

Images de radar à Ouverture Synthétique : transformée de Mellin et Multirésolution

Jean Marie Nicolas, Marc Sigelle, Cédric Thuillier, Florence Tupin

Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications

Département Images

46 rue Barrault, 75634 Paris Cedex (France)

RÉSUMÉ

Les images obtenues par Radar à Ouverture de Synthèse (ROS) présentent un aspect granuleux, le chatolement, qui rend leur interprétation difficile. Une approche peu usitée est d'utiliser, pour analyser le chatolement, un formalisme fondé sur la transformée de Mellin et la convolution de Mellin : en particulier on obtient une formulation originale du phénomène de fouillis. Elle nous permet d'aborder des traitements de type multirésolution et une caractérisation d'un processus de filtrage d'images en terme de statistique du chatolement.

ABSTRACT

Synthetic Aperture Radar (SAR) provides characteristic images speckle of which make them harder to analyse. Speckle can be modeled by an almost unknown method : the Mellin convolution, based on the Mellin transform. By this way, the texture of SAR images can be easily characterized. A multiresolution approach yields statistical models which can be better analysed by this way.

1 Introduction : le chatolement des images ROS

La faible dimension de la longueur d'onde utilisée par un Radar à Ouverture Synthétique (ROS) vis à vis de la cellule de résolution, associée aux propriétés intrinsèques d'un train d'onde cohérent, se traduit par l'apparition sur l'image d'une texture granulaire caractéristique appelée "chatolement" (speckle). Après certaines simplifications du modèle de rétrodiffusion, on peut supposer que le champ électromagnétique reçu par l'antenne peut être représenté comme la somme des contributions d'un grand nombre d'éléments diffuseurs. On connaît alors la fonction de densité de probabilité pour l'intensité du signal reçu qui est une loi exponentielle [1]

$$P(I) = \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\frac{I}{2\alpha^2}}$$

de moyenne $2\alpha^2$ et d'écart type $2\alpha^2$. On en déduit la fonction de densité de probabilité pour l'amplitude du signal reçu :

$$P(A) = \frac{2A}{2\alpha^2} e^{-\frac{A^2}{2\alpha^2}}$$

de moyenne $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\alpha$ et d'écart type $\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\alpha$.

Les images caractérisées par ce chatolement (chatolement pleinement développé) sont d'un usage difficile : la granularité de ce chatolement en perturbe notablement la lisibilité. Aussi, on construit des images "multi-vues" (multilook), dont la résolution plus faible est compensée par un lissage du chatolement facilitant l'interprétation.

Les images multi-vues sont en général construites à partir des images d'intensité : l'image en intensité "L-vues" est obtenue en moyennant L images en intensité 1-vue décorréelées.

Pour établir des images d'amplitude multi-vues, deux techniques sont possibles :

- ★ calculer une image en intensité multi-vue et en prendre la racine carrée : c'est ce que nous appellerons l'image \sqrt{I}
- ★ effectuer la moyenne d'images en amplitude : opération classique en traitement d'image, qui garantit certaines propriétés de linéarité entre autres.

Dans le premier cas, on peut alors calculer analytiquement les lois de probabilités, puisqu'elles sont connues pour les images "L-vues" en intensité. Dans le second cas, la loi de probabilité n'a pas d'expression simple. Ces résultats, établis par exemple dans [1], sont récapitulés dans les tableaux 1 (lois de probabilités) et 2 (valeur moyenne et variance). Pour une meilleure lisibilité, on a utilisé le développement au premier ordre suivant [2], qui peut être utilisé de manière réaliste pour de faibles valeurs de L (erreurs inférieures à 8% pour $L = 1$).

$$\frac{\Gamma(z+a)}{\Gamma(z)} = (z-1)^a \left(1 + \frac{a(a+1)}{2(z-1)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right) \right)$$

\Rightarrow

$$\frac{\Gamma(L+0.5)}{\Gamma(L)} = \sqrt{L-1} \left(1 + \frac{3}{8(L-1)} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (1)$$

2 Texture et chatolement

2.1 Convolution de Mellin

La nature du chatolement peut s'apparenter à celui d'un bruit multiplicatif. On remarque par ailleurs que les densités de probabilité ne dépendent que du nombre de vues L , et d'un paramètre β tel que, si $p_L(x|\beta) = f_L(x, \beta)$ est la densité de probabilité de la variable x (x pouvant être par exemple

Type	Loi
I 1-vue	$P(I) = \frac{1}{2\alpha^2} e^{-\frac{I}{2\alpha^2}}$
I L-vues	$P_L(I) = \frac{L^L}{(2\alpha^2)^L \Gamma(L)} I^{L-1} e^{-\frac{IL}{2\alpha^2}}$
\sqrt{I} 1-vue	$P(A) = \frac{2A}{2\alpha^2} e^{-\frac{A^2}{2\alpha^2}}$
\sqrt{I} L-vues	$P_L(A) = \frac{2L^L}{(2\alpha^2)^L \Gamma(L)} A^{2L-1} e^{-\frac{LA^2}{2\alpha^2}}$
A 1-vue	$P(A) = \frac{2A}{2\alpha^2} e^{-\frac{A^2}{2\alpha^2}}$
A L-vues	?

TAB. 1 — Lois de probabilités du chatoisement pleinement développé

Type	μ	σ	$\frac{\sigma}{\mu}$
I 1-vue	$2\alpha^2$	$2\alpha^2$	1
I L-vues	$2\alpha^2$	$\frac{2\alpha^2}{\sqrt{L}}$	$\frac{1}{\sqrt{L}}$
\sqrt{I} 1-vue	$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\alpha$	$\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\alpha$	0.523
\sqrt{I} L-vues	$(1 - \frac{1}{8L}) \sqrt{2}\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{4L}} \sqrt{2}\alpha$	$\frac{1}{2\sqrt{L}}$
A 1-vue	$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\alpha$	$\sqrt{1 - \frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\alpha$	0.523
A L-vues	$\sqrt{\frac{\pi}{4}} \sqrt{2}\alpha$	$\frac{\sqrt{4-\pi}}{\sqrt{4L}} \sqrt{2}\alpha$	$\frac{0.523}{\sqrt{L}}$

TAB. 2 — Statistiques du chatoisement pleinement développé, avec l'approximation (1)

l'intensité I ou l'amplitude A), on a en fait $f_L(x, \beta) = \phi(\beta) g_L(\frac{x}{\beta})$, ϕ étant une fonction de β uniquement. On montre alors que, si $f_L(x)$ et $g_L(u)$ sont des densités de probabilités, alors cette hypothèse implique $\phi(\beta) = \frac{1}{\beta}$.

Ce résultat est important si l'on analyse une image texturée. Soit la connaissance d'une part de la loi $f_L(x, \beta)$ correspondant à une zone homogène, et, d'autre part, de la loi $h(\beta)$ correspondant à la probabilité d'avoir une parcelle de paramètre β . La formule de Bayes permet alors d'écrire :

$$P_L(x) = \int_0^\infty p_L(x|\beta)h(\beta)d\beta = \int_0^\infty f_L(x, \beta)h(\beta)d\beta$$

La constatation précédente permet alors d'écrire

$$P(x) = \int_0^\infty g_L(\frac{x}{\beta})h(\beta)\frac{d\beta}{\beta} = (g_L \hat{\star} h)(x)$$

où $\hat{\star}$ représente la convolution de Mellin [3]. La principale propriété de la convolution de Mellin est la suivante :

$$\mathcal{M}(P) = \mathcal{M}(g_L \hat{\star} h) = \mathcal{M}(g_L) \mathcal{M}(h)$$

avec \mathcal{M} l'opérateur "transformée de Mellin", ce qui permet d'écrire

$$P = \mathcal{M}^{-1}(\mathcal{M}(g_L) \mathcal{M}(h)) \quad (2)$$

On rappelle que la transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$, $x \in [0; \infty]$ est la fonction $\phi(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$, pour les valeurs de $s \in \mathcal{C}$ pour lesquelles l'intégrale converge.

2.2 Application aux images ROS

Le chatoisement pleinement développé (loi en intensité) s'écrit :

$$\begin{aligned} P_L(I) &= \frac{L^L}{(\sigma)^L \Gamma(L)} I^{L-1} e^{-\frac{IL}{\sigma}} \\ &= \frac{1}{\sigma} \frac{L^L}{\Gamma(L)} \left(\frac{I}{\sigma}\right)^{L-1} e^{-\frac{IL}{\sigma}} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{L^L}{\Gamma(L)} y^{L-1} e^{-Ly} \end{aligned}$$

avec $\beta = \sigma$ et $y = \frac{I}{\sigma}$. Sachant que (tables [3])

$$\mathcal{M}[L^L y^{L-1} e^{-Ly}] = L^{-(s-1)} \Gamma(s+L-1)$$

on en déduit :

$$\mathcal{M}_C(s) = \mathcal{M}[\beta P_L(I)](s) = \frac{1}{\Gamma(L)} L^{-(s-1)} \Gamma(s+L-1) \quad (3)$$

On en déduit alors la loi globale de l'image ROS :

$$P = \frac{1}{\Gamma(L)} \mathcal{M}^{-1}[L^{-(s-1)} \Gamma(s+L-1) \mathcal{M}[h](s)] \quad (4)$$

2.3 Cas de la texture modélisée par des distributions de Pearson

Les premiers modèles de texture ont utilisé de manière empirique les lois Gamma, ce qui donne une loi K pour la scène. En fait, une approche fondée sur le système de Pearson permet d'une part de retrouver la loi Gamma (distribution de Pearson de type III), et d'autre part de traiter d'autres cas qui peuvent s'avérer plus réalistes.

On rappelle que le système de Pearson vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{1}{P_P(\sigma)} \frac{dP_P(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{a+\sigma}{c_0+c_1\sigma+c_2\sigma^2} \quad (5)$$

Les paragraphes suivants traitent donc les distributions de Pearson de type III (loi K, densité de probabilité P_K), de type I (loi W, densité de probabilité P_W), de type VI (loi U, densité de probabilité P_U) et de type V (loi B, densité de probabilité P_B) qui ont été utilisées pour le traitement des images ROS [7] : ils montrent que l'approche de la convolution de Mellin réduit le calcul analytique de ces lois à une recherche dans les tables existantes de transformées de Mellin et de transformées inverses.

Les densités de probabilités seront les lois en intensité dont il est aisé de déduire les lois en amplitude.

2.3.1 Distribution de Pearson de type III : Loi K

Dans le cas d'images SAR, on sait qu'un bon modèle de "fourillis" sur les paysages naturels est fondé sur une loi Gamma [5] : c'est en fait la distribution de Pearson de type III dont on connaît explicitement la transformée de Mellin.

La texture est donc décrite par une loi Gamma :

$$P_K(\sigma) = \frac{\nu}{\xi} \left(\frac{\nu\sigma}{\xi}\right)^{\nu-1} \frac{1}{\Gamma(\nu)} e^{-\frac{\nu\sigma}{\xi}} \quad \nu \geq 0 \quad \xi \geq 0$$

dont la transformée de Mellin se calcule aisément

$$\mathcal{M}[P_K(\sigma)] = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\nu}{\xi}\right)^{-(s-1)} \Gamma(s + \nu - 1)$$

La transformée de Mellin de la loi globale s'écrit alors :

$$\mathcal{M}_T(s) = \frac{1}{\Gamma(L)} \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{L\nu}{\xi}\right)^{-(s-1)} \Gamma(s + \nu - 1) \Gamma(s + L - 1)$$

Les tables de Transformée de Mellin inverse [3] donnent $\mathcal{M}^{-1}[\Gamma(s+a)\Gamma(s+b)]$, ce qui permet de retrouver la loi K bien connue :

$$P(I) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(\nu)} \frac{2}{I} \left(\frac{L\nu I}{\xi}\right)^{\frac{\nu+L}{2}} K_{\nu-L} \left[2 \left(\frac{L\nu I}{\xi}\right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

2.3.2 Distribution de Pearson de type I : Loi W

La texture est décrite par la loi suivante (Distribution de Pearson de type I, autrement dit, loi bêta de première espèce) :

$$P_W(\sigma) = \frac{1}{\xi} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{p-1} \left(1 - \frac{\sigma}{\xi}\right)^{q-1}$$

avec $p \geq 0, q \geq 0, \xi \geq 0$

On peut en calculer la transformée de Mellin [4] :

$$\mathcal{M}[P_W] = \frac{\Gamma(s+p-1)}{\Gamma(s+p+q-1)} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)} \left(\frac{1}{\xi}\right)^{-(s-1)}$$

La transformée de Mellin de la loi globale s'écrit alors :

$$\mathcal{M}_T(s) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(L)\Gamma(p)} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{-(s-1)} \frac{\Gamma(s+p-1) \Gamma(s+L-1)}{\Gamma(s+p+q-1)}$$

Le calcul de la transformée de Mellin inverse

$$\int_{-\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\lambda + \mu + s + \frac{1}{2}) \Gamma(\lambda - \mu + s + \frac{1}{2})}{\Gamma(\lambda - k + s + 1)} z^{-s} ds$$

se trouve dans les tables [2], ce qui permet de retrouver la formule bien connue

$$P(I) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(L)} \left(\frac{LI}{\xi}\right)^{\frac{p+L-1}{2}} \frac{1}{I} e^{-\frac{LI}{\xi}} W_{1-\frac{2q-p+L}{2}, \frac{p-L}{2}} \left(\frac{LI}{\xi}\right)$$

2.3.3 Distribution de Pearson de type VI : Loi U

La texture est décrite par la distribution de Pearson de type VI :

$$P_U(\sigma) = \frac{1}{\xi} \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{\left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^{p-1}}{\left(1 + \frac{\sigma}{\xi}\right)^{p+q}} \quad p \geq 0 \quad q \geq 0 \quad \xi \geq 0$$

On peut en calculer la transformée de Mellin :

$$\mathcal{M}[P_U] = \frac{1}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \frac{1}{\xi^{-(s-1)}} \Gamma(p-1+s) \Gamma(q+1-s)$$

La transformée de Mellin de la loi globale s'écrit alors :

$$\mathcal{M}_T(s) = \frac{1}{\Gamma(L)\Gamma(p)\Gamma(q)} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{-(s-1)} \cdot \Gamma(s+p-1) \Gamma(s+L-1) \Gamma(q+1-s)$$

Le calcul de la transformée de Mellin inverse

$$\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(a-s) \Gamma(s) \Gamma(s-c+1) x^{-s} ds$$

se trouve dans les tables [2], ce qui permet de retrouver la formule bien connue :

$$P(I) = \frac{\Gamma(p+q) \Gamma(q+L)}{\Gamma(L) \Gamma(p) \Gamma(q)} \frac{1}{I} \left(\frac{LI}{\xi}\right)^p \cdot \Psi \left(p+q, 1-L+p; \frac{LI}{\xi} \right)$$

avec Ψ fonction hypergéométrique confluente.

2.3.4 Distribution de Pearson de type V : Loi B

La texture est décrite par la distribution de Pearson de type V "gamma inverse" :

$$P_B(\sigma) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\xi} \left(\frac{\xi}{\sigma}\right)^{\alpha+1} e^{-\frac{\xi}{\sigma}} \quad \alpha \geq 0 \quad \xi \geq 0$$

On montre aisément que

$$\mathcal{M}[P_B] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \xi^{s-1} \Gamma(1-s+\alpha)$$

La transformée de Mellin de la loi globale est alors :

$$\mathcal{M}_T(s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(L)} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{-(s-1)} \Gamma(\alpha+1-s) \Gamma(L-1+s)$$

ce qui permet, à partir des tables de transformées de Mellin [4], de déduire $P(I)$:

$$P(I) = \frac{\alpha+L}{\Gamma(\alpha) \Gamma(L)} \left(\frac{LI}{\xi}\right)^L \frac{1}{I} \frac{1}{\left(1 + \frac{LI}{\xi}\right)^{L+\alpha}}$$

2.4 Moments des lois de texture

Par définition, la transformée de Mellin d'une loi de probabilité donne les moments

$$m_\gamma = \mathcal{M}(s = \gamma + 1) \quad (6)$$

Les propriétés de la transformée de Mellin permettent de calculer la transformée de Mellin à partir d'un système différentiel, ce qui donne dans le cas des lois KWUB qui vérifient (5) :

$$\mathcal{M}_P(s+1) = \frac{-a + c_1 s}{(1-c_2) - c_2 s} \mathcal{M}_P(s) \quad (7)$$

Connaissant la relation de récurrence pour la loi du chatolement (propriétés de la fonction Γ), on peut écrire une relation de récurrence pour la loi globale, et donc pour les moments de la loi

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_T(s+1) &= \frac{-a \frac{L-1}{L} + \frac{c_1(L-1)-a}{L} s + \frac{c_1}{L} s^2}{(1-c_2) - c_2 s} \mathcal{M}_T(s) \\ &= \frac{B_0 + B_1 s + B_2 s^2}{(1+C) + C s} \mathcal{M}_T(s) \end{aligned} \quad (8)$$

avec $C = -c_2$, $B_0 = -\frac{a(L-1)}{L}$, $B_1 = \frac{c_1(L-1)-a}{L}$ et $B_2 = \frac{c_1}{L}$.

Cette formulation originale montre qu'avec les quatre premiers moments, un système linéaire permet de calculer les paramètres B_0, B_1, B_2 et C , ce qui permet d'en déduire les paramètres du système de Pearson (loi de texture) et de la loi de chatoisement ("look équivalent").

Dans le cas le plus général, la caractérisation de la loi de texture, connaissant la loi de chatoisement, peut se faire par transformées de Mellin, directe et inverse, numériques [6].

3 Multi-vue et Multirésolution

L'analyse multirésolution vise à obtenir des jeux d'images à des résolutions variables et de taille variable. De nombreuses techniques existent : nous nous focaliserons sur la décomposition de Mallat et l'utilisation d'ondelettes à support compact. Dans ce schéma, l'ondelette la plus simple est l'ondelette de Haar et revient à effectuer un filtre moyennneur sur l'image : c'est celle que nous utiliserons pour illustrer notre approche dans le cas monodimensionnel.

Pour une résolution donnée, l'approche multirésolution utilisant l'ondelette de Haar revient à considérer deux applications, la seconde seule nous intéresse dans cet article :

$$\begin{aligned} H &: f \longrightarrow f_h \quad \text{t.q.} \quad f_h(x) = \frac{f(2x+1) - f(2x)}{2} \\ B &: f \longrightarrow f_b \quad \text{t.q.} \quad f_b(x) = \frac{f(2x+1) + f(2x)}{2} \end{aligned}$$

Pour chercher $P_b(k) = P(f_b(x) = k)$, et puisque f est positif (cas d'une image) on peut écrire

$$\begin{aligned} P_b(k) &= P(f_b(x) = k) = \int_0^{2k} P(f(2x+1) = 2k-t) \\ &P(f(2x) = t \mid f(2x+1) = 2k-t) dt \end{aligned}$$

et en faisant des hypothèses de stationnarité et de décorrélation des pixels, on a :

$$P(f_b = k) = \int_0^{2k} P(f = 2k-t) P(f = t) dt$$

En supposant que l'image traitée est une image "L-vues" et en posant $\gamma = \frac{2L^L}{(2a^2)^L \Gamma(L)}$, $\alpha = 2L - 1$, $\beta = -\frac{L}{2a^2}$, la loi de probabilité du niveau de référence de l'image s'écrit

$$P_0(A) = \gamma A^\alpha \exp(-\beta A^2)$$

d'où l'expression de P_b :

$$\begin{aligned} P_b(A) &= 2 \int_0^{2A} P_0(t) P_0(2A-t) dt \\ &= 4\gamma^2 A^{2\alpha+1} e^{-2\beta x^2} G(\alpha, A) \end{aligned} \quad (9)$$

avec

$$\begin{aligned} G(\alpha, A) &= \int_{-1}^1 (1-c^2)^\alpha e^{-2\beta x^2 c^2} dc \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n (-1)^n I_n(A) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I_n(A) &= \int_{-1}^1 c^{2n} e^{-2\beta A^2 c^2} dc \\ &= \frac{(2n-1)I_{n-1}(A) - e^{-2\beta A^2}}{4\beta A^2} \quad n > 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } I_0(A) = \frac{\pi}{A\sqrt{2\beta}} \sqrt{1 - e^{-2\beta A^2}}$$

L'extension de ce résultat (équation 9) aux textures peut se faire en s'appuyant sur l'équation (2) et sur les propriétés fondamentales des transformées de Mellin.

Enfin, le cas des ondelettes à support compact d'ordre supérieur peut s'aborder de manière analogue, mais les expressions analytiques sont rapidement lourdes à gérer.

Références

- [1] H. Laur *Analyse d'images radar en télédétection : discriminateurs radiométriques et texturaux* Thèse de doctorat, Université de Toulouse, 1989
- [2] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik *Table of integrals, series and product* Academic Press, 1980
- [3] S. Colombo *Les transformations de Mellin et de Hankel* Centre National de la Recherche Scientifique, 1959
- [4] S. Colombo, J. Lavoine *Transformations de Laplace et de Mellin* Mémorial des sciences mathématiques, fascicule 169 Gauthier-Villars, 1972
- [5] C.J. Oliver *Optimum texture estimators for SAR clutter* J.Phys. D : Appl. Phys. 26 (1993) 1824-1835
- [6] JM Nicolas and JL Bernatets. *Attenuation correction using Mellin transform* Acoustical Imaging 14. Plenum Press, 1985.
- [7] Y. Delignon *Etude statistique d'images radar de la surface de la mer* Thèse de doctorat, Université de Rennes-1, 1993