

Utilisation d'un modèle FARIMA pour la prédiction d'un bruit de mesure de température

P.Simard*, M.Bulo*, F.Zaguri#

*UMR n° 6599 - Heudiasyc
Université de Technologie de Compiègne
BP 20529
60205 Compiègne cedex
email : psimard@utc.fr

Université de Paris XI Sud
IAS
Bat 121 - 91405 Orsay

Résumé :

Les astrophysiciens mettent au point un système sophistiqué de mesure de température pour compléter leur connaissance de l'univers dans les ondes millimétriques. Les signaux sont très faibles, et la présence d'un bruit en $1/f$ perturbe fortement cette mesure. Nous essayons ici de le diminuer par prédiction en modélisant la fonction de transfert entre deux mesures par un modèle FARIMA. On soulignera surtout ici les difficultés soulevées par cette étude, et les besoins de développement théoriques sur les effets du lissage sur la longue dépendance, les perturbations de l'estimation des paramètres ARMA par la présence d'un opérateur de dérivation fractionnaire,...etc

1. Le projet et ses raisons

Le projet Diabolo constitue une préétude pour un projet de plus grande envergure qui devrait voir le jour vers la fin du siècle: le projet Planck Surveyor. Il s'agit d'étudier le rayonnement de l'univers dans les ondes sub-millimétriques.

Les longueurs d'ondes retenues pour ce projet sont de 1 et 2 mm. De cette image "froide" de l'univers, les astrophysiciens pensent :

- voir les reliquats du big bang, qui constitue un fond de rayonnement froids
- étudier l'émissivité des nuages froids où se forment les futures étoiles.

Abstract :

Astrophysicians are developing a sophisticated measurement system to study the millimetric waves. Signals are very weak, and perturbed by a $1/f$ noise. We are trying there to improve the signal to noise ratio using a prediction of the noise. $1/f$ noise are treated in many publication nowadays. In this experiment, this is not only signal but also a transfert function that is modelled by a FARIMA model. In this communication, we are mainly enlighting difficulties due to the supposed long-range dependance, and the errors induced on the arma parameters estimation by a fractional differential operator.

2. Capteurs

L'énergie émise par rayonnement est donnée classiquement pour le corps noir par:

$$w(T) = \frac{8 \pi f^2}{c^3} \frac{hf}{e^{hf/k_B T} - 1}$$

On obtient donc à T fixé une courbe fonction de la fréquence f, les autres termes étant des constantes.

Il s'agit d'une densité spectrale de puissance.

Dans le cadre de cette expérience, les appareils de mesure (bolomètres) sont fixés sur une plaque maintenue à 0.1K environ. Des filtres laissent passer le rayonnement pour des longueurs d'ondes

de l'ordre de 1 et 2 mm. Si on simule les spectres d'émission du corps noir à la température de 0.1K et à quelques Kelvin, on constate que le rayonnement à 1 et 2mm n'est pas perturbé par son environnement, puisque le spectre à cette température est quasi nul dans cette plage de fréquence.

Les bolomètres sont des thermomètres constitués d'une résistance très grande (de l'ordre de #10MΩ) mais de très petite taille (quelques centaines de μm), variant avec la température. Un "cône de lumière" concentre le rayonnement sur sa surface. La résistance est alimentée par un courant modulé. La variation de résistance en fonction de la température n'est pas linéaire, et la température de travail (100mK) permet d'obtenir un zone très sensible. La température est maintenue à ce niveau très bas par un système à dilution $^3\text{He} - ^4\text{He}$ [3].

3. Sources de perturbations :

On identifie 3 sources de perturbations sur ces capteurs :

- **Bruit blanc** : De par son fonctionnement, la résistance engendre un bruit blanc d'origine thermique facilement décelable sur les spectres. Ce bruit, connu sous le l'appellation de Bruit Johnstone possède une énergie de la forme $E_n = \sqrt{4kTR}$.

- **Bruit en 1/f de l'électronique**

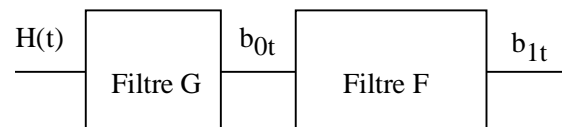
L'influence de ce bruit est réduite avec la modulation du courant circulant dans la résistance. Cet artifice introduit une modulation d'amplitude sur la grandeur mesurée qui a pour effet de décaler le spectre vers les hautes fréquences selon la technique classique du lock-in.

- **Bruit en 1/f d'origine thermique** : Il reste néanmoins un bruit en 1/f dont l'origine ne s'explique que par les fluctuations de température dans le mélange d'Hélium. Ces fluctuations peuvent être très grande et un dispositif de compensation de température a été mis en place. Ce dispositif comprend un résistance chauffante et un bolomètre rapide utilisé comme thermomètre. Le bolomètre contrôle le courant circulant dans la résistance et permet un chauffage plus ou moins important. Compte tenu de la faible inertie thermique des objets et des fluides à ces températures, on peut considérer que le signal

délivré par ce bolomètre est une indication fiable de la température instantanée sur un étage 0.1K.

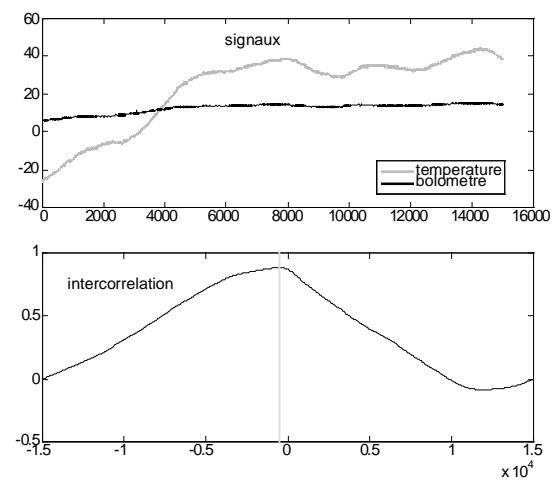
4. Modélisation du système

Dans un premier temps, le système fonctionne en aveugle, c'est à dire que les bolomètres de mesures ne sont soumis à aucun autre rayonnement que celui de l'enceinte. Les bolomètres de mesure (b_1) délivrent un signal en 1/f fortement corrélés avec le signal du bolomètre du dispositif de régulation (b_0). On peut envisager de modéliser le système de la façon suivante:



- $H(t)$: température instantanée du mélange d'Hélium
- b_{0t} : signal de sortie du bolomètre aveugle
- F : filtrage plutôt passe-bas sur les fluctuations correspondant à la fonction de transfert thermique entre les 2 bolomètres.
- b_{1t} : bruit du aux fluctuations affectant la sensibilité du bolomètre de mesure

Le filtre F est une hypothèse de travail : compte tenu de la forte corrélation existant entre les signaux b_{0t} et b_{1t} , on suppose qu'on saura identifier un filtre permettant de les déduire l'un de l'autre.



e 1 :

Intercorrélation des signaux

5. Modélisation du problème et résultats

5.1. Approche par un modèle ARMA:

Dans un premier temps, nous avons essayé de modéliser le filtre F par un modèle ARMA :

$$\phi(z)b_{1t} = \theta(z)b_{0t}$$

L'identification a été réalisée à l'aide d'une procédure récursive sur l'erreur de prédiction due à Lyung (algorithme rpem).

La forte corrélation qui existe entre les 2 signaux conduit à une prédiction qui semble convenable au premier abord. Cependant, le spectre de l'erreur de prédiction conserve une pente en $1/f$ quels que soient les réglages de l'algorithme.

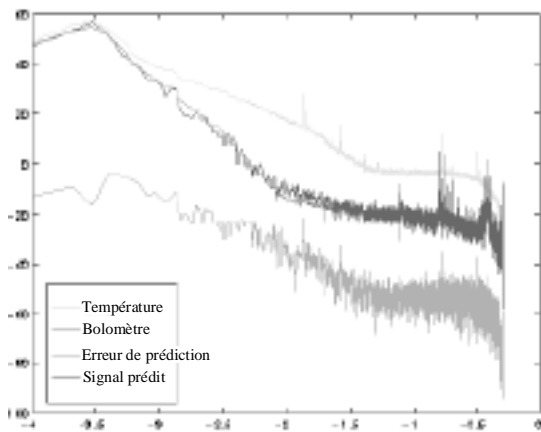


figure 2 :
Modélisation ARMA : Spectres

5.2. Approche par un modèle FARIMA

Ces signaux étant en $1/f$, on peut raisonnablement imaginer de les modéliser par une approche FARIMA. Ce modèle ajoute un terme de dérivation fractionnaire au modèle ARMA utilisé précédemment :

$$\phi(z)\nabla^d y_t = \theta(z)u_t$$

Dans cette expression, u_t est une séquence iid et ∇^d est un opérateur de dérivation fractionnaire, avec $d \in \mathbb{R}$. Le choix de d influe directement sur la régularité du signal. Un signal FARIMA possède une régularité définie par l'exposant de Hölder

$$H = d - \frac{1}{2}.$$

Nous avons tenté plus précisément de modéliser la fonction de transfert entre ces deux signaux par un tel modèle. Soit:

$$\phi(z)\nabla^d b_{1t} = \theta(z)b_{0t}$$

L'intérêt d'ajouter un terme de dérivation fractionnaire va être d'ajuster la régularité entre les deux signaux en espérant améliorer ainsi le comportement de l'estimation du lien ARMA. L'expérience précédente ayant montré qu'il restait une erreur en $1/f$, l'objectif sera atteint ici si l'erreur de prédiction se comporte spectralement comme un bruit blanc. Dans ce contexte, il semble raisonnable de régler cet opérateur par un paramètre $d = d_1 - d_0$. Les paramètres d_1 et d_0 sont déduits de l'estimation par la méthode de Higuchi de la régularité des 2 signaux.

L'algorithme utilisé va donc être le suivant :

- i) estimation des régularités des signaux et calcul des paramètres de dérivation fractionnaire
- ii) Dérivation fractionnaire du signal de sortie :
 $y_t = \nabla^{d_1 - d_0} b_{1t}$
- iii) Estimation des paramètres de l'ARMA
 $\phi(z)y_t = \theta(z)b_{0t}$ (alg.rpem)

Vérification :

- iv) synthèse par prédiction linéaire de y_t : \hat{y}_t
- v) synthèse par dérivation fractionnaire de b_{1t} : $\hat{b}_{1t} = \nabla^{d_0 - d_1} \hat{y}_t$
- vi) calcul de l'erreur de prédiction linéaire associée.

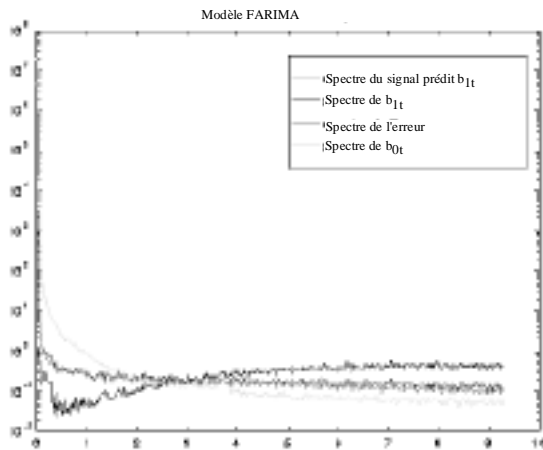


figure 3:
Modélisation FARIMA : Spectres

6. Conclusions

On note tout d'abord que le résultat recherché a été trop bien atteint: L'erreur de prédiction a changé de comportement dans les basses fréquences. Toutefois, le spectre a tendance à remonter vers les hautes fréquences.

Une analyse des résultats de l'estimation de la partie ARMA montre que le résultat est surtout un AR, et a du mal à sortir autre chose qu'un AR(1). Ce qui revient à effectuer la prédiction essentiellement à partir du signal de mesure. Ce n'est pas précisément le but, puisqu'une stratégie d'amélioration du rapport signal à bruit était de prédire le signal de mesure à partir du signal de température. Par ailleurs, les tentatives effectuées pour se limiter à un lissage de l'entrée ont échoué. A trop rechercher un lissage du premier signal, on pourrait avoir renforcé le bruit blanc. Il est également possible qu'il soit nécessaire alors d'utiliser des ordres très grands.

Quoiqu'il en soit, ces résultats posent surtout une question : Tout d'abord, on peut se demander quel rôle joue le lissage sur la régularité du signal. Le problème de l'estimation des régularités et des paramètres ARMA ne doit peut-être pas être découplé. La question de l'estimation des paramètres des modèles FARIMA, qui semblait être résolue, nous semble devoir être reposée.

Ceci étant, le problème posé ici est important: Il s'agit d'une façon générale de faire intervenir le traitement du signal dans la métrologie des basses températures. Ce problème ne concerne pas que les

astrophysiciens, et fait l'objet de développement dans différents laboratoires (cnam par exemple).

Élément de bibliographie:

- [1] **N.J.Kasdin**,
Discrete simulation of coloured noise and stochastic process and $1/f^\alpha$ power law noise generation, proceedings of the IEEE, 83(5); May 1995
- [2] **J.R.M Hosking**.
Fractional differencing, biometrika, 68 (1), 165-176, 1981
- [3] **A.Benoit, S.Pujol**, ,
Cryogenics, vol 34, n° 5.1994