

# Performances du Multiplex à Division de Fréquence Associé à une Modulation Différentielle de Phase sur les Canaux de Rice et de Rayleigh

F. TLILI<sup>(1),(2)</sup>    A. BOUALLEGUE<sup>(1)</sup>    A. GLAVIEUX<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> Laboratoire des Systèmes de Télécommunications,  
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis, BP 37, 1002 Tunis, TUNISIE.

<sup>(2)</sup> Ecole Supérieure des Postes et des Télécommunications de Tunis,  
Km 3,5 route de Raoued, 2080 Ariana, TUNISIE.

<sup>(3)</sup> Département Signal et Communications  
Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, Brest, FRANCE

## Résumé

Nous présentons dans cette communication la structure d'un multiplex à division de fréquence associé à une modulation différentielle de phase utilisant un intervalle de garde temporel, pour s'affranchir de la sélectivité en fréquence d'un canal à trajets multiples. Nous évaluons une expression générale de la probabilité d'erreur par bit pour une transmission sur le canal de Rice, à partir de laquelle se déduisent les cas particuliers des canaux de Rayleigh et de Gauss.

## 1 Introduction

En communication avec les mobiles, les ondes émises subissent des diffractions et des réflexions sur les différents obstacles, générant ainsi plusieurs sous-ondes qui suivent plusieurs trajets de propagation affectés chacun d'un retard. Ceci conduit généralement à la dégradation des performances du système de transmission. Une solution proposée dans [?] et [?], consiste en l'introduction au niveau du récepteur d'un intervalle de garde temporel  $\Delta$  permettant d'absorber les échos des différents trajets.  $\Delta$  doit obéir à la condition:  $\Delta > \tau_{max}$  (dispersion temporelle du canal), ce qui se traduit par l'observation et la détection des symboles binaires reçus sur une durée  $T_u$  plus petite que la durée symbole  $T_s$ ,  $T_u = T_s - \Delta$ . Dans le cas d'une transmission monoporteuse, si  $\tau_{max}$  est relativement élevé, alors le débit de la transmission est réduit. La solution consiste en une transmission multiporteuses ou encore Multiplex à Division de Fréquence (MDF), qui permet, pour une rapidité de modulation donnée, d'élever le débit de transmission [?][?][?].

## Abstract

In this paper, we present the structure of a frequency division multiplexing, based on differential phase shift keying and using a guard interval to overcome multipath channel selectivity. We evaluate a general closed form of the bit error probability for a transmission over Rician Channel. Particular cases of Rayleigh and Gaussian channels are easily deduced.

Nous exposons dans la deuxième partie de cette communication le principe du système de transmission proposé. Celui-ci utilise une modulation différentielle de phase. Il est caractérisé par la mise en oeuvre de l'émetteur au moyen d'une Transformée de Fourier Discrète inverse (TFDI) et du récepteur par une TFD [?]. La troisième partie expose les performances de ce système, en terme de probabilité d'erreur par bit, dans le cas des canaux de Rice et de Rayleigh.

## 2 Principe du système de transmission

### 2.1 Structure de l'émetteur

L'émission des symboles binaires se fait sur  $N$  voies caractérisée chacune par sa fréquence porteuse. La condition d'orthogonalité des voies permet de déduire que les fréquences porteuses doivent être en

progression arithmétique de pas  $\frac{1}{T_u}$  [?][?]:

$$f_j = f_c + \frac{j}{T_u} \quad (1)$$

$f_c$  étant la fréquence de la première voie du multiplex.

Au bit  $a_j^k$ , à émettre pendant l'intervalle de temps  $[kT_s, (k+1)T_s[$  est associée la phase  $\Theta_j^k$  définie par

$$\Theta_j^k = \begin{cases} 0 & \text{si } a_j^k = 0 \\ \pi & \text{si } a_j^k = 1 \end{cases} \quad (2)$$

A partir de celle-ci on construit la phase différentielle à émettre, et ce en utilisant la relation récurrente suivante :

$$\theta_{k,j} = \Theta_j^k + \theta_{k-1,j} \text{ mod } 2\pi \quad (3)$$

Le signal généré sur chaque voie s'obtient à partir d'une modulation de phase. Il a pour expression :

$$s_j(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_s}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(t - kT_s) e^{i(2\pi f_j t + \phi_j + \theta_{k,j})} \quad (4)$$

où  $E_b$  est l'énergie utilisée pour l'émission d'un bit,  $h(t)$  la fonction rectangle de durée  $T_s$  et de hauteur unité et  $\phi_j$  une phase à valeurs équiréparties sur  $[0, 2\pi[$ .

Le signal émis par le multiplex est :

$$S(t) = \sum_{j=0}^{N-1} s_j(t) \quad (5)$$

## 2.2 Structure du récepteur

La détection des symboles binaires, au niveau de la réception, se fait selon le synoptique représenté sur la figure 1.

Le signal reçu  $X(t)$  est ramené en bande de base, échantillonné à la période

$$T_e = \frac{T_u}{N} \quad (6)$$

La TFD des  $N$  échantillons  $x_{l,p}$ ,  $p = 0, \dots, N-1$ , fournit la suite  $Y_{l,q}$ ,  $q = 0, \dots, N-1$ , dont le passage à travers un organe de décision permet la détection des  $N$  symboles binaires émis sur les  $N$  voies du multiplex pendant l'intervalle de temps  $[lT_s, (l+1)T_s[$ .

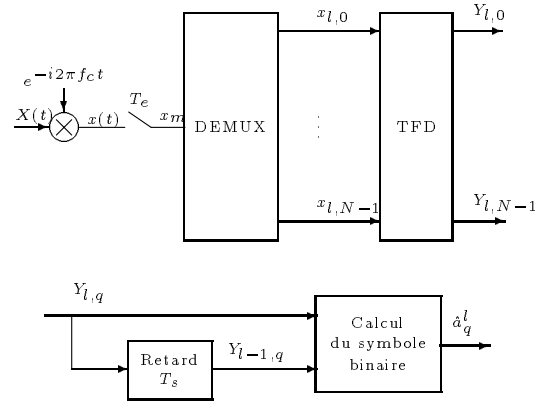


FIG. 1 - Réalisation du récepteur différentiel par TFD

La décision se fait à partir de la variable  $D$  définie par [?]:

$$D = e^{-i2\pi q \frac{T_s}{T_u}} Y_{l,q} Y_{l-1,q}^* + e^{i2\pi q \frac{T_s}{T_u}} Y_{l,q}^* Y_{l-1,q} \quad (7)$$

ceci selon la règle suivante :

$$\hat{a}_q^l = \begin{cases} 0 & \text{si } D \geq 0 \\ 1 & \text{si } D < 0 \end{cases} \quad (8)$$

## 3 Performances sur le canal à trajets multiples

En présence de trajets multiples et de bruit blanc, additif, gaussien, l'insertion d'un intervalle de garde temporel  $\Delta$  plus grand que la dispersion temporelle du canal, permet d'absorber les échos des différents trajets. L'expression du signal reçu sur l'intervalle  $[lT_s + \Delta, (l+1)T_s[$  est :

$$X(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sqrt{\frac{2E_b}{T_s}} A_j(t) e^{i(2\pi f_j t + \phi_j + \theta_{l,j})} + B(t) \quad (9)$$

où  $A_j(t)$  est un bruit multiplicatif, complexe, gaussien et  $B(t)$  un bruit complexe blanc additif gaussien, stationnaire à l'ordre 2, de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance bilatérale  $2N_0$ .

Le signal  $X(t)$  est ramené en bande de base. Après l'écoulement d'un temps  $\Delta$ , il est échantillonné à la période  $T_e$ , donnée par son expression (6). Les

instants d'échantillonnage sont donc donnés par l'expression suivante :

$$t_{l,p} = lT_s + \Delta + pT_e \quad (10)$$

On aboutit à la suite d'échantillons de terme général :

$$x_{l,p} = \sqrt{\frac{2E_b}{T_s}} \sum_{j=0}^{N-1} A_j(t_{l,p}) d_{l,j} \beta_{l,j} e^{i2\pi j \frac{p}{N}} + b_{l,p} \quad (11)$$

avec  $b_{l,p} = B(t_{l,p}) e^{-i2\pi f_c t_{l,p}}$ ,  $\beta_{l,j} = e^{i(2\pi j \frac{lT_s + \Delta}{T_u} + \phi_j)}$  et  $d_{l,j} = e^{i\theta_{l,j}}$ .

Sous l'hypothèse d'évanouissement lent (le bruit  $A_j(t)$  constant au moins sur une durée symbole), la TFD permet de séparer les voies du multiplex, et on obtient pour la voie  $q$  du multiplex :

$$Y_{l,q} = \sqrt{\frac{2E_b}{T_s}} A_{l,q} d_{l,q} \beta_{l,q} + \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} b_{l,p} e^{-i2\pi q \frac{p}{N}} \quad (12)$$

La probabilité d'erreur par bit pour la voie  $q$  du multiplex, est définie par :

$$P_{e_{bq}} = P(D < 0 | d_{l,q} = 1 \text{ et } d_{l-1,q} = 1) \quad (13)$$

La variable de décision  $D$  donnée par (3) est une forme quadratique hermitienne, des variables aléatoires gaussiennes  $Y_{l,q}$  et  $Y_{l-1,q}$ .

En supposant  $A_{l,q} \simeq A_{l-1,q}$ , on déduit [?]:

$$P_{e_{bq}/\rho} = \exp\left(-\frac{2NE_b}{\sigma_b^2 T_s} \rho\right) \quad (14)$$

avec  $\rho = |A_{l,q}|^2$  et  $\sigma_b^2 = E(b_{l,p} b_{l,p}^*)$ .

La probabilité d'erreur par bit sur la voie  $q$  du multiplex s'obtient à partir de la relation suivante :

$$P_{e_{bq}} = \int_0^\infty P_{e_{bq}/\rho} p(\rho) d\rho \quad (15)$$

En posant  $U = \mathcal{R}e(A_{l,q})$  et  $V = \mathcal{I}m(A_{l,q})$ , nous avons :

$$\rho = U^2 + V^2 \quad (16)$$

Dans le cas du canal de Rice,  $U$  et  $V$  sont deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes de moyenne respective  $m_U$  et  $m_V$  et de même variance  $\sigma_\rho^2$ .  $\rho$  suit alors une loi chi-carré noncentrale à deux degrés de liberté.

Sa densité de probabilité est :

$$p(\rho) = \frac{1}{2\sigma_\rho^2} \exp\left[-\frac{(m^2 + \rho)}{2\sigma_\rho^2}\right] I_0\left(\sqrt{\rho} \frac{m}{\sigma_\rho}\right) \quad (17)$$

où  $I_0(\cdot)$  désigne la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0 et  $m^2 = m_U^2 + m_V^2$ .

En utilisant l'annexe, on déduit l'expression (A.3) de  $P_{e_{bq}}$ , que l'on peut écrire sous la forme :

$$P_{e_{bq}} = \frac{1}{2\left(1 + \frac{\bar{E}_{bq} T_u}{N_0 T_s} \frac{1}{SIR_q + 1}\right)} \exp\left(-\frac{\frac{SIR_q}{SIR_q + 1} \frac{\bar{E}_{bq} T_u}{N_0 T_s}}{1 + \frac{\bar{E}_{bq} T_u}{N_0 T_s} \frac{1}{SIR_q + 1}}\right) \quad (18)$$

où  $SIR_q$  (Signal Interference Ratio de la voie  $q$  du multiplex) est défini comme étant le rapport de la puissance du trajet non aléatoire sur la puissance moyenne des trajets aléatoires.

$$SIR_q = \frac{m^2}{2\sigma_\rho^2} \quad (19)$$

$\bar{E}_{bq}$  est l'énergie moyenne reçue par bit sur la voie  $q$  du multiplex :

$$\bar{E}_{bq} = (m^2 + 2\sigma_\rho^2) E_b \quad (20)$$

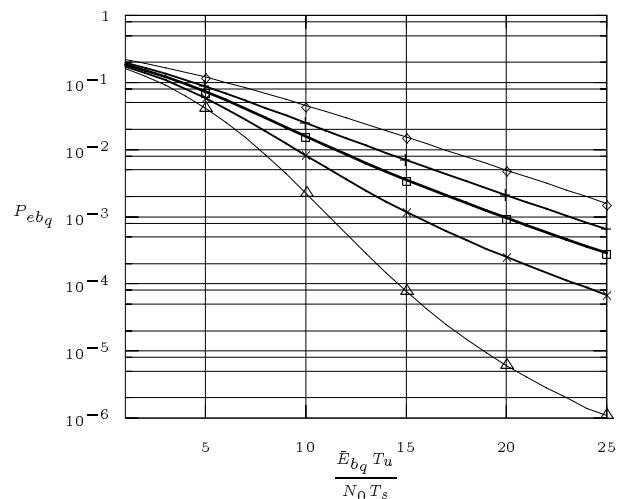


FIG. 2 - Probabilité d'erreur par bit pour différentes valeurs de  $SIR_q$

◇ :  $SIR_q = -\infty$  dB Canal de Rayleigh,  
+ :  $SIR_q = 3$  dB, □ :  $SIR_q = 5$  dB,  
× :  $SIR_q = 7$  dB, △ :  $SIR_q = 10$  dB

L'expression de  $P_{eb_q}$  permet de déduire les deux cas particuliers :

- Dans le cas du canal de Rayleigh, tous les trajets sont aléatoires et donc  $SIR_q = -\infty$  dB :

$$P_{eb_q} = \frac{1}{2(1 + \frac{\bar{E}_{b_q} T_u}{N_0 T_s})} \quad (21)$$

- Pour le canal gaussien, il existe uniquement un trajet direct,  $SIR_q = +\infty$  dB :

$$P_{eb_q} = \frac{1}{2} \exp(-\frac{\bar{E}_{b_q} T_u}{N_0 T_s}) \quad (22)$$

Bien que le choix d'une durée d'observation  $T_u$  au niveau du récepteur plus petite que la durée symbole permette d'éviter l'IES et de s'affranchir de la sélectivité du canal, il introduit une dégradation de  $P_{eb_q}$  et ce de  $10 \text{Log} \frac{T_s}{T_u}$  relativement au rapport  $\frac{\bar{E}_{b_q}}{N_0}$ .

La figure 2 montre l'évolution de  $P_{eb_q}$  en fonction de  $\frac{\bar{E}_{b_q} T_u}{N_0 T_s}$  pour différentes valeurs de  $SIR_q$ . On en déduit que cette évolution est fortement liée au  $SIR_q$ . Le cas du canal de Rayleigh présente les dégradations les plus importantes. Les performances s'améliorent dans le cas du canal de Rice, notamment pour des valeurs élevées de  $SIR_q$ .

Pour  $P_{eb_q} = 10^{-3}$ , cette amélioration est sensiblement de 4,5 dB pour  $SIR_q = 3$  dB, elle devient de 7 dB pour  $SIR_q = 5$  dB et atteint 15 dB pour  $SIR_q = 10$  dB.

## 4 Conclusion

L'utilisation d'un intervalle de garde temporel avec une transmission multiporteuses constitue une solution efficace pour s'affranchir de la sélectivité en fréquence du canal à trajets multiples et permettre la communication d'information à un débit élevé. Dans le cas d'une modulation différentielle de phase, l'expression obtenue pour la probabilité d'erreur par bit montre que les performances de la transmission sont relativement réduites sur un canal de Rayleigh, alors qu'elles sont meilleures sur le canal de Rice, surtout pour des valeurs relativement élevées de  $SIR_q$ .

## Annexe : Expression de la probabilité d'erreur par bit

En remplaçant dans (15),  $p(\rho)$  par son expression (17), on obtient

$$P_{eb_q} = \int_0^\infty \frac{1}{2\sigma_\rho^2} \exp[-(\frac{m^2 + \rho}{2\sigma_\rho^2} + \frac{E_b T_u}{N_0 T_s} \rho)] I_0(\sqrt{\rho} \frac{m}{\sigma_\rho^2}) d\rho \quad (A.1)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme :

$$P_{eb_q} = \frac{\sigma_1^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_\rho^2)} \exp[-\frac{m^2}{2(\sigma_1^2 + \sigma_\rho^2)}] \int_0^\infty \frac{1}{2\sigma^2} \exp[-\frac{(s^2 + \rho)}{2\sigma^2}] I_0(\sqrt{\rho} \frac{s}{\sigma^2}) d\rho \quad (A.2)$$

avec :

$$\sigma_1^2 = \frac{N_0 T_s}{2E_b T_u}, \sigma^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_\rho^2}{\sigma_1^2 + \sigma_\rho^2} \text{ et } s = m \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_\rho^2}.$$

Dans (A.2) la fonction à intégrer étant une fonction densité de probabilité, le terme intégrale vaut donc 1 et on en déduit

$$P_{eb_q} = \frac{\frac{N_0 T_s}{2E_b T_u}}{2(\sigma_\rho^2 + \frac{N_0 T_s}{2E_b T_u})} \exp[-\frac{m^2}{2\sigma_\rho^2 + \frac{N_0 T_s}{E_b T_u}}] \quad (A.3)$$

## Références

- [1] M. Alard, R. Lassale, "Principles of Modulation and Channel coding for Digital Broadcasting for Mobile Receivers", European Broadcasting Unit, August 1988, pp. 47-69.
- [2] A. Glavieux, P. Y. Cochet, A. Picart, "Orthogonal Frequency Division Multiplexing with BFSK Modulation in Frequency Selective Rayleigh and Rician Fading Channels" IEEE Transactions On Communications, Vol. 42, pp. 1919-1928, February/March/April 1994.
- [3] L. J. Cimini, "Analysis and Simulation of a Digital Mobile Channel Using Orthogonal Frequency Division Multiplexing", IEEE Transactions on Communications, Vol. COM-33, N°7, July 1985.
- [4] F. Tlili, A. Bouallègue, A. Glavieux, "Multiplex à Division de Fréquence Associé à une Modulation Différentielle de Phase" Journées Tunisiennes d'Electrotechnique et d'Automatique, Novembre 1996.
- [5] J. G. Proakis, Digital Communications 2<sup>nd</sup> Edition, New York, Mc Graw-Hill, 1989, Appendix 4B pp. 344-349.