sequence is said persistent when it never leads to the null encoder state. Then a property on rank difference is deduced and simplified for systematic encoders. Finally this property is used to find the structure of dual code ant to build an equivalent minimal encoder.

1. Introduction

L'étude des propriétés des codeurs convolutifs s'effectue généralement au moyen des polynômes générateurs [Forn], [Pete], [Pire]. Nous proposons ici une approche radicalement différente de ces codeurs à partir des b+1 matrices binaires définissant la relation d'entrée-sortie du codeur (§2).

Nous développons au (§3) une caractérisation apparemment nouvelle des codeurs catastrophiques. De là, on tire facilement des propriétés de saut de rang (§4) qui nous permettent ensuite d'expliciter la structure des vecteurs de contrôle du code et de construire un codeur minimal générant le code (§5).

Notations. Un vecteur est noté $\underline{\boldsymbol{u}}$ et une matrice $\boldsymbol{A}$.

2. Codes convolutifs

Il existe plusieurs manières équivalentes de représenter la relation d'entrée-sortie du codeur. Nous ne présentons ici que la forme matricielle qui est la plus adaptée aux développements qui suivront.

Un codeur convolutif de paramètres (N, K, b) réalise la transformation d'un message binaire d'entrée $x(i)$ en un message binaire de sortie $y(j)$. Le message d'entrée $x(i)$ se décompose en blocs de taille K, le message transmis est alors constitué d'une suite de blocs de taille N. En prenant par convention $\underline{\boldsymbol{x}}_t = \underline{\boldsymbol{0}}$ pour $t < 0$, on obtient deux suites de vecteurs $\{\underline{\boldsymbol{x}}_t\}$ et $\{\underline{\boldsymbol{y}}_t\}$ définies par :

$$\underline{\boldsymbol{x}}_t = \left[x(tK) \;\; x(tK+1) \;\; \ldots \;\; x((t+1)K-1)\right] \qquad (1)$$

$$\underline{\boldsymbol{y}}_t = \left[y(tN) \;\; y(tN+1) \;\; \ldots \;\; y((t+1)N-1)\right] \qquad (2)$$

pour lesquelles la relation d'entrée-sortie est régie par :

$$\underline{\boldsymbol{y}}_t = \sum_{k=0}^{b} \underline{\boldsymbol{x}}_{t-k} \boldsymbol{A}_k, \quad t \geq 0, \;\; \boldsymbol{A}_0 \neq \boldsymbol{0}, \;\; \boldsymbol{A}_b \neq \boldsymbol{0}, \qquad (3)$$

où les matrices $\boldsymbol{A}_k$ sont de taille $K \times N$. Par suite, la relation liant n+b blocs d'entrée et n mots codés consécutifs est donnée par :

$$\left[\underline{\boldsymbol{y}}_t \;\; \ldots \;\; \underline{\boldsymbol{y}}_{t+n-1}\right] = \left[\underline{\boldsymbol{x}}_{t-b} \;\; \ldots \;\; \underline{\boldsymbol{x}}_{t+n-1}\right] \boldsymbol{G}_n$$

où la matrice $\boldsymbol{G}_n$ est la matrice de Sylvesteur :

n-1 colonnes -bloc

n-1 lignes-bloc

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_b & & & \\ \boldsymbol{A}_{b-1} & \boldsymbol{A}_b & & \\ \vdots & \boldsymbol{A}_{b-1} & \ddots & \\ \boldsymbol{A}_0 & \vdots & \vdots & \boldsymbol{A}_b \\ & \boldsymbol{A}_0 & \vdots & \boldsymbol{A}_{b-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \boldsymbol{A}_0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}_n$$

3. Une caractérisation des codeurs catastrophiques

Une suite de symboles binaires $\{\underline{x}_t, t \geq 0\}$ est finie si elle se termine par des zéros ; elle est sans fin dans le cas contraire. Un codeur convolutif est catastrophique s'il existe une suite d'entrée sans fin qui produit une suite de sortie finie. Intuitivement, un codeur est catastrophique parce qu'on peut maintenir sa sortie à 0 à partir du temps $t = b$ en un nombre suffisant d'instants. Il doit donc exister une condition simple qui mette en jeu l'une des matrices $\boldsymbol{G}_n$ définies plus haut. Le résultat qui suit [Plan] montre qu'une propriété de ce type a bien lieu. Dans notre énoncé, par suite d'entrée *persistante,* nous voulons dire une suite d'entrée $\{\underline{x}_t\}$ qui ne laisse jamais retomber le codeur à son état nul, c'est-à-dire **telle que le nombre de blocs de 0 consécutifs qu'elle contient reste toujours inférieur ou égal à *b*-1**. Si la suite $\{\underline{x}_t\}$ est persistante, tous ses segments de longueur b

$$\left[\underline{x}_t \quad \underline{x}_{t+1} \quad \ldots \quad \underline{x}_{t+b-1}\right]$$

contiennent au moins un élément non nul.
On obtient alors une caractérisation nouvelle des codeurs catastrophiques différente de celle obtenue par [Mass] :

Théorème 1. Considérons le codeur convolutif (N, K, b) défini par la matrice $\boldsymbol{G}_1$ à N colonnes et $K(b+1)$ lignes ; soit r le rang de $\boldsymbol{G}_1$. Alors, si $p = K(b+1) - r$, le codeur est catastrophique si et seulement si il existe une suite d'entrée $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{b+p}\}$ qui :

- possède au plus b-1 blocs (de taille K) nuls consécutifs,
- annule la sortie du codeur entre les instants $t = b$ et $t = b + p$ inclus.

Application 1. Considérons la matrice $\boldsymbol{G}_{p+1}$, celle-ci possède $K_{p+1} = (b + 1 + p)K$ lignes et $N_{p+1} = (p+1)N$ colonnes. Par définition $p = K(b+1) - r$ si bien que la différence entre le nombre de colonnes et le nombre de lignes est positive ou nulle :

$$N_{p+1} - K_{p+1} = \left(K(b+1) - r\right)\left(N - K - 1\right) + N - r \geq 0. \quad (4)$$

car $r \leq \inf(N, K(b+1))$. Ainsi le nombre des colonnes de la matrice $\boldsymbol{G}_{p+1}$ est toujours plus grand ou égal à celui des lignes.
De plus, trouver une suite d'entrée qui annule la sortie du codeur entre les instants $t = b$ et $t = b + p$, équivaut à résoudre

$$\left[\underline{x}_0 \quad \underline{x}_1 \quad \ldots \quad \underline{x}_{b+p}\right]\boldsymbol{G}_{p+1} = \underline{\boldsymbol{0}} \qquad (5)$$

c'est-à-dire à rechercher les vecteurs du noyau à gauche de la matrice $\boldsymbol{G}_{p+1}$. La condition pour qu'un codeur ne soit pas catastrophique revient ainsi à étudier le rang de $\boldsymbol{G}_{p+1}$, comme l'indique le tableau suivant :

Codeur non catastrophique	Codeur catastrophique
$\boldsymbol{G}_{p+1}$ est de rang plein, ou est de rang déficient et ne possède aucun vecteur de contrôle à gauche persistant.	$\boldsymbol{G}_{p+1}$ est de rang déficient et possède des vecteurs de contrôle à gauche persistants.

Le résultat se simplifie si l'on suppose en plus que $\boldsymbol{A}_0$ et $\boldsymbol{A}_b$ sont de rang plein (par exemple si $K = 1$).

Corollaire. Si $\boldsymbol{A}_0$ et $\boldsymbol{A}_b$ sont de rang plein, le codeur est non catastrophique si et seulement si la matrice $\boldsymbol{G}_{p+1}$ est de rang plein.

Application 2. Inversion d'un codeur non catastrophique. La caractérisation précédente permet de déduire des propriétés sur l'inverseur algébrique d'un codeur donné. En effet, la démonstration du théorème 1 montre que si le codeur n'est pas catastrophique toute suite d'entrée $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{b+p}\}$ annulant la sortie du codeur entre les instants $t = b$ et $t = b + p$ inclus contient un segment central d'au moins b+1 zéros communs a toutes les suites. Soit m, m+1, …, m+n les positions occupées par les zéros de ce segment central, où n ³ b. Deux suites produisant le même vecteur de sortie $\underline{y} = \left[\underline{y}_b \quad \ldots \quad \underline{y}_{b+p}\right]$ ont alors nécessairement les mêmes entrées entre les instants m et m+n inclus, ce qui prouve que la donnée de $\underline{y}$ détermine sans ambiguïté les mots d'entrée $\underline{x}_m, \underline{x}_{m+1}, \ldots, \underline{x}_{m+n}$. Tout codeur non catastrophique peut donc s'inverser par un FIR, non causal en général, et de plus de n+1 façons différentes.

Dans la suite nous nous intéressons aux propriétés de saut de rang de la matrice $\boldsymbol{G}_n$: la démonstration de celles-ci donnera un moyen de caractériser le code dual.

4. Propriété du saut de rang

4.1 Une identité remarquable

Étant donné un codeur C défini par la suite des matrices $\{\boldsymbol{A}_0, \ldots, \boldsymbol{A}_b\}$ avec $\boldsymbol{A}_0$ et $\boldsymbol{A}_b$ non nulles, nous lui associons le codeur retourné $\tilde{C}$ défini par les matrices $\{\boldsymbol{A}_j\}$ prises en sens inverse :

$$\tilde{C} = \left\{\tilde{\boldsymbol{A}}_0, \ldots, \tilde{\boldsymbol{A}}_b\right\} = \left\{\boldsymbol{A}_b, \ldots, \boldsymbol{A}_0\right\}. \qquad (6)$$

Les codeurs C et $\tilde{C}$ sont catastrophiques dans les mêmes conditions : si la suite $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{b+p}\}$ est persistante et annule la sortie du codeur C entre les instants b et $b + p$, la suite retournée $\{\underline{x}_{b+p}, \ldots, \underline{x}_1, \underline{x}_0\}$ est persistante et annule la sortie du codeur retourné aux mêmes instants. Donc C est catastrophique si et seulement si $\tilde{C}$ est catastrophique.
Supposant le codeur C non catastrophique et les codeurs C et $\tilde{C}$ dans leur état nul au temps $t = 0$, définissons :

- $D_{\max}$: le nombre maximum d'instants successifs en lesquels on peut annuler la sortie du codeur C à partir du temps $t = 0$ inclus, avec une suite d'entrée dont le premier élément n'est pas nul ;
- $Q_{\max}$: la même quantité pour le codeur retourné $\tilde{C}$.

Sous ces conditions on obtient le théorème suivant [Plan] :

Théorème 2 - Pour tout codeur non catastrophique

$$Q_{\max} + D_{\max} \leq p = K(b+1) - \operatorname{rg} \boldsymbol{G}_1.$$

Remarque. Il ne semble pas que la majoration précédente puisse être beaucoup améliorée. Voici un exemple où l'égalité a lieu. Considérons le codeur défini par :

$$\boldsymbol{A}_0 = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{0}} \\ \underline{\ell}_1 \\ \vdots \\ \underline{\ell}_{K-1} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_1 = \cdots = \boldsymbol{A}_{b-1} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{A}_b = \begin{bmatrix} \underline{\ell}_1 \\ \underline{\ell}_2 \\ \vdots \\ \underline{\ell}_K \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

où les lignes $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_K$ sont linéairement indépendantes. Ce codeur n'est pas catastrophique, le nombre maximum de lignes linéairement indépendantes de sa matrice $\boldsymbol{G}_1$ est K donc rg $\boldsymbol{G}_1 = K$. De plus $\boldsymbol{A}_b$ est de rang plein, donc $Q_{\max} = 0$. La majoration précédente amène alors

$$D_{\max} \leq K(b+1) - K = Kb. \tag{8}$$

Pour annuler la sortie à partir du temps $t = 0$, on est obligé de répéter :

- b fois le mot $[1\ 0 \ldots 0]$
- b fois le mot $[0\ 1 \ldots 0]$

$\vdots$

- b fois le mot $[0\ 0 \ldots 1]$,

et au temps $t = Kb$ on ne peut plus annuler le mot de sortie puisque le vecteur $[0\ 0\ \ldots\ 1]\boldsymbol{A}_b = \ell_K$ n'est compensé par aucune ligne de $\boldsymbol{A}_0$ donc $D_{\max} = Kb$ et l'égalité a lieu.

4.2 La propriété du saut de rang

Les suites $\{\underline{x}_0, \underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_{n+b-1}\}$ qui annulent la sortie du codeur C entre les instants b et $n+b-1$ sont aussi les vecteurs du noyau à gauche de la matrice $\boldsymbol{G}_n$.

Soit S l'espace vectoriel des vecteurs d'ordre $D_{\max}$ qui annulent la sortie du codeur C entre les instants 0 et $D_{\max} - 1$ compris. Si le vecteur $\underline{s} = [\underline{s}_0\ \ldots\ \underline{s}_{D_{\max}-1}]$ a sa première composante différente de 0 et annule la sortie du codeur C entre 0 et $D_{\max} - 1$, l'espace S contient le vecteur $\underline{s}$ et tous ses décalés :

$$\mathrm{D}\underline{s} = [\underline{0}\ \ \underline{s}_0\ \cdots\ \underline{s}_{D_{\max}-2}]$$
$$\vdots\ \ddots$$
$$\mathrm{D}^{D_{\max}-1}\underline{s} = [\underline{0}\ \ \underline{0}\ \cdots\ \underline{s}_0]$$

où D est l'opérateur retard appliqué aux vecteurs. Comme ces vecteurs sont linéairement indépendants, la dimension de S satisfait $\dim S \geq D_{\max}$.

Soit de même $\tilde{S}$ l'espace vectoriel des vecteurs d'ordre $Q_{\max}$ qui annulent la sortie du codeur retourné $\tilde{C}$ entre 0 et $Q_{\max} - 1$. Nécessairement $\dim S \geq Q_{\max}$. Pour $n \geq p+1$ les vecteurs du noyau à gauche de $\boldsymbol{G}_n$ ne sont pas persistants. Ceux de $\boldsymbol{G}_{p+1}$ ont en commun un segment central de zéros de longueur supérieure ou égale à b+1. Donc ceux de $\boldsymbol{G}_n$ ont en commun un segment central de zéros de longueur supérieure ou égale à $b+n-p$. Pour obtenir un vecteur du noyau à gauche de $\boldsymbol{G}_n$ pour $n \geq p+1$, il faut opérer de la façon suivante :

1. prendre un vecteur de $\tilde{S}$, le retourner et le caler à gauche sur les $Q_{\max}$ premières composantes de $\{\underline{x}_0, \ldots, \underline{x}_{n+b-1}\}$;
2. prendre un vecteur de S et le caler à droite sur les $D_{\max}$ dernières composantes ;
3. mettre toutes les composantes restantes à zéro.

Pour $n \geq p+1$ la dimension du noyau à gauche de $\boldsymbol{G}_n$ est donc une constante égale à dim S + dim $\tilde{S}$. Puisque la dimension est une constante, c'est que l'augmentation de rang dans le passage de $\boldsymbol{G}_n$ à $\boldsymbol{G}_{n+1}$ compense l'augmentation du nombre de lignes, qui vaut K. Ceci établit la propriété du saut de rang.

Théorème 3 - Pour un codeur non catastrophique, on a pour tout $n \geq p+1$: $\Delta_n = \text{rg}\ \boldsymbol{G}_{n+1} - \text{rg}\ \boldsymbol{G}_n = K$.

Les essais réalisés avec les exemples de codeurs tabulés dans [Dhol] montrent que le saut de rang de $\boldsymbol{G}_n$ a lieu bien avant $n = p+1$: il a lieu en général dès que le nombre de colonnes de $\boldsymbol{G}_n$ devient plus grand ou égal à celui des lignes, c'est-à-dire dès que $n > n_0 = \frac{Rb}{1-R}$, $R = K/N$. Le résultat qui suit montre qu'on a bien une propriété de ce type dans le cas des codeurs systématiques.

Théorème 4 : si le codeur est systématique, le saut de rang $\Delta_n = \text{rg}\ \boldsymbol{G}_{n+1} - \text{rg}\ \boldsymbol{G}_n$ est égal à K dès que $n \geq b$.

5. La structure des vecteurs de contrôle

Convention. Dans cette partie uniquement les matrices génératrices du codeur sont notées $\{\boldsymbol{A}(0), \ldots, \boldsymbol{A}(b)\}$ au lieu de $\{\boldsymbol{A}_0, \ldots, \boldsymbol{A}_b\}$.

Les vecteurs de contrôle définissent les combinaisons linéaires qui annulent les sorties du codeur. Ces vecteurs sont des caractéristiques du code et ne dépendent pas de la réalisation du codeur : deux codeurs équivalents, c'est-à-dire deux codeurs produisant les mêmes vecteurs de sortie, ont les mêmes vecteurs de contrôle.

Pour un codeur réalisé par les matrices génératrices $\{\boldsymbol{A}(0), \ldots, \boldsymbol{A}(b)\}$, les vecteurs de contrôle sont aussi les vecteurs du noyau droit des matrices $\{\boldsymbol{G}_n\}$. La structure de ces vecteurs provient de la propriété évidente suivante : si le vecteur colonne $\underline{\boldsymbol{u}}$ appartient au noyau droit de la matrice $\boldsymbol{G}_n$, les deux vecteurs

$$\begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{0}} \\ \underline{\boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{u}} \\ \underline{\boldsymbol{0}} \end{bmatrix} \tag{9}$$

appartiennent au noyau droit de $\boldsymbol{G}_{n+1}$. Ce fait a deux conséquences.

(1) Soit $q_n = Nn - \text{rg}\,\boldsymbol{G}_n$ la dimension du noyau droit de la matrice $\boldsymbol{G}_n$ et

$$\boldsymbol{B}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_n(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n(0) \end{bmatrix} \tag{10}$$

une matrice à Nn lignes et q_n colonnes dont les colonnes forment une base de ce noyau. Le sous-espace engendré (span) par les colonnes de $\boldsymbol{B}_{n+1}$ contient le span des colonnes des deux matrices de rang q_n :

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_n \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_n \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Donc l'algorithme de Gauss appliqué aux q_{n+1} colonnes de $\boldsymbol{B}_{n+1}$ permet de ramener cette matrice à l'une des deux formes suivantes :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \boldsymbol{B}'_{n+1}(n) \\ \boldsymbol{B}'_{n+1}(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}'_{n+1}(0) \end{matrix}}_{\text{rg } \boldsymbol{B}_{n+1}(n)} & \underbrace{\begin{matrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{B}_n(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n(0) \end{matrix}}_{q_n} \end{bmatrix}}_{q_{n+1}\ \text{colonnes}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \boldsymbol{B}''_{n+1}(n) \\ \boldsymbol{B}''_{n+1}(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}''_{n+1}(0) \end{matrix}}_{\text{rg } \boldsymbol{B}_{n+1}(0)} & \underbrace{\begin{matrix} \boldsymbol{B}_n(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n(0) \\ \boldsymbol{0} \end{matrix}}_{q_n} \end{bmatrix}}_{q_{n+1}\ \text{colonnes}},$$

ce qui prouve une relation remarquable :

$$q_{n+1} - q_n = N - \Delta_n = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{B}_{n+1}(0) = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{B}_{n+1}(n). \quad (12)$$

(2) Le noyau droit de $\boldsymbol{G}_{n+1}$ contient le span E des colonnes de

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_n & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_n \end{bmatrix}$$

plus, éventuellement, des vecteurs qui ne sont pas nuls aux deux extrémités et n'appartiennent pas à E. Il s'ensuit que

$$\mathrm{rg}\ \boldsymbol{B}_{n+1}(0) = N - \Delta_n \geq \mathrm{rg}\ \boldsymbol{B}_n(0) = N - \Delta_{n-1}, \quad (13)$$

ce qui établit le théorème suivant.

Théorème 5. Pour tout codeur :
(1) la suite des sauts de rang
$\Delta_n = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_{n+1} - \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_n,\ n \geq 0,\ \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_0 = 0$
est une suite décroissante (*i.e.* non strictement croissante) ;
(2) si q_n est la dimension du noyau droit de la matrice $\boldsymbol{G}_n$ et si les colonnes de la matrice

$$\boldsymbol{B}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_n(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{B}_n(0) \end{bmatrix}$$

forment une base de ce noyau, la relation suivante est toujours vérifiée :

$$q_{n+1} - q_n = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{B}_{n+1}(0) = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{B}_{n+1}(n) = N - \Delta_n.$$

La démonstration de ce théorème fournit aussi un moyen de construire le noyau droit de la matrice $\boldsymbol{G}_n$. Pour tout k variant entre 1 et n, soit :

1. d_k la dimension du sous-espace du noyau de $\boldsymbol{G}_k$ formé des vecteurs qui ne se laissent pas écrire comme une combinaison linéaire (c.l.) des vecteurs du noyau de $\boldsymbol{G}_{k-1}$ et de leurs décalés ; on désigne par

$$\boldsymbol{V}_k = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \dots & \boldsymbol{v}_{d_k} \end{bmatrix}$$

une base de ce sous-espace.

2. $\boldsymbol{U}_n$ la matrice à nN lignes et $d_1 + \ldots + d_n$ colonnes obtenue en juxtaposant les matrices $\{\boldsymbol{V}_k\}$ complétées par des zéros :

$$\boldsymbol{U}_n = \begin{bmatrix} \boldsymbol{V}_n & \boldsymbol{V}_{n-1} & \cdots & \boldsymbol{V}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{U}_n(n-1) \\ \vdots \\ \boldsymbol{U}_n(0) \end{bmatrix} \quad (14)$$

Alors le noyau droit de $\boldsymbol{G}_n$ est engendré par les colonnes de $\boldsymbol{U}_n$ et leurs décalées.

Ces décalages sont sans effet sur le dernier bloc $\boldsymbol{B}_n(0)$ de la matrice $\boldsymbol{B}_n$, donc nécessairement $\mathrm{rg}\,\boldsymbol{B}_n(0) = \mathrm{rg}\,\boldsymbol{U}_n(0)$. De plus, étant donné la façon dont les colonnes de $\boldsymbol{U}_n$ ont été définies, on ne peut pas faire apparaître par c.l. de colonnes de zéros sur le dernier bloc de la matrice $\boldsymbol{U}_n$, donc:

$$\mathrm{rg}\,\boldsymbol{U}_n(0) = d_1 + \ldots + d_n$$

Ainsi $\quad \mathrm{rg}\,\boldsymbol{B}_n(0) = \mathrm{rg}\,\boldsymbol{U}_n(0) = d_1 + \ldots + d_n = N - \Delta_{n-1}. \quad (15)$

Application. Supposons le codeur $\{\boldsymbol{A}(0), \ldots, \boldsymbol{A}(b)\}$ non catastrophique. On sait qu'alors il existe un entier c au delà duquel le saut de rang Δ_n des matrices $\boldsymbol{G}_n$ est exactement égal à K : l'entier c est l'entier strictement positif défini par les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &\bullet\ \Delta_{c-1} = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_c - \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_{c-1} > K, \quad \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_0 = 0, \\ &\bullet\ \Delta_n = \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_{n+1} - \mathrm{rg}\ \boldsymbol{G}_n = K, \ \forall\ n \geq c. \end{aligned} \quad (16)$$

Dans le passage de $\boldsymbol{G}_n$ à $\boldsymbol{G}_{n+1}$, il n'y a plus de production de nouveau vecteur de contrôle (*i.e.* qui ne se laisse pas écrire comme une c.l. des vecteurs précédents et de leurs décalés) au-delà de $n = c+1$ inclus. Les vecteurs de contrôle d'un code convolutif sont donc entièrement déterminés par la donnée de la matrice $\boldsymbol{U}_{c+1}$. Ainsi d'après (15) et (16), la matrice $\boldsymbol{U}_n$ a exactement *N-K* colonnes et est une constante dès que n est supérieur ou égal à c+1.

Remarque. La matrice $\boldsymbol{U}_{c+1}$ n'est rien de plus, à une transposition près, qu'une réalisation minimale du codeur dual [Forn].

6. Conclusion

Pour les codeurs convolutifs de paramètres (N, K, b) nous avons explicité une nouvelle caractérisation des codeurs catastrophiques. Celle-ci nous a permis d'étudier en détail les relations liant les bits de sortie de plusieurs mots de codes consécutifs. De plus il existe un entier c tel que pour $n \geq c$ la dimension de l'ensemble des vecteurs de contrôle augmente de *N-K* et le saut de rang de $\boldsymbol{G}_n$ vaut alors K. Ces vecteurs sont les c.l. de *N-K* vecteurs linéairement indépendants et de leur décalés qui définissent une réalisation minimale du code dual.
Enfin signalons que ces propriétés ont lieu dans tout corps commutatif. Certaines d'entre elles sont utilisées en égalisation aveugle par les méthodes à sous-espaces.

7. Références

[Dhol] A. Dholokia, "Introduction to Convolution Codes with Application", Kluwer Academic Publisher, 1993.

[Forn] G. David Forney J.R., "Structural Analysis of Convolution Codes via Dual Codes", IEEE Trans. on Inf. Theory, IT-19, n° 4, July 1993.

[Pete] W.N. Peterson, E.J. Weldon, "Error Correcting Codes", Second Edition, MIT Press, 1972.

[Pire] P. Piret, "Convolutional Codes: An Algebraic Approach", Cambridge, MIT Press, 1988.

[Plan] G. Planquette, "Étude de certaines propriétés algébriques et spectrales des codes correcteurs d'erreurs", Thèse de l'Université de Rennes 1, Décembre 1996.