

# Combinaison de moments d'ordre 2 et 4 pour la classification de modulations linéaires

Denys Boiteau\* & Christophe Le Martret\*\*

\* CESTA S.A., 37 av. du Général de Gaulle, 35170 Bruz, France

\*\* CELAR, 35170, Bruz, France

## RESUME

Cet article traite de la classification des modulations linéaires de phase à 4 états (MDP4) et d'amplitude sur porteuse en quadrature à 16 états (MAQ16). Celle-ci est réalisée par la reconnaissance d'une forme construite par une combinaison de moments d'ordre 4 et d'ordre 2 du signal stationnarisé, optimisée pour maximiser la probabilité de classification correcte. Ce système est une extension du système proposé dans [1] dans lequel la forme discriminante est une tranche de cumulants d'ordre 4. Les performances théoriques et expérimentales du système sont présentées pour différents rapports signal sur bruit et comparées à celles obtenues dans [1]. Un taux de classification correcte de 99% est atteint pour un rapport signal sur bruit de 0 dB et seulement 500 symboles transmis.

## 1 Introduction

Le problème traité est celui de la classification de modulations numériques linéaires. Les signaux modulés  $x(t)$  sont supposés être reçus en bande de base et en présence d'un bruit additif blanc  $b(t)$ , puis échantillonnés. Le signal  $y(t)$  reçu s'écrit

$$y(t) = x(t) + b(t), \quad t \in Z$$

$$\text{où} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \cdot h(t - kT + t_0) \quad (1)$$

avec  $T$  la période symbole,  $t_0$  l'instant d'origine,  $h(t) = \mathbf{I}_{[-T/2, T/2]}$  et  $\{c_k = a_k + ib_k\}$  une séquence de symboles indépendants et identiquement distribués.

On se restreint ici à la classification des modulations MDP4 (modulation de phase à 4 états) et MAQ16 (modulation d'amplitude sur porteuses en quadrature à 16 états) pour des raisons de simplicité mais les développements présentés peuvent s'étendre à d'autres modulations linéaires [1].

Le système de classification proposé est basé sur la reconnaissance de formes calculées à partir de statistiques d'ordre 2 et 4 des signaux. Bien que les signaux (1) soient cyclostationnaires, les estimateurs des statistiques mises en jeu sont construits, pour une réduction de la complexité des

## ABSTRACT

This paper deals with the classification of 4 states phase (4PSK) and 16 states quadrature amplitude (16QAM) linear modulations using a pattern recognition approach. The discriminating feature is built as an optimised combination of 4th and 2nd order moments of the stationarised signal, in order to maximise the probability of correct classification. This system is an extension of the one proposed in [1] where the discriminating feature is a slice of a 4th order cumulant. Theoretical and experimental performance are presented for different signal to noise ratio and are compared to the one obtained in [1]. A correct classification rate of 99% is reached for 0 dB signal to noise ratio and only 500 transmitted symbols.

algorithmes, en approchant l'espérance mathématique par moyennage temporel. Ceci revient théoriquement à considérer le signal modulé reçu "stationnarisé", dont l'expression est donnée par la formule (1) dans laquelle  $t_0$  est cette fois une variable aléatoire équirépartie sur  $[0, T]$ .

Les signaux ("stationnarisés" ou non) modulés en MDP4 et MAQ16 possèdent des statistiques d'ordre 2 identiques. Le problème de classification posé ne peut donc être résolu à cet ordre. Nous avons proposé dans [1] un système de classification des modulations (pour des signaux reçus de puissance inconnue) basé sur la reconnaissance de la forme estimée  $\hat{C}_x(\tau)$ ,  $\tau = 0, \dots, T$  de la tranche de cumulants d'ordre 4 du signal "stationnarisé"

$$C_x(\tau) = M_{4,x}(\tau) - 2M_{2,x}^2(\tau) \quad (2)$$

où  $M_{4,x} = \mathbf{E}[x^2(0)x^{*2}(\tau)]$  et  $M_{2,x} = \mathbf{E}[x(0)x^*(\tau)]$ . On peut montrer en effet que la combinaison (2) et plus généralement toute combinaison  $F_x^\lambda(\tau)$ ,  $\tau \in D$  du type

$$F_x^\lambda(\tau) = M_{4,x}(\tau) - \lambda \cdot M_{2,x}^2(\tau), \quad (3)$$

est une forme discriminante telle que  $F_{\text{MDP4}}^\lambda(\tau) \neq \alpha \cdot F_{\text{MAQ16}}^\lambda(\tau)$ ,  $\alpha \neq 0$ . L'idée de base (suggérée dans [2]) menant au système présenté ici est alors de chercher la valeur optimale de  $\lambda$  dans (3), notée  $\lambda_{opt}$ , maximisant la probabilité de classification correcte, comme cela est proposé dans [3] pour une combinaison de

cumulants cycliques. La détermination de  $\lambda_{opt}$  et d'un support  $D_{opt}$  pour lequel le système est robuste au bruit blanc additif est l'objet du paragraphe 2. Dans le paragraphe 3, les performances théoriques et expérimentales du système sont données pour différents rapports signal sur bruit et différents nombres de données. En conclusion, ces performances sont comparées avec celles obtenues dans [1] ( $\lambda = 2$ ) et discutées.

## 2 Description du système

En l'absence d'information a priori sur la puissance des formes (3) extraites du signal modulé en  $x_{mod}$ , le classifieur de formes utilisé est un récepteur à corrélation dont le synoptique est donné dans la figure 1.

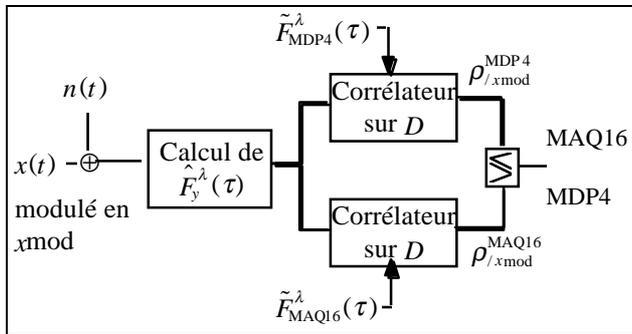


Figure 1 - Synoptique du système

Dans cette figure,  $\hat{F}_y^\lambda(\tau)$  désigne l'estimateur de la forme (3),  $\tilde{F}_{r_{mod}}^\lambda(\tau)$  est la forme théorique (3) normalisée en puissance pour une modulation  $r_{mod}$ , i.e.,

$$\tilde{F}_{r_{mod}}^\lambda(\tau) = \frac{F_{r_{mod}}^\lambda(\tau)}{\sqrt{\sum_{\tau \in D} (F_{r_{mod}}^\lambda(\tau))^2}} \quad (4)$$

et  $\rho_{/x_{mod}}^{r_{mod}}$  est une mesure de corrélation entre la forme estimée et la forme théorique (4) définie par

$$\rho_{/x_{mod}}^{r_{mod}} = \sum_{\tau \in D} \tilde{F}_{r_{mod}}^\lambda(\tau) \hat{F}_{x_{mod}}^\lambda(\tau). \quad (5)$$

On notera que le récepteur à corrélation décrit figure 1 est optimal au sens du maximum de vraisemblance si, sur l'ensemble des formes  $\tilde{F}_{x_{mod}}^\lambda(\tau)$  d'égale énergie,  $\rho_{/x_{mod}}^{MAQ16}$  et  $\rho_{/x_{mod}}^{MDP4}$  sont de même variance,  $x_{mod} = MDP4$  ou  $MAQ16$ .

### 2.1 Condition de robustesse au bruit blanc additif

Soit un signal utile  $x(t)$  de puissance  $P_x$  reçu en présence d'un bruit  $b(t)$  blanc complexe de puissance  $\sigma_b^2$  indépendant de  $x(t)$ . La condition de robustesse du récepteur au bruit s'exprime par la nullité du biais asymptotique  $B(\tau)$ , i.e.,

$$B(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{E} \left[ \hat{F}_y^\lambda(\tau) \right] - F_x^\lambda(\tau) = 0, \quad (5)$$

avec

$$\hat{F}_y^\lambda(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y^2(i) y^{*2}(i + \tau) - \lambda \cdot \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y(i) y^*(i + \tau) \right)^2 \quad (6)$$

où  $N$  est le nombre d'échantillons disponibles. Après quelques calculs simples, on montre que ce biais est donné par

$$B(\tau) = \begin{cases} (4P_x\sigma_b^2 + \gamma_{b,4})(2 - \lambda) & \text{pour } \tau = 0 \\ 0, \forall \lambda, \forall \tau \neq 0. \end{cases} \quad (7)$$

où  $\gamma_{b,4} = \mathbf{E}[|b(0)|^4]$ . On déduit de l'équation (7) que la condition (5), pour  $\lambda \neq 2$ , n'est vérifiée que pour les décalages temporels  $\tau$  non nuls. En notant de plus que  $F_x^\lambda(\tau) = 0$  pour  $\tau > T$  et que  $\tilde{F}_x^\lambda(\tau)$  et  $F_y^\lambda(\tau)$  sont des fonction paires en  $\tau$  quelque soit la modulation, le support optimal au sens de la robustesse du système et de la complexité des algorithmes est donné par

$$D_{opt} = \{1, \dots, T\} \quad (8)$$

### 2.2 Recherche de combinaison optimale

La valeur de  $\lambda_{opt}$  au sens de la maximisation de la probabilité de classification correcte est alors obtenue (pour des signaux reçus de puissance inconnue) au minimum du coefficient de corrélation entre les formes théoriques  $F_{MDP4}^\lambda(\tau)$  et  $F_{MAQ16}^\lambda(\tau)$  calculé pour  $\tau \in D_{opt}$ , soit

$$\lambda_{opt} = \min_{\lambda} \left( \rho = \sum_{\tau \in D_{opt}} \tilde{F}_{MDP4}^\lambda(\tau) \cdot \tilde{F}_{MAQ16}^\lambda(\tau) \right). \quad (9)$$

La valeur de  $\lambda_{opt}$  peut être déterminée analytiquement ou par simulation. Sur la courbe reportée dans la figure 2, donnant la valeur du coefficient  $\rho$  en fonction de  $\lambda$ , la valeur optimale lue est de  $\lambda_{opt} = 1.57$  correspondant à un coefficient  $\rho$  de 0.53 (en comparaison, on notera que pour  $\lambda = 2$  et  $D = \{0, \dots, T\}$ , ce coefficient est de 0.88 [1]).

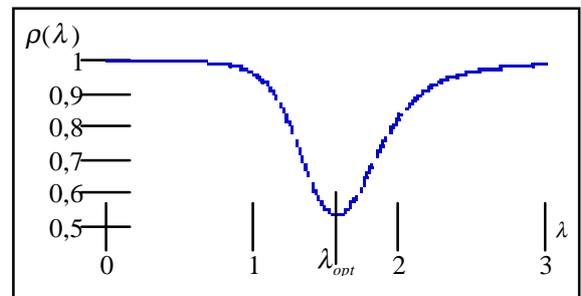


Figure 2 - valeur du coefficient de corrélation  $\rho$  en fonction du paramètre  $\lambda$

### 3 Performances du système

#### 3.1 Performances théoriques

La probabilité de classification correcte s'exprime par

$$P_{cc} = 1 - \frac{1}{2} \Pr \left\{ \rho_{/MDP4}^{MDP4} < \rho_{/MDP4}^{MAQ16} \right\} - \frac{1}{2} \Pr \left\{ \rho_{/MAQ16}^{MAQ16} < \rho_{/MAQ16}^{MDP4} \right\} \quad (10)$$

où le coefficient  $\rho_{/xmod}^r$  est défini dans l'équation (5). En définissant

$$\rho_{/xmod}^{diff} = \rho_{/xmod}^{MDP4} - \rho_{/xmod}^{MAQ16} \quad (11a)$$

$$m_{/xmod}^{diff} = \mathbf{E} \left[ \rho_{/xmod}^{diff} \right] \quad (11b)$$

et 
$$\left( \sigma_{/xmod}^{diff} \right)^2 = \mathbf{E} \left[ \left( \rho_{/xmod}^{diff} - m_{/xmod}^{diff} \right)^2 \right] \quad (11c)$$

et sous l'hypothèse de gaussianité<sup>1</sup> des estimées  $\hat{F}_{xmod}^{\lambda_{opt}}(\tau)$  (assurant celle de  $\rho_{/xmod}^{diff}$ ), on peut montrer que la probabilité de classification correcte se réécrit

$$P_{cc} = 1 - \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erfc} \left( -\frac{m_{/MDP4}^{diff}}{\sqrt{2} \sigma_{/MDP4}^{diff}} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{m_{/MAQ16}^{diff}}{\sqrt{2} \sigma_{/MAQ16}^{diff}} \right) \right] \quad (12)$$

avec  $\operatorname{erfc}(t) = \int \exp(-u^2) du$ .

Les paramètres  $m_{/xmod}^{diff}$  et  $\rho_{/xmod}^{diff}$  s'expriment en fonction des moyennes et variances de la forme (3) estimée sur le signal. Si on note  $\alpha_\tau = \hat{F}_{MDP4}^{\lambda_{opt}}(\tau)$  et  $\beta_\tau = \hat{F}_{MAQ16}^{\lambda_{opt}}(\tau)$ , on montre facilement les relations suivantes :

$$m_{/xmod}^{diff} = \sum_{\tau \in D_\tau} (\alpha_\tau - \beta_\tau) F_{xmod}^{\lambda_{opt}}(\tau) \quad (13a)$$

et 
$$\left( \sigma_{/xmod}^{diff} \right)^2 = \sum_{\tau_1, \tau_2 \in D_\tau} \left\{ (\alpha_{\tau_1} - \beta_{\tau_1})(\alpha_{\tau_2} - \beta_{\tau_2}) \cdot \operatorname{cov} \left[ \hat{F}_{xmod}^{\lambda_{opt}}(\tau_1), \hat{F}_{xmod}^{\lambda_{opt}}(\tau_2) \right] \right\} \quad (13b)$$

Si la valeur théorique de  $m_{/xmod}^{diff}$  peut être facilement déterminée à partir de la valeur théorique des formes (3), celle de la covariance  $\operatorname{cov} \left[ \hat{F}_{xmod}^{\lambda_{opt}}(\tau_1), \hat{F}_{xmod}^{\lambda_{opt}}(\tau_2) \right]$  ne peut pas l'être simplement. Afin d'obtenir une approximation des performances théoriques du système, on utilise ici une approximation de la covariance obtenue sur une seule réalisation du processus, en appliquant les formules<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Cette hypothèse asymptotique est vérifiée théoriquement pour  $\lambda = 2$  [4] et expérimentalement ici pour  $\lambda = \lambda_{opt}$ .

<sup>2</sup> Les formules appliquées ici corrigent une erreur de signe dans les équations (A.2b) et (A.2c) dans [4].

données dans l'annexe de [4] avec  $M_T = T$ . Etant donné que la forme théorique (3) est réelle et que, de ce fait, la corrélation (5) n'est calculée que sur la partie réelle de la forme estimée, la variance  $\left( \sigma_{/xmod}^{diff} \right)^2$  dans (13.b) sera la moitié de la variance approximée.

#### 3.2 Performances expérimentales

Afin de faciliter la comparaison des performances du système proposé par rapport au système présenté dans [1], le même protocole expérimental de test a été suivi. Les performances expérimentales ont été obtenues par simulation pour les rapports signal sur bruit ( $S/B$ ) de 0 et 5 dB, et un nombre de symboles reçus  $N_S$  ( $T=10$  dans les simulations) variant de 50 à 5000. Pour chaque couple ( $S/B, N_S$ ), 1000 signaux bruités (bruit blanc gaussien) ont été générés avec des séquences aléatoires de symboles différentes, des échantillons de bruit différents et des synchronisations différentes.

Les figures 3.a-b donnent les courbes des taux de classification correcte en fonction du nombre de symboles reçus pour les différents rapports signal sur bruit. Sont reportées sur ces courbes les performances expérimentales et théoriques du système proposé dans [1] et du système présenté ici. Ces courbes montrent la nette amélioration du taux de classification correcte avec le nouveau système, atteignant 99% pour un rapport signal sur bruit de 0 dB et seulement 500 symboles reçus.

Les tableaux 1.a-d donnent les matrices de confusion obtenues pour les couples ( $S/B, N_S$ )=(0,50), (0,100), (5,50) et (5,100) respectivement. Ces matrices montrent que pour tous les couples ( $S/B, N_S$ ), les erreurs de classification se partagent équitablement entre les deux modulations. Ceci justifie, au sens du maximum de vraisemblance, la structure proposée du classifieur.

### 4 Conclusion

Cet article propose un nouveau système de classification des modulations numériques linéaires MDP4 et MAQ16 en présence de bruit additif blanc. Ce système se présente comme une optimisation du système proposé dans [1] basé sur la mesure d'un cumulants du signal reçu. L'idée directrice de cette optimisation est de chercher la forme discriminante, construite par combinaison de moments d'ordre 2 et 4 du signal "stationnarisé", maximisant la probabilité de classification correcte. L'optimisation apportée a permis d'atteindre les 99% de classification correcte pour seulement 500 symboles transmis et un rapport signal sur bruit de 0 dB.

L'axe d'étude fixé est maintenant l'optimisation conjointe du choix des moments d'ordre 2 et d'ordre 4 à combiner, et de leur combinaison, pour une nouvelle amélioration des performances de classification, avec une extension à une forme d'onde quelconque. Une attention particulière devra être portée à la définition d'un récepteur robuste au bruit additif, ce qui nécessite de construire une forme discriminante dont l'estimation est (asymptotiquement) non biaisée en présence du bruit.

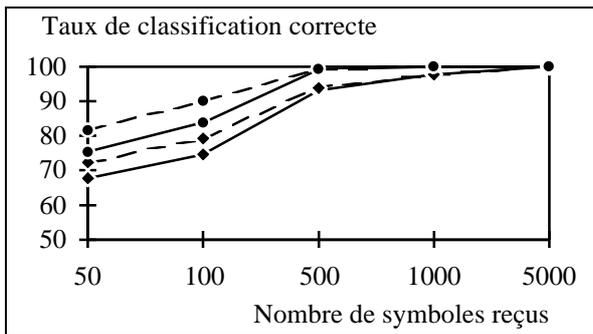


Figure 3.a  $S/B = 0 \text{ dB}$

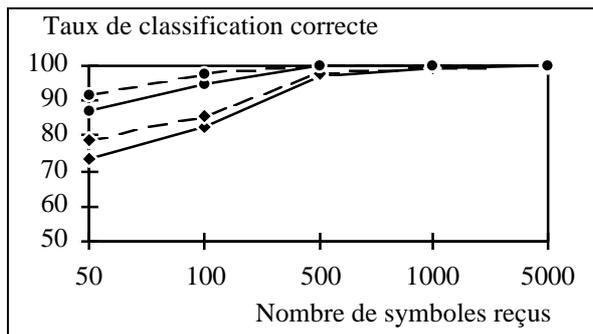


Figure 3.b  $S/B = 5 \text{ dB}$

Figure 3.a-b - Taux de classification correcte en fonction du nombre de symboles reçus

simulations : traits pleins,  $\lambda=2$  :  $\blacklozenge$ ,  $\lambda=\lambda_{opt}$  :  $\bullet$

théorie : traits pointillés,  $\lambda=2$  :  $\blacklozenge$ ,  $\lambda=\lambda_{opt}$  :  $\bullet$

reconnu reçu	MDP4	MAQ16
MDP4	775	225
MAQ16	269	731

Tableau 1.a  $(S/B, N_s) = (0, 50)$

reconnu reçu	MDP4	MAQ16
MDP4	853	147
MAQ16	173	827

Tableau 1.b  $(S/B, N_s) = (0, 100)$

reconnu reçu	MDP4	MAQ16
MDP4	879	121
MAQ16	139	861

Tableau 1.c  $(S/B, N_s) = (5, 50)$

reconnu reçu	MDP4	MAQ16
MDP4	950	50
MAQ16	173	827

Tableau 1.d  $(S/B, N_s) = (5, 100)$

Tableau 1.a-d Matrices de confusion pour différents  $(S/B, N_s)$

## Bibliographie

- [1] D. Boiteau & C. Le Martret : "Classification of linear modulations by mean of a fourth order cumulant", Proc. EUSIPCO'96, Trieste, Sept. 1996.
- [2] P. Marchand & D. Boiteau : "Higher-order statistics for QAM signals : a comparison between cyclic and stationary representations", Proc. EUSIPCO'96, Trieste, Sept. 1996.
- [3] P. Marchand, C. Le Martret & J.L. Lacoume : "Classification of linear modulations by combination of different orders cyclic cumulants", accepté au Workshop HOS'97, Banff, Canada, 21-23 Juillet 1997.
- [4] G.B. Giannakis & M.K. Tsatsanis : "Time domain test for gaussianity and time reversibility", IEEE Tr. on Signal Processing, vol. 42, n°12, Dec. 1994.