Inversion entrée-sortie et égalisation Application : Système de transmission par satellite

S. El Asmi
E.S.P.T.Tunis-Laboratoire des systèmes de télécommunications
Route de raoued km 3,5 2080 Ariana Tunisie

Résumé : Dans ce papier, nous introduisons une nouvelle approche algébrique, issue de la théorie des systèmes, pour traiter le problème d'égalisation des canaux non linéaires. Cette approche qui permet d'analyser les propriétés structurelles du canal, va être appliquée à un système de transmission par satellite, présentant une nonlinéarité. Nous montrons, sur ce canal, que l'opération d'égalisation est toujours possible sauf en des points singuliers que nous mettons en évidence.

Abstract : In this paper, we introduce a new algebraic approach, issued from the theory of system, in order to study the equalization problem in nonlinear communications channels. This proposed method, which is useful in the analysis of structural properties of the channel, will be applied to satellite transmission system presenting a nonlinearity. We show that, the channel is usually equalized, except in singular points that we determine.

Introduction

Lors de la transmission d'un message numérique à travers un canal reliant deux points de l'espace, l'information est contenue dans un signal composé de symboles. Le canal introduit des distorsions dans le signal transmis. L'égalisation est une technique mise en oeuvre pour retrouver à partir du message reçu, le message émis, et ce malgré les perturbations introduites lors de la transmission. Son rôle est donc d'inverser les effets introduits par le canal.

Lorsque le canal est linéaire le problème de l'égalisation est relativement bien traité dans la littérature [Mac,Ton, Mon, Pro, ...]. Cependant, le cas des canaux non linéaires reste toujours très peu considéré, alors que plusieurs systèmes de télécommunications présentent des nonlinéarités. Par exemple le système de transmission par satellite [Ben].

Dans ce papier, nous allons proposer une nouvelle approche, pour l'égalisation des canaux nonlinéaire. Cette approche, issue de l'algèbre aux différences, va nous permettre d'analyser les propriétés structurelles du canal. Ainsi, nous allons pouvoir répondre à une question fondamentale : "l'opération d'égalisation est-elle possible?" Si oui, existe-il des points singuliers.

Le paragraphe I, est un rappel sur l'approche algébrique, introduite par Fliess, qui a permit la résolution du problème d'inversion des systèmes entrée-sortie. Nous introduisons la notions de *filtration* et les *polynômes de Hilbert* associés qui vont jouer un rôle fondamental dans notre démarche. Dans le paragraphe II, nous établissons un lien entre l'inversion et l'égalisation. Le paragraphe III, est une illustration, de notre approche, sur un canal de transmission par satellite.

I. Rappels mathématiques

Soit k un corps aux différences de base, supposé, pour simplifier, de caractéristique nulle. En pratique, ce sera par exemple, le corps des réels IR.

•Un *corps aux différences* [Com] est un corps commutatif K muni d'un monomorphisme :

$$\delta : K \text{-------->} K$$

appelé transformation, vérifiant donc les propriétés suivantes :

$\forall\, a, b \in K$

$$\delta(a+b) = \delta(a) + \delta(b$$
$$\delta(ab) = \delta a . \delta b$$
$$\delta(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0$$

Pour les systèmes numériques, δ représente le retard d'une unité de temps $\delta x(t) = x(t-1)$ *et* $\delta^{(i)}x(t) = x(t-i)$

•Une *extension aux différences* L/K est la donnée de deux corps aux différences K et L tels que :

- K est un sous corps de L
- La transformation de K est la restriction à K de la transformation de L.

Deux situations sont possibles :

i)Un élément $w \in K$ est transformellement algébrique si, et seulement si, il satisfait une équation aux différences, $P(w, \delta w,..., \delta^{(n)}w) = 0$.

L'extension est dite transformellement algébrique si, et seulement si, tout élément de *L* est transformellement algébrique.
ii)Un élément $w \in K$ est transformellement transcendant si, et seulement si, il n'est pas transformellement algébrique. C'est-à-dire qu'il ne satisfait aucune équation algébriques aux différences à coefficients dans *K*.
L'extension *L/K* est transformellement transcendante, s' il existe aux moins un élément de *L* qui soit transformellement transcendant.
Une famille $\{ e_i \ / \ i \in I\}$ de *L* est dite transformellement K-algébriquement indépendante si, et seulement si, la famille $\{ \delta^{(j)} e_i \ / \ i \in I, j \in IN\}$ est *K*-algébriquement indépendante. Une telle famille, lorsqu'elle est maximale par rapport à l'inclusion, est appelée base de transcendance transformelle de *L/K*. Deux bases ont même cardinalité, appelée le degré de transcendance transformelle. On note :

d°tr transf L/K.

•Un *k-module aux différences M* est un *k[δ]*-module à gauche, où *k[δ]* désigne l'anneau des opérateurs aux différences linéaires de la forme :

$$\sum_{finie} a_i \delta^i$$

<u>Notation</u> : *[w]* est un module aux différences engendré par $w = (w_1,.., w_s)$. On dit alors qu ' il est de type fini.

•Une *filtration aux différences*, d'un module aux différences *M* est constituée par une chaîne ascendante d'espaces vectoriels.

Pour $M = [w]$, $V_r = span\{w(n), w(n-1),..., w(n-r)\}$, $r \in IN$, est une filtration de *M*.

Le concept de filtration est souvent lié à un polynôme numérique appelé le *polynôme de Hilbert* Cette liaison est établie à partir du résultat suivant, qui va jouer un rôle fondamentale dans la suite :

Théorème : Soient $M = [w]$ un module aux différences et $V_r = span\{w(n), w(n-1),..., w(n-r)\}$ une filtration de *M*. Il existe alors un polynôme de Hilbert, $P \in IN[r]$, de degré 1, tel que pour *r* assez grand :

a) $dim\ V_r = P(r) = \rho r + \beta$

b) $\rho = dim\ V_{r+1} - dim\ V_r$

ρ : le rang du module aux différences [w].

II. L' inversion à gauche et égalisation

En théorie des systèmes, nous sommes souvent amenés à nous poser deux questions distinctes : une sortie donnée est-elle effectivement reproductible par le système? si oui, comment calculer les entrées? Ces deux problèmes introduisent respectivement les notions d'inversibilités à droite et à gauche. D'autre part, en télécommunications, le problème d'égalisation, qui à pour but d'inverser les effets introduits par le canal, consiste à retrouver le signal émis, qui est l'entrée du système, à partir du signal reçu, qui représente la sortie du système. L'égalisation est donc, intimement lié à l'inversibilité à gauche.
Pour un système linéaire constant, l'approche fréquentielle rend aisée l'analyse du problème d'inversion. En effet un système est inversible à droite (resp. à gauche) si, et seulement si, sa matrice de transfert est inversible à droite (resp. à gauche). Dans le cas où le système est donné par une représentation d'état ce concept reste toujours valable. De surcroît, nous disposons d'un algorithme assez complexe, dit de structure, dû à Silverman[Sil].
En non linéaire, les démarches classiques ont tenté de généraliser, sous différents aspects, l'algorithme de structure [Sin]. C'est grâce à l'algèbre aux différences, introduit par Fliess [Fls1], que ce problème a été résolu de façon claire. Ainsi, le rang d'un système linéaire ou non, appelé *rang transformel de sortie*, a été défini pour la première fois. Ce rang généralise le rang de la matrice de transfert.
Dans ce qui suit, nous allons rappeler brièvement les principaux résultats, issus de l'approche algèbre aux différences, sur l'inversion des systèmes en temps discret [Fls1].
Inversion des systèmes entrée-sortie. Considérons un *système linéaire* (S) d'entrée $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ et de sortie $y = (y_1, y_2, ..., y_p)$.

•Le *rang transformel de sortie*, ρ, de *(S)* est le rang du module aux différences *[y]* [Fls2].

•Le système *(S)* est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si, $\rho = m$ (resp. $\rho = p$)
Proposition [Ela1, Ela2] : Pour *r* assez grand

$$\rho = \dim V_{r+1} - \dim V_r$$

où, $V_r = span\{ y_{(n)}, y_{(n-1)}, ..., y_{(n-r)}\}$.
Remarque : On suppose que le système (S) est inversible à gauche. Nous avons alors, pour *r* assez grand, $\dim V_r = mr + \beta$, *c'est le rang de la matrice de Sylvester* [Mou, Fij]. Ce qui nous amène à parler des zéros communs. En effet, si $\beta = m$, on est en absence des zéros communs, si non le nombre de ces zéros est : $n_0 = m - \beta$.

Considérons un *système non linéaire* (Σ) d'entrée $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ et une sortie $y = (y_1, y_2, ..., y_p)$.

•Le rang transformel de sortie, ρ, de (Σ) est le degré de transcendance transformelle de $k\langle y\rangle/k$.

•Le système *(Σ)* est inversible à gauche (resp. à droite) si et seulement si, $\rho = m$ (resp. $\rho = p$).
Nous avons, comme la cas linéaire
Proposition [Ela1, Ela2] : Pour *r* assez grand

$$\rho = \dim V_{r+1} - \dim V_r$$

où, $V_r = span\{ dy_{(n)}, dy_{(n-1)}, ..., dy_{(n-r)}\}$.
$dy_{(n)}$ est la différentielle de *y*.

Cela nous permet de proposer, pour un système de transmission numérique, possédant *m* sources et *p* capteurs, le résultat suivant:
Proposition : L'opération d'égalisation est possible, sur ce système, si et seulement si, son rang transformelle de sortie est égal au nombre des sources.

III. Application : Egalisation d'un système de transmission par satellite

Plusieurs systèmes de télécommunications présentent des nonlinéarités. Par exemple, le système de transmission par satellite peut-être modélisé par les équations aux différences suivantes

$$y_n = w_n + h_2 w_{n-1}$$
$$w_n = s_n + a s_n^2$$
$$s_n = e_n + h_1 e_{n-1}$$

où h_1, h_2 et a sont des réels donnés, e_n est le signal émis et y_n est le signal reçu.
Pour analyser les propriétés structurelles de ce canal, nous allons considérer la filtration

$$V_r = span\{dy_n, dy_{n-1}, ..., dy_{n-r}\}$$

les différentielles de y_n, w_n et s_n sont données par :

$$dy_n = dw_n + h_2 dw_{n-1}$$
$$dw_n = (1 + 2as_n) ds_n$$
$$ds_n = de_n + h_1 de_{n-1}$$

Nous avons alors,

$$dy_n = \alpha_n de_n + \beta_n de_{n-1} + \lambda_n de_{n-2}$$

avec,

$$\alpha_n = 1 + 2as_n$$
$$\beta_n = h_1(1 + 2as_n) + h_2(1 + 2as_{n-1})$$
$$\lambda_n = h_1(1 + 2as_{n-1})$$

d'où,

$$\dim span\{dy_n\} = 1$$
$$\dim span\{dy_n, dy_{n-1}\} = 2$$

et d'une façon générale,

$$\dim span\{dy_n, dy_{n-1}, ..., dy_{n-r}\} = r + 1$$

Nous déduisons que pour tout $r \in IN$,

$$\dim V_{r+1} - \dim V_r = 1,$$

le système est donc inversible et par conséquent l'opération d'égalisation est possible.

Les points singuliers : Le passage aux nonlinéaires s'accompagne souvent d'un certain nombres de restrictions qui sont dues à la présence de singularités. Pour le système de transmission, que nous avons considéré précédemment, le rang générique ρ peut chuter, ce qui rend le système non inversible et l'opération d'égalisation n'est plus possible.
Cette situation peut se produire lorsque :
pour tout $n \in IN$:

$$\alpha_n = 0 \Rightarrow s_n = -1/2a,$$

nous avons alors,

$$e_n + h_1 e_{n-1} = -1/2a,$$

c'est la singularité du système.
Conclusions : Dans ce papier, nous avons établi le lien entre l'inversion des systèmes entrée-sortie et

l'égalisation d 'un canal de transmission par satellite. Nous avons montré que la notion de filtration et les polynômes de Hilbert associée fournissent des riches informations sur l'opération d'égalisation et les zéros du canal.

REFERENCES

[Ben] S. Benedetto, E. Biglieri et D. Daffara, Modelling and performance evaluation of nonlinear satellite links-a Volterra series approach, IEEE Trans. on AES, vol. 15, N, 1979.
[Com] P. M. Cohn, Difference Algebra, Interscience, New York, 1965.
[Ela1] S. El Asmi, M. Fliess, Formules d' inversion, Analysis of Controlled Dynamical Systems Bonnard, Bride, Gauthier, Kupka eds, Birkhäuser, Boston, 1991, p. 201-210.
[Ela2] S. El Asmi, M. Fliess, Invertibility of discrete-time systems, IFAC-Symposium NOLOS'92, Bordeaux, 1992.
[Fls1] M. Fliess, Automatique en temps discret et algèbre aux différences, Forum Math., 2, 1990, p. 213-232.
[Fls2] M. Fliess, Reversible linear and nonlinear of discrete-time dynamics, IEEE Tran. Automat. Control, 37, 1992.
[Fij] I. Fijalkow, A. Touzi, C. Johnson, Spatio-temporal equalizability under channel and loss of diparity, GRETSI, 95.
[Gro] P. Grohan, S. Marcos, M. Bénidir, Problèmes liès au filtrage de volterra appliqué à l'égalisation adaptative non linéaire, GRETSI, 95.
[Mac] O. Macchi, L. M. S. Adaptative Processing with Application in Transmission, Wiley 1994.
[Mou] E. Moulines, P. Duhamel, J. F. Cardoso, S. Mayargue, Subspace methods for the blind identification of multichannel FIR Filters, IEEE-SP,
[Pro] J. C. Proakis, Digital communications, Mc Graw-Hill, 2nd ed, 1989.
[Ton] L. Tong, G. Xu, T. Kailath, Fast blind equalisation via antenna arrays, Proc. ICASSP 1993, vol.4, p. 272-275.
[Sil] L. M. Silverman, Inversion of multivariable linear system, IEEE Trans. Automat. Control, AC-14, p. 141-149, 1969.
[Sin] S. N. Singh, A modified algorithm for invertibility in nonlinear systems. IEEE, Tran. Automat. Control, AC-26, p. 595-598, 1981.