Une classe de fonctions de Wigner adaptées à la description du rayonnement acoustique

Ahmed Bahlaoui et Jacqueline Bertrand

LPTMC, Université Paris VII, Case 7088, 75251 Paris Cedex 05
bahlaoui@ccr.jussieu.fr, bertrand@ccr.jussieu.fr

RÉSUMÉ

L'objet de cette communication est l'introduction d'une classe de fonctions de Wigner adaptées à la description de signaux acoustiques dépendant de deux variables, position et temps. Ces fonctions généralisent les distributions temps-fréquence affines de type $P_\varkappa$ et conduisent, en particulier, à représenter des signaux relevés sur une droite dans un espace à quatre dimensions (temps, position, fréquences spatiale et temporelle). La méthode de construction est fondée sur l'introduction d'un groupe de covariance adapté. Elle permet d'obtenir sous forme explicite des représentations d'espace des phases dont on peut étudier les propriétés de localisation.

ABSTRACT

The object of the communication is the introduction of a class of Wigner functions adapted to the description of acoustic signals depending on two variables, position and time. Such functions generalize the affine time-frequency distributions of the $P_\varkappa$ type and lead, in particular to a representation of signals recorded on a linear array in a four-dimensional space (time, position, spatial and temporal frequencies). The construction is founded on the introduction of a relevant covariance group. It yields explicit forms of phases space representations whose localization properties may be studied.

1 Introduction

Les méthodes temps-fréquence au sens large se sont développées rapidement ces dernières années [1, 2]. Elles permettent de décrire des signaux dépendant d'une variable qui peut être soit le temps (resp. position) soit la fréquence, dans un espace des phases comprenant à la fois le temps (resp. position) et la fréquence. De nombreuses solutions ont été proposées, suivant les propriétés privilégiées. Une contrainte qu'il est difficile d'ignorer est l'invariance de la procédure de construction par rapport aux choix d'origine et d'unité. Cette contrainte conduit à la classe affine de représentations temps-fréquence qui est covariante par les dilatations et translations de temps (resp. d'espace). Une propriété intéressante est aussi la faculté qu'ont certaines représentations temps-fréquence de se concentrer sur des courbes pour des types de signaux adaptés. La recherche systématique de telles représentations conduit à introduire une contrainte de covariance élargie qui permet de construire explicitement une classe de représentations $P_\varkappa$ dépendant d'un paramètre réel $\varkappa$ [3]. C'est ce type de représentations que nous voulons généraliser à des signaux dépendant de deux variables.

Quand on considère des signaux qui dépendent de plus d'une variable, de nouveaux problèmes surgissent. Tout d'abord, le groupe d'invariance va dépendre de façon cruciale du type de problème étudié. Par ailleurs la paramétrisation de l'espace des phases dans lequel le signal va être représenté doit être adapté au contexte physique. Dans la suite, on considère des signaux acoustiques $s(x, t)$ relevés en différents points d'une droite et on veut les décrire dans un espace des phases comprenant les fréquences temporelle et spatiale en plus de la position x et du temps t. Une telle étude peut permettre d'aborder le problème de la dédopplèrisation de signaux acoustiques provenant de sources en mouvement [4]. Comme il est bien connu, le groupe d'invariance adapté à l'acoustique est le groupe de Galilée que l'on complète par les dilatations pour prendre en compte les possibles changements d'unité. Ce groupe, même pour une dimension d'espace, a une structure non triviale et l'extension des méthodes de construction utilisées dans le cas du groupe affine n'est pas immédiate. La méthode tomographique a déjà permis d'obtenir une distribution unitaire et localisée qui est l'analogue de la fonction de Wigner usuelle [5]. Ici, on met en oeuvre la méthode de la covariance élargie et on construit explicitement toute une classe de fonctions de Wigner généralisées localisées. On étudie certaines de leurs propriétés et on montre qu'elles tendent toutes, sous certaines conditions, vers la fonction de Wigner usuelle.

2 Distributions invariantes par le groupe de Weyl-Galilée

Certaines techniques de prospection acoustique passive utilisent la mesure d'un signal $s(x, t)$ relevé sur un réseau linéaire en fonction du temps. Le signal étant réel, il est caractérisé par les valeurs de sa transformée de Fourier $\hat{s}(k, \omega)$ dans un demi-plan. On choisira ici de le décrire par un signal analytique défini par :

$$S(k, \omega) = H(k)\, \hat{s}(k, \omega)$$

avec

$$\hat{s}(k, \omega) = \iint_{\mathbb{R}^2} s(x, t) e^{2i\pi(kx-\omega t)}\, dx\, dt$$

et $H(k)$ = fonction de Heaviside. En pratique, l'expression du signal dépend de la calibration du réseau, c'est-à-dire, entre autres, du choix des origines et des unités dans l'espace-temps. De plus, des signaux relevés dans des repères en mouvement l'un par rapport à l'autre sont reliés par des transformations de Galilée pures. La détermination de l'ensemble de ces transformations est donc le premier objectif.

Un changement d'origine dans l'espace et le temps effectue une translation (ξ, τ) des coordonnées (x, t). Un changement d'unités conduit à une dilatation α de ces coordonnées. La même dilatation sera effectuée sur l'espace et le temps de façon à conserver la vitesse du son v_S. Finalement, un changement de repère inertiel se traduit par une translation de vitesse ν sur le repère utilisé pour l'observation. L'ensemble de ces transformations constitue le groupe de Weyl-Galilée WG qui est le groupe d'invariance principal agissant sur les signaux acoustiques. Un élément $g = (\alpha, \nu, \xi, \tau)$ du groupe WG transforme les coordonnées (x, t, k, ω) d'un point de l'espace des phases selon :

$$(x, t, k, \omega) \xrightarrow{g} (\alpha(x - \nu t) + \xi, \alpha t + \tau, \alpha^{-1}k, \alpha^{-1}(\omega - \nu k))$$

Après une telle transformation g, le signal $S(k, \omega)$ sera représenté par une nouvelle fonction selon :

$$S(k, \omega) \xrightarrow{g} \alpha^{r+2} e^{2i\pi(\xi k - \tau\omega)} S(\alpha k, \alpha(\omega + \nu k)) \tag{1}$$

Ces transformations laissent invariant le produit scalaire suivant :

$$(S_1, S_2) \equiv \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty S_1(k, \omega) S_2^*(k, \omega) k^{2r+2}\, dk d\omega$$

Il s'agit maintenant de représenter les signaux $S(k, \omega)$ par une pseudo-distribution Q sur l'espace (x, t, k, ω) qui soit une fonctionnelle quadratique de S. On la suppose définie par un noyau comme suit :

$$\begin{aligned} Q(x, t, k, \omega) = & \\ & \int_{\mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^2} K(x, t, k, \omega; k_1, \omega_1, k_2, \omega_2) \\ & \times S(k_1, \omega_1) S^*(k_2, \omega_2)\, dk_1 dk_2 d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \tag{2}$$

La contrainte principale sur la correspondance $S \to Q$ est la covariance par le groupe de Weyl-Galilée. Plus précisément, on exige que lorsque le signal est transformé selon (1), la distribution Q ne subisse, en dehors d'une éventuelle dilatation, qu'une transformation ponctuelle. La distribution Q se transformera donc selon :

$$\begin{aligned} & Q(x, t, k, \omega) \longrightarrow \\ & \alpha^q Q(\alpha^{-1}(x + \nu(t - \tau) - \xi), \alpha^{-1}(t - \tau), \alpha k, \alpha(\omega + \nu k)) \end{aligned} \tag{3}$$

où q est un paramètre réel. En écrivant explicitement cette contrainte de covariance sur la forme (2), on trouve la forme générale de la fonction Q. Elle est déterminé par une fonction arbitraire $\mathcal{K}$ de quatre variables qui doit être telle que la fonction Q est réelle. On a le résultat suivant :

***Théorème 2.1* —** *La forme générale de la pseudodistribution covariante par rapport aux transformations du groupe de Weyl-galilée pour un signal* $S \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$ *est donnée par :*

$$\begin{aligned} Q(x, t, k, \omega) = k^{2r+4-q} & \int \mathcal{K}(u_1, u_2, u_3, u_4) \\ \times e^{-2i\pi[(kx - \omega t)(u_1 - u_3) - kt(u_2 - u_4)]} & S(ku_1, ku_2 + \omega u_1) \\ \times S^*(ku_3, ku_4 + \omega u_3) & \, du_1\, du_2\, du_3\, du_4 \end{aligned}$$

où le domaine d'intégration est tel que : $(u_1, u_3) \in \mathbb{R}_+^2$, $(u_2, u_4) \in \mathbb{R}^2$ *et où* $\mathcal{K}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ *est un noyau vérifiant*

$$\mathcal{K}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \mathcal{K}^*(u_3, u_4, u_1, u_2)$$

que l'on choisira réel.

3 Méthode de covariance étendue

Pour déterminer explicitement le noyau $\mathcal{K}$ apparaissant dans le théorème 1, il faut mettre des conditions supplémentaires sur la correspondance $S \to Q$. En s'inspirant des résultats obtenus dans le cas du groupe affine [3], on choisit d'imposer une contrainte de covariance supplémentaire par rapport à des groupes à six paramètres contenant le groupe WG. Etudier systématiquement tous ces groupes serait un vaste programme, mais on va voir que l'on peut utiliser les résultats obtenus lors du plongement du groupe affine dans la famille de groupes résolubles $G_\varkappa$, $\varkappa$ réel.

En effet, le produit direct $A \times A$ de deux groupes affines est isomorphe au groupe de Weyl-Poincaré WP à une dimension d'espace [6]. Or, le groupe de Weyl-Galilée peut être obtenu par un processus limite (*contraction*) à partir du groupe de Weyl-Poincaré quand on fait tendre la vitesse de la lumière c vers l'infini. On a donc le schéma suivant :

$$A \times A \sim WP \quad \xrightarrow{c \to \infty} \quad WG \tag{4}$$

On va appliquer ce processus aux groupes $G_\varkappa \times G_\varkappa$ et ainsi déterminer une famille de groupes à six paramètres contenant WG.

Rappelons qu'un groupe $G_\varkappa$ de paramètres ($a_i > 0, b_i, c_i$ réels, $i = 1$ ou 2), agit sur des variables d'un espace des phases à deux dimensions (x_i, k_i), selon :

$$\begin{aligned} \varkappa \neq 0, 1 \qquad & x_i \longrightarrow a_i x_i + b_i + \varkappa c_i \left(\frac{k_i}{a_i}\right)^{\varkappa - 1} \\ \varkappa = 0 \qquad & x_i \longrightarrow a_i x_i + b_i + c_i \left(\frac{k_i}{a_i}\right)^{-1} \\ \varkappa = 1 \qquad & x_i \longrightarrow a_i x_i + b_i + c_i (1 + \ln(k_i/a_i)), \end{aligned} \tag{5}$$

et quel que soit la valeur $\varkappa$:

$$k_i \longrightarrow a_i^{-1} k_i$$

Pour expliciter l'isomorphisme entre $A \times A$ et le groupe de Weyl-Poincaré, on effectue un changement de paramétrisation du groupe en posant :

$$\begin{aligned} a_1 = \alpha \frac{(1 + \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad & b_1 = \frac{\xi}{c} - \tau \\ a_2 = \alpha \frac{(1 - \beta)}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad & b_2 = \frac{\xi}{c} + \tau \end{aligned} \tag{6}$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta \equiv \nu / c$.

L'action usuelle du groupe WP sera obtenue dans l'espace (x, t) dont les coordonnés sont définies par :

$$x = (c/2)(x_1 + x_2), \qquad t = (1/2)(x_2 - x_1) \tag{7}$$

Pour compléter l'espace des phases correspondant à WP, on définira aussi des variables k et ω par

$$k = (1/c)(k_1 + k_2), \qquad \omega = k_1 - k_2 \tag{8}$$

En étendant cette paramétrisation à $G_\varkappa \times G_\varkappa$ tout entier, on est conduit à définir de nouveaux paramètres (γ^+, γ^-) pour remplacer les paramètres c_i. Ils sont donnés par :

$$\gamma^+ = c^\varkappa \frac{c_1 + c_2}{2}, \qquad \gamma^- = c^{\varkappa-1}\frac{(c_2 - c_1)}{2} \tag{9}$$

On obtient ainsi une nouvelle description du groupe $G_k \times G_k$ et de son action sur l'espace (x_i, k_i) qui est équivalente à la description originelle tant que la constante c a une valeur finie. Si maintenant on fait tendre c vers l'infini, on obtient un nouveau groupe que l'on notera $E_\varkappa$. En effectuant explicitement dans (5) les changements de variables définis par (6,7,9) et la limite $c \to \infty$, on obtient l'action de $E_\varkappa$ sur les coordonnées (x, t). Le transformé (x', t') de (x, t) par un élement $g_0 = (\alpha, \nu, \xi, \tau, \gamma^+, \gamma^-)$du groupe $E_\varkappa$ est alors donné, suivant les valeurs de $\varkappa$ par :

Cas où $\varkappa \neq 0$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x - \nu t) + \xi \\ &\quad + \varkappa \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{\varkappa-1}\left(\gamma^+ + (1-\varkappa)\gamma^-\left(\frac{\omega}{k} - \nu\right)\right) \\ t' &= \alpha t + \tau + \varkappa\left(\frac{k}{\alpha}\right)^{\varkappa-1}\gamma^- \end{aligned}$$

Cas où $\varkappa = 0$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x - \nu t) + \xi + \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{-1}\left(\gamma^+ + \gamma^-\left(\frac{\omega}{k} - \nu\right)\right) \\ t' &= \alpha t + \tau + \left(\frac{k}{\alpha}\right)^{-1}\gamma^- \end{aligned}$$

Cas où $\varkappa = 1$

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(x - \nu t) + \xi + \gamma^+(1 + \ln(k/\alpha)) \\ t' &= \alpha t + \tau + \gamma^-(1 + \ln(k/\alpha)) \end{aligned}$$

On peut obtenir de la même manière la loi de transformation de (k, ω) définis en (8) :

$$k \longrightarrow k' = \alpha^{-1}k, \quad \omega \longrightarrow \omega' = \alpha^{-1}(\omega - \nu k) \tag{10}$$

Ayant ainsi la forme de la transformation des coordonnées (x, t, k, ω) par le groupe $E_\varkappa$, on en déduit la loi de transformation ponctuelle généralisant (3) que l'on va imposer à la fonction Q. Plus précisément, le tranformé de Q par l'élément $g_0 = (\gamma^+, \gamma^-)$ doit être égal à :

$$Q(x - \varkappa k^{\varkappa-1}(\gamma^+ + (1-\varkappa)\gamma^-(\omega/k)), t - \varkappa\gamma^- k^{\varkappa-1}, k, \omega) \tag{11}$$

pour $\varkappa \neq 0, 1$,

$$Q(x - k^{-1}(\gamma^+ + \gamma^-(\omega/k)), t - \gamma^- k^{-1}, k, \omega) \tag{12}$$

pour $k = 0$, et

$$Q(x - \gamma^+(1 + \ln k)), t - \gamma^-(1 + \ln k), k, \omega) \tag{13}$$

pour $k = 1$. Les représentations des groupes $E_\varkappa$ peuvent s'obtenir à partir des représentations des groupes $G_\varkappa \times G_\varkappa$ en utilisant le schéma (4). La partie correspondant à WG reste inchangée et la représentation des nouveaux paramètres s'écrit comme suit :

$\varkappa \neq 0, 1$

$$(U_\varkappa(\gamma^+, \gamma^-))S(k, \omega) = e^{-2i\pi k[k^{\varkappa-1}(\gamma^+ - \varkappa(\omega/k)\gamma^-)]}S(k, \omega) \tag{14}$$

$\varkappa = 0$ (15)

$$(U_0(\gamma^+, \gamma^-))S(k, \omega) = e^{-2i\pi[\gamma^+ \ln k - \gamma^-(\omega/k)]}S(k, \omega)$$

$\varkappa = 1$

$$(U_1(\gamma^+, \gamma^-))S(k, \omega) = e^{-2i\pi k[\gamma^+ \ln k - \gamma^-(\omega/k)(\ln k + 1)]}S(k, \omega) \tag{16}$$

On a maintenant tous les éléments pour appliquer la contrainte de *covariance étendue* en exigeant que, lors d'une transformation de signal $S(k, \omega)$ donnée par (14-16), la distribution Q donnée par le théorème 1 se transforme selon (11-13).

Théorème 3.1 — *La forme générale de la pseudo-distribution covariante par rapport aux transformations du groupe étendu $E_\varkappa$ contenant le groupe de Weyl-Galilée est donnée par :*

$$\begin{aligned} Q_\varkappa(x, t, k, \omega) = \\ k^{2r+3-q} \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{K}(u, u')\, e^{2i\pi[(xk - t\omega)(\lambda_\varkappa(u) - \lambda_\varkappa(-u))]} \\ e^{-2i\pi t[(\lambda_\varkappa(u)\sigma_\varkappa(u,u') - \lambda_\varkappa(-u)\sigma_\varkappa(-u,-u'))]} \\ S(k\lambda_\varkappa(u), \lambda_\varkappa(u)(\omega + \sigma_\varkappa(u, u'))) \\ S^*(k\lambda_\varkappa(-u), \lambda_\varkappa(-u)(\omega + \sigma_\varkappa(-u, -u')))\, du\, du' \end{aligned} \tag{17}$$

où S est un élément de l'espace $\mathfrak{D}(\mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R})$, $\mathcal{K}_\varkappa$ est une fonction positive, $\lambda_\varkappa$ et $\sigma_\varkappa$ sont des fonctions définies par les expressions suivantes :

$\varkappa \neq 0, 1$
$$\lambda_\varkappa(u) = \left(\varkappa \frac{e^{-u} - 1}{e^{-\varkappa u} - 1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$$
$$\sigma_\varkappa(u, u') = \frac{u'}{\varkappa - 1}\left(\frac{1 - \lambda_\varkappa(-u)^{\varkappa-1}}{e^u - 1}\right)$$

$\varkappa = 0$
$$\lambda_0(u) = \frac{ue^u}{e^u - 1}$$
$$\sigma_0(u, u') = \frac{u'}{u}(1 - \lambda_0(-u)),$$

$\varkappa = 1$
$$\lambda_1(u) = \exp\left(1 - \frac{u}{e^u - 1}\right),$$
$$\sigma_1(u, u') = \frac{u'}{1 - e^u}\ln(\lambda_1(-u)),$$

4 Propriétés

4.1 Unitarité

Soient $Q_{\varkappa,1}$ et $Q_{\varkappa,2}$ deux fonctions associées respectivement à S_1 et S_2 par le théorème 2. Un calcul direct montre que pour la fonction $\mathcal{H}_\varkappa$ donnée par :

$$\mathcal{H}(u, u') = (\lambda_\varkappa(u)\lambda_\varkappa(-u))^{r+2}$$

on a une propriété analogue à celle de Moyal :

$$\int Q_{\varkappa,1}(x, t, k, \omega)Q_{\varkappa,2}(x, t, k, \omega)k^{2q}\ dxdtdkd\omega = \left|(S_1, S_2)\right|^2$$

Une telle relation permet en particulier d'effectuer une régularisation covariante qui conduit à une analyse en ondelettes associée au groupe de Weyl-Galilée.

4.2 Marginalisation

L'intégrale de $Q_\varkappa$ sur l'espace-temps donne la relation :

$$\int Q_\varkappa(x, t, k, \omega)\ dxdt = k^{2r+2-q}\mathcal{H}(0, 0)\,|S(k, \omega)|^2$$

qui se réduit à la marginalisation usuelle pour $q = 2r + 2$ et $\mathcal{H}(0, 0) = 1$.

4.3 Localisation

Le principal intérêt de la contrainte de covariance par les groupes étendus $E_\varkappa$ est de permettre la construction de distributions d'espace des phases qui ont des propriétés de localisation. En effet, pour certaines valeurs de $\varkappa$, il est possible de déterminer la fonction $\mathcal{H}_\varkappa(u, u')$ pour que les distributions $Q_\varkappa$ correspondant aux signaux $e^{2i\pi(kx_0-\omega t_0)}$ soient concentrées sur les hypersurfaces définies par $x = x_0, t = t_0$. En appliquant alors la covariance étendue définie par (14-16) et(11-13), on obtient toute une famille de signaux localisés sur des hypersurfaces à deux dimensions. Par exemple, dans le cas $\varkappa = 0$, on sait que pour $\mathcal{H}_0(u, u') = (\lambda(u)\lambda(-u))^{r+2}$ les signaux

$$\Phi^{\tau_0\xi_0}_{\lambda_\alpha\lambda_\nu}(k, \omega) = k^{-r-2+2i\pi\lambda_\alpha}\ e^{-2i\pi\lambda_\nu\frac{\omega}{k}}\ e^{-2i\pi(\omega t_0-kx_0)}$$

avec $(\lambda_\alpha, \lambda_\nu)$ réels, sont représentés par [5] :

$$Q_0(x, t, k, \omega) = k^{-q-2}\times$$
$$\delta((x - x_0)k + (t - t_0)\omega - \lambda_\alpha)\,\delta((t - t_0)k - \lambda_\nu)$$

Il existe d'autres familles de signaux conduisant à des distributions concentrées dans l'espace des phases. En particulier, on peut montrer que les signaux

$$S_{k_0\omega_0}(k, \omega) \equiv k^{-r}\,\delta(k - k_0)\,\delta(\omega - \omega_0)$$
$$S_{\omega_0/k_0,x_0}(k, \omega) \equiv k^{-r-2}\delta(\tfrac{\omega}{k} - \tfrac{\omega_0}{k_0})\,e^{2i\pi x_0 k}$$

pour $\varkappa$ quelconque sont représentés respectivement par

$$Q_\varkappa(x, t, k, \omega) = k^{3-q}\delta(k - k_0)\,\delta(\omega - \omega_0)$$
$$Q_\varkappa(x, t, k, \omega) = k^{-2-q}\delta(\tfrac{\omega}{k} - \tfrac{\omega_0}{k_0})\,\delta(x - x_0 - t\tfrac{\omega_0}{k_0})$$

à condition que $\mathcal{H}(0, 0) = 1$.

4.4 Fonction de Wigner usuelle

Dans un champ lointain et lorsque le signal observé est à bande étroite, la contribution principale à l'intégrale (17) se situe autour de $u = u' = 0$. Un développement limité de $\lambda_\varkappa$ et $\sigma_\varkappa$ au premier ordre en u et u' donne :

$$W(x, t, k, \omega) = k^{2r+2-q}\int e^{-2i\pi(ux-u't)}$$
$$\times S(k + u/2, \omega + u'/2)S^*(k - u/2, \omega - u'/2)\ dudu'$$

qui n'est autre que la distribution de Wigner-Ville pour un signal dépendant de deux variables.

5 Conclusion

De par leur invariance par rapport au groupe de Weyl-Galilée, les représentations d'espace des phases obtenues sont particulièrement adaptées à l'analyse de signaux acoustiques. Les développements ci-dessus ont été faits pour le cas d'une application à des signaux relevés sur un réseau passif. Mais les résultats peuvent facilement être adaptés au cas du sonar.

Par ailleurs, ces distributions peuvent être considérées comme une approximation intermédiaire entre les distributions associées au groupe de Weyl-Poincaré, utilisées dans l'imagerie radar de cibles déformables [6], et la fonction de Wigner-Ville usuelle.

Références

[1] P.Flandrin, *Temps-Fréquence*, Hermès, Paris, 1993.

[2] L.Cohen, "Time-Frequency distributions-A Review", *Proc. IEEE*, pp. 941-981, 1989.

[3] J.Bertrand et P.Bertrand, "A class of affine Wigner functions with extended covariance properties", *J. Math. Phys.*, **33**, pp.2515-2527, 1992.

[4] B.Barsikow and W.F.King III, "On removing the Doppler frequency shift from array measurements of railway noise", J. Sound Vibration, **120**, pp.190-196 (1988).

[5] J.Bertrand et P.Bertrand, "Weyl-Galileo transformations and a related Wigner function", Proc. IEEE-SP International Symposium on *Time-Frequency and Time-Scale Analysis*, Paris, 1996.

[6] J.Bertrand et P.Bertrand, "Microwave imaging of time-varying radar targets", Inverse Problems, juin 1997.