

# Influence des retards aléatoires sur les spectres de puissance

Madalina Andrei et Bernard Lacaze

ENSEEIH/GAPSE, 2 Rue Camichel, B.P. 7122, 31071 Toulouse Cedex 7, France

## RÉSUMÉ

Lors de la transmission d'une onde monochromatique, les retards aléatoires peuvent être modélisés par des changements d'horloge. Au cours de cet article, nous définissons les changements d'horloge et analysons leur rôle. Nous donnons une décomposition de l'onde reçue dans une partie contenant l'information relative à l'onde émise et le bruit apporté par le changement d'horloge. Sous l'hypothèse gaussienne du retard aléatoire, nous étudions l'influence de différents paramètres sur le spectre et la puissance du bruit. En particulier, nous analyserons la perte d'énergie et la transformation de l'onde reçue.

## ABSTRACT

In the monochromatic wave transmission case, random delays can be modeled by clock changes. In this paper, we define the clock changes and we analyse their roll. A decomposition of the received wave is given in a part containing the information related to the emitted wave, accompanied by a noise provided by the clock change. Under Gaussian random delays hypothesis, the influence of different parameters over the noise spectrum is studied. More particularly, the loss of energy and the transformation of the received wave is examined.

## 1 Introduction

Lorsqu'on transmet une onde monochromatique, il faut tenir compte de l'influence du milieu de propagation. Dans certains cas, la vitesse de propagation fluctue en fonction du temps. Le signal subit un changement d'horloge. Plusieurs effets peuvent contribuer à ce phénomène, comme par exemple, le mouvement relatif de l'émetteur et du récepteur, les variations du milieu de transmission, les changements de trajectoires...

Supposons que  $Z(t) = e^{i\omega_0 t}$  représente l'onde monochromatique de fréquence  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ . L'onde reçue en un certain point, après le changement d'horloge  $A(t)$ , correspond au processus :

$$U(t) = e^{i\omega_0(t-A(t))}.$$

On suppose  $A = \{A(t), t \in \mathbb{R}\}$  continu (m.q) et stationnaire au sens suivant :

$$\begin{cases} E[e^{-i\omega A(t)}] = \Psi(\omega) \\ E[e^{-i\omega(A(t)-A(t-\tau))}] = \Phi(\tau, \omega) \end{cases}$$

où  $\Psi$  et  $\Phi$ , les fonctions caractéristiques de  $A(t)$ , respectivement de  $A(t) - A(t - \tau)$ , sont indépendantes du temps  $t$ .

## 2 Décomposition de U(t)

Nous pouvons décomposer  $U(t)$  défini précédemment en une partie monochromatique déterministe  $g(t)$  et un bruit  $V(t)$  [1] tel que :

$$\begin{aligned} U(t) &= g(t) + V(t) \\ g(t) &= E[U(t)] = e^{i\omega_0 t} \Psi(\omega_0) \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$V(t) = e^{i\omega_0 t} [e^{-i\omega_0 A(t)} - \Psi(\omega_0)]. \quad (1)$$

$V(t)$  est donc caractérisé par :

$$\begin{aligned} E[V(t)] &= 0 \\ K_V(\tau) &= E[V(t)V^*(t-\tau)] \\ &= e^{i\omega_0 \tau} (\Phi(\tau, \omega_0) - |\Psi(\omega_0)|^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Comme  $K_V(\tau)$  ne dépend pas de  $t$ ,  $V$  est une fonction aléatoire stationnaire au sens large, de moyenne nulle. Son spectre de puissance,  $S_V(\omega)$ , associé à la fonction d'autocorrélation  $K_V(\tau)$  est défini, d'après le théorème de Bochner-Khinchine [2], par :

$$K_V(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega \tau} dS_V(\omega) \quad (3)$$

Les équations (2) et (3) permettent alors d'obtenir la densité spectrale de puissance de  $V$  (si elle existe), tel que :

$$\begin{aligned} s_V(\omega) &= \frac{dS_V(\omega)}{d\omega} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} (\Phi(\tau, \omega_0) - |\Psi(\omega_0)|^2) d\tau \end{aligned}$$

## 3 Le cas gaussien

On suppose que la fonction aléatoire  $A = \{A(t), t \in \mathbb{R}\}$  est un processus gaussien stationnaire complètement caractérisé par les fonctions caractéristiques [3] :

$$\begin{cases} \Psi(\omega) = e^{-im\omega - \frac{\sigma^2 \omega^2}{2}} \\ \Phi(\tau, \omega) = e^{-\sigma^2 \omega^2 (1-\rho(\tau))} \end{cases} \quad (4)$$

où  $m$ ,  $\sigma^2$  représentent respectivement la moyenne et la variance de  $A(t)$ , et  $\rho(\tau)$  désigne le coefficient de corrélation de  $\{A(t), A(t - \tau)\}$  tel que  $\sigma^2 \rho(\tau) = Cov\{A(t), A(t - \tau)\}$ .

D'après (2) et (4)  $K_V(\tau)$  devient :

$$K_{V(\tau)} = e^{i\omega_0 \tau} e^{-\gamma} (e^{\gamma \rho(\tau)} - 1)$$

$$= e^{i\omega_0\tau} e^{-\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\gamma\rho(\tau)]^n}{n!}$$

où  $\gamma = \sigma^2\omega_0^2$ .

La densité spectrale de puissance a donc l'expression suivante :

$$s_V(\omega) = \frac{e^{-\gamma}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\omega - \omega_0) \frac{\gamma^n}{n!}$$

où

$$\begin{cases} s_n(\omega) = \underbrace{s_k * s_k * s_k * \dots * s_k(\omega)}_{n \text{ fois}} \\ s_k(\omega) = TF\{\rho_k(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \rho_k(\tau) d\tau \end{cases} \quad (5)$$

Nous étudions les six modèles suivants :

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_1(\tau) &= \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_{01}}, & |\tau| < \tau_{01} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \\ \rho_2(\tau) &= e^{-\left|\frac{\tau}{\tau_{02}}\right|}, \quad \tau \in R \\ \rho_3(\tau) &= e^{-\left(\frac{\tau}{\tau_{03}}\right)^2}, \quad \tau \in R \\ \rho_4(\tau) &= \frac{1}{\left(\frac{\tau}{\tau_{04}}\right)^2 + 1}, \quad \tau \in R \\ \rho_5(\tau) &= \frac{\sin(\tau/\tau_{05})}{\tau/\tau_{05}}, \quad \tau \in R \\ \rho_6(\tau) &= \left(\frac{\sin(\tau/\tau_{06})}{\tau/\tau_{06}}\right)^2, \quad \tau \in R \end{aligned} \right.$$

On supposera que le paramètre  $\rho(\tau)$  vérifie une des deux conditions suivantes :

- a) 1-ère condition :  $\int_0^{\infty} \rho_k(\tau) d\tau = 1, k \in \{1..6\}$ .
- b) 2-ème condition : Toutes les fonctions  $\{\rho_k(\tau)\}_{k \in \{1..6\}}$  passent par le même point, de coordonnées  $(1/2, 1/2)$ .

Chaque condition correspond à une définition particulière du rayon de corrélation [4].

La figure 1, et la figure 2 représentent les six fonctions pour des valeurs de  $\tau_{0i}$  satisfaisant respectivement les conditions a) et b).

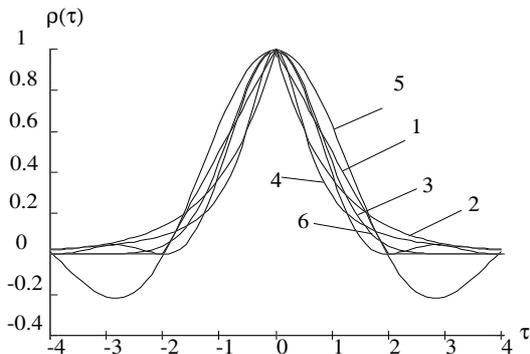


FIG. 1 —  $\delta(\tau) = f(\tau_{0i}, \tau)$  sous la contrainte a)

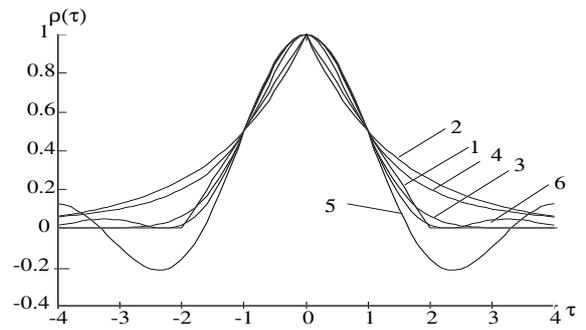


FIG. 2 —  $\delta(\tau) = f(\tau_{0i}, \tau)$  sous la contrainte b)

A partir de (5), en appliquant la transformée Fourier aux  $\{\rho_k(\tau)\}_{k \in \{1..6\}}$  et avec la notation  $u = \tau_{0k}(\omega - \omega_0)$ , on obtient :

$$s_k(\omega - \omega_0) = \tau_{0k} f_k(u), \{i \in [1..6]\}$$

La figure 3 et la figure 4 représentent  $s_V(\omega) / 1 - e^{-\gamma}$  lorsque la variable  $u$  décrit l'intervalle  $[0, 15]$ , pour une valeur du paramètre  $\gamma$  égale à 0.01 et les  $\tau_{0k}$  soumis aux conditions a) et b).

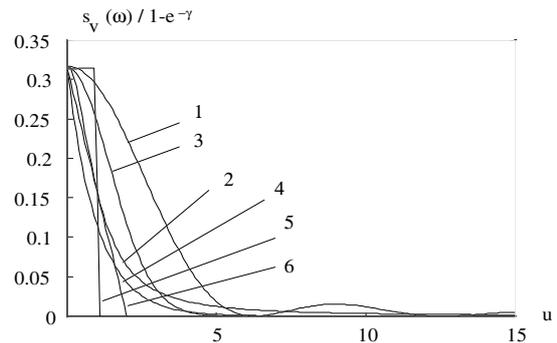


FIG. 3 — Détermination de  $s_V(\omega)$  sous la contrainte a)

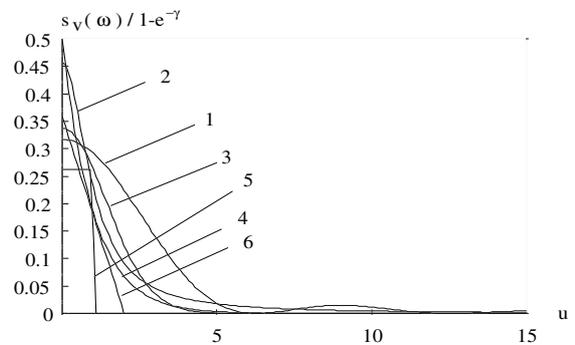


FIG. 4 — Détermination de  $s_V(\omega)$  sous la contrainte b)

La puissance totale du bruit  $V(t)$  vaut  $1 - e^{-\gamma}$ . La puissance relative de  $V(t)$  dans la bande  $\left[\omega_0 - \frac{u}{\tau_{0k}}, \omega_0 + \frac{u}{\tau_{0k}}\right]$  est donc

définie par :

$$p(u) = \frac{1}{1 - e^{-\gamma}} [S_V(\omega_0 + u/\tau_{0k}) - S_V(\omega_0 - u/\tau_{0k})]$$

$$= \frac{2}{\tau_{0k}(1 - e^{-\gamma})} \int_0^u s_V(x) dx$$

Les figures suivantes représentent la puissance relative du bruit  $V(t)$  dans la bande  $[\omega_0 - \frac{u}{\tau_{0k}}, \omega_0 + \frac{u}{\tau_{0k}}]$  pour les trois premiers modèles  $(\rho_1(\tau), \rho_2(\tau), \rho_3(\tau))$ , pour  $\gamma$  allant de 0,01 à 10, c'est-à-dire pour des affaiblissements de 0,99 à 0,0067.

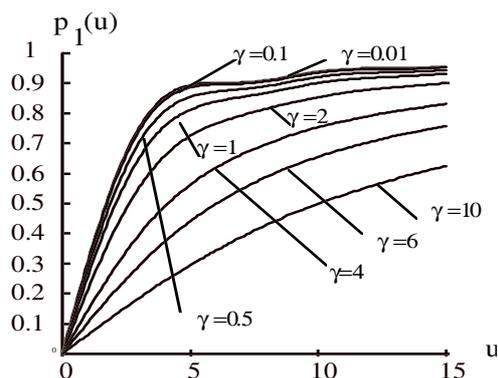


FIG. 5 — Détermination de  $p(\omega)$  pour  $\rho_1(\tau)$

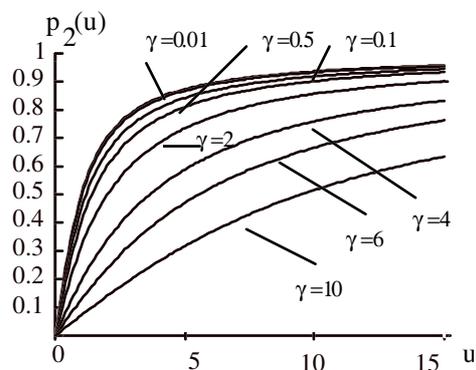


FIG. 6 — Détermination de  $p(\omega)$  pour  $\rho_2(\tau)$

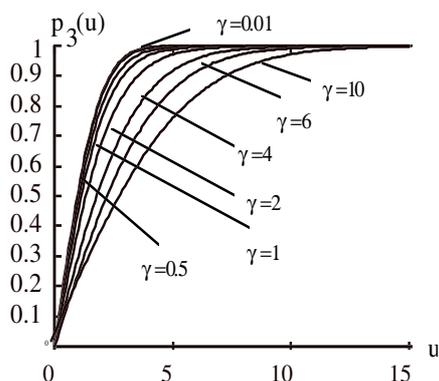


FIG. 7 — Détermination de  $p(\omega)$  pour  $\rho_3(\tau)$

On peut constater que la puissance relative de  $V(t)$  dans la bande considérée décroît avec l'augmentation de  $\gamma$ . On remarque l'importance du rayon de corrélation du retard : plus  $\tau_{0k}$  est petit, plus le spectre s'étale.

## 4 L'hypothèse $\gamma$ grand

Supposons que, pour  $\gamma$  grand, on puisse développer  $\rho(\tau/\sqrt{\gamma})$  sous la forme :

$$\rho(\tau/\sqrt{\gamma}) \simeq 1 - (\tau/\tau_0\sqrt{\gamma})^\alpha + o((\tau/\sqrt{\gamma})^\alpha)$$

Alors, la fonction d'autocorrélation de  $V(t)$  devient :

$$K_V(\tau) \approx e^{i\omega_0\tau} e^{-\gamma(\frac{\tau}{\tau_0})^\alpha} \quad (6)$$

Afin de généraliser pour des valeurs de  $\alpha$  inférieures à 1 (par exemple  $\alpha = 1/2$ ), on considère encore une fonction

$$\rho_\gamma(\tau) \text{ telle que : } \rho_\gamma(\tau) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\tau}{\tau_{0\gamma}}\right)^{1/2}, & |\tau| < \tau_{0\gamma} \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Cette fonction satisfait aux conditions de Polya [5] et donc, étant une fonction caractéristique, permet de construire la fonction caractéristique infiniment divisible  $\Phi(\tau, \omega)$  donnée par la relation (4).

D'après (3) et (6) on obtient pour la densité spectrale de puissance de  $V$ , suivant les valeurs de  $\alpha$ , les expressions  $s_{V0}(\omega)$  rassemblées dans le tableau suivant :

$\alpha = 1$	$s_{V0}(\omega) \approx \frac{1}{\pi r (1 + (\frac{\omega}{r})^2)}$	$r = \frac{\gamma}{\tau_0}$
$\alpha = 2$	$s_{V0}(\omega) \approx \frac{1}{r\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{\omega}{r})^2}$	$r = \frac{\sqrt{\gamma}}{\tau_0}$
$\alpha = \frac{1}{2}$	$s_{V0}(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} T F \left\{ e^{-\sqrt{r} \tau } \right\}$	$r = \frac{\gamma^2}{\tau_0}$

Il est à noter que  $s_{V0}(\omega)$  aboutit à une forme gaussienne pour  $\alpha = 2$ , c'est-à-dire lorsque  $\rho(\tau)$  est deux fois dérivable à l'origine. On représente ci-dessous  $s_{V0}(\omega)$  pour différentes valeurs de  $\tau_0$  et  $\gamma$ , tel que le rapport  $r$  soit égal à 1/10, 1 et 10.

On remarque aussi que le paramètre  $r$  joue un rôle de contraction/dilatation spectrale de la densité spectrale de puissance. De l'augmentation de  $r$ , résulte un spectre de plus en plus étalé.

Soit  $\Delta s(\omega)$  la différence entre la densité spectrale de puissance réelle et celle obtenue avec l'hypothèse  $\gamma$  grand :  $\Delta s(\omega) = s_V(\omega) - s_{V0}(\omega)$ . Nous représentons ci-dessous  $\Delta s(\omega)$  pour un des modèles correspondant à  $\alpha = 2$ , par exemple  $\rho_3(t)$ .

Nous définissons donc l'erreur relative, telle que :

$$er = \sup_{\omega} \frac{|s_V(\omega) - s_{V0}(\omega)|}{s_{V0}(\omega)}$$

La figure suivante représente la décroissance de l'erreur relative en fonction de  $\gamma$ .

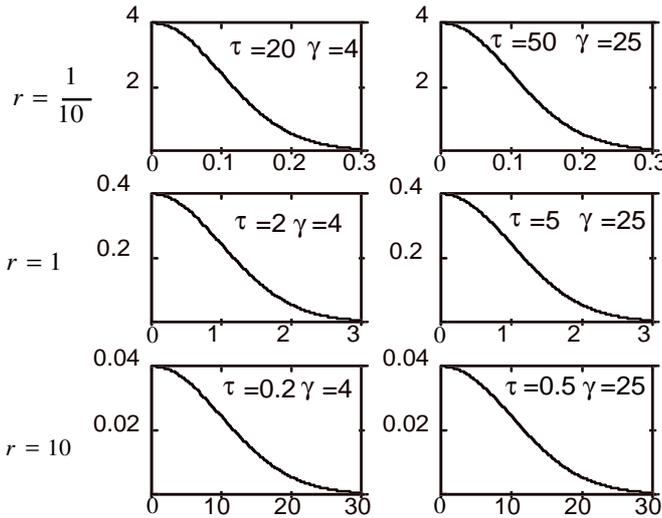


FIG. 8 — Représentation de  $s_v(\omega)$  pour  $r = \{1/10, 1, 10\}$

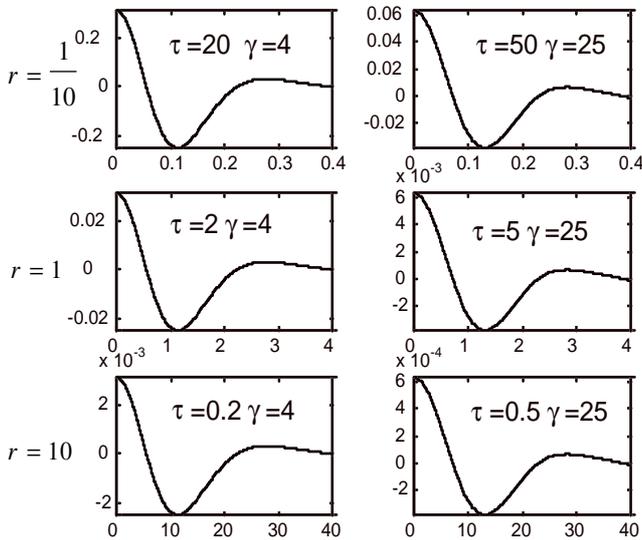


FIG. 9 —  $\Delta s(\omega)$  pour  $r = \{1/10, 1, 10\}$

### 5 Conclusion

Après propagation aléatoire on reçoit l'onde monochromatique émise, affaiblie en amplitude par  $|\Psi(\omega_0)|$ . L'énergie perdue se retrouve sous la forme d'un bruit  $V(t)$  dont la densité spectrale  $s_v(\omega)$  dépend, pour sa forme, du rayon de corrélation du retard représenté par le paramètre  $\tau_0$ . Dans le cas où  $\tau_0$  est très faible,  $s_v(\omega)$  est étalée autour de la fréquence de l'onde émise et dans le cas contraire on obtient un élargissement faible de la raie spectrale.

La puissance relative de  $V(t)$  dans la bande considérée décroît avec l'augmentation de  $\gamma$ .

Sous l'hypothèse d'un affaiblissement important de l'onde on remarque que la densité spectrale de puissance  $s_v(\omega)$  tend vers une forme qui dépend de  $\alpha$  lorsque  $\rho(\tau)$  est régulière et que le paramètre  $r$  influe sur la contraction/dilatation spectrale de  $s_v(\omega)$ .

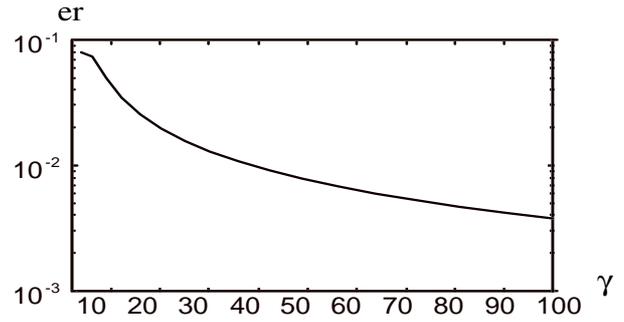


FIG. 10 — L'erreur relative en fonction de  $\gamma$

### Références

- [1] Lacaze B., Modifications de propagation dues aux retards aléatoires, Journal de Physique IV, Colloque C5, Sup. au J. de Phys., Vol. 4, (5-1994), p 1343-1346.
- [2] Lamperti J., Stochastic Processes, Springer-Verlag, 1977, p.43.
- [3] Gikhman I.I. and Skorokhod A.V., Introduction to the Theory of Random Processes, W.B.Saunders Company, London, 1965, p.18.
- [4] Flandrin P., Temps-frequence, Traité des Nouvelles Technologies, série Traitement du signal, Hermès, Paris, 1993, p.41.
- [5] E. Lukacs, Fonctions Caractéristiques, Théorie des probabilités, Dunod, Paris, 1964, p.74, 87.