

# Mesure et caractérisation de mouvements fluides 2D à partir d'une seule image

Mariette Maurizot, Patrick Bouthemy, Bernard Delyon

IRISA/INRIA

Campus universitaire de Beaulieu

35042 Rennes Cedex

e-mail : <nom>@irisa.fr

## RÉSUMÉ

Nous nous intéressons à l'analyse spatio-temporelle du mouvement fluide 2D dans des images numériques. La considération de modèles linéaires peut généralement permettre l'interprétation qualitative d'un tel champ de vecteurs de vitesse 2D à condition que ces approximations au premier ordre soient considérées sur un voisinage approprié des points dits singuliers, (i.e. des points où la vitesse est nulle). Localiser les points singuliers, délimiter ces voisinages, et estimer les modèles de mouvement 2D associés sont des problèmes imbriqués. Nous proposons une méthode pour résoudre ces trois problèmes s'appuyant sur une approche statistique adaptative. Nous avons traité des images visualisant la propagation de fumées ou le déplacement de particules dans un fluide en mouvement. Nous proposons différents estimateurs du modèle de mouvement qui n'utilisent qu'une seule image, puisque l'information de mouvement est contenue soit dans la forme visualisée, soit dans les traits perceptibles dans l'image (portions de trajectoire).

## ABSTRACT

We are concerned with the spatio-temporal analysis of 2D fluid motion from numerical images. The interpretation of such deformable 2D flow fields can generally be stated as the characterization of linear motion models provided that first order approximations are considered in an adequate neighborhood of so-called singular points where the velocity becomes null. However, locating such points, delimiting this neighborhood, and estimating the associated 2D affine motion model, are intricate difficult problems. We propose an efficient method based on a statistical adaptive technique which explicitly addresses these three joint problems and exploits only one single image at each instant. We deal with particle streak velocimetry images and images visualizing flow seeded with smoke. Motion can be inferred from a single image since the visualized form accounts for the underlying motion.

## 1 Introduction

L'image numérique est une voie d'investigation de plus en plus pertinente pour l'étude de phénomènes physiques impliquant des mouvements de fluides. L'analyse du mouvement fluide 2D s'avère ainsi être un problème important à étudier. La considération de modèles linéaires peut généralement permettre l'interprétation qualitative d'un tel champ de vecteurs de vitesse 2D à condition que ces approximations au premier ordre soient considérées sur un voisinage approprié des points dits singuliers, (i.e. des points où la vitesse est nulle) [1, 2]. Sur un tel voisinage, le mouvement est alors modélisé par une équation différentielle du type :  $\dot{X} = AX + B$  où  $\dot{X}$  est le vecteur vitesse au point  $X = (x, y)^T$ . La caractérisation du mouvement, à travers l'étude de la matrice  $A$  et de ses valeurs propres, nécessite donc à la fois de localiser de tels points singuliers, de définir le voisinage sur lequel l'approximation au premier ordre est valide, et d'identifier le modèle du mouvement. Ces problèmes sont bien sûr intrinsèquement couplés. Nous avons déjà proposé une méthode de résolution lorsque le mouvement est estimé à partir de deux images successives par l'exploitation des gradients spatio-temporels de la fonction intensité [3], et le recours à une technique d'estimation robuste multirésolution et incrémentale de modèles affines de

mouvement [4]. Ici, nous nous intéressons à la caractérisation du mouvement à partir d'une seule image. En effet, l'approche précédente ne permet pas d'appréhender des mouvements de très forte amplitude accompagnés de déformation significative. Ce type de situations se rencontre en visualisation expérimentale de fluides. Nous avons traité des images représentant des filets d'émission, ainsi que des images correspondant à des traces de particules placées dans le fluide étudié (en anglais Particle Streak Velocimetry) et que nous désignons par images de PSV. Nous proposons une méthode permettant de calculer le modèle linéaire associé au mouvement sous-jacent à partir d'une seule image puisque l'information de mouvement est contenue soit dans la forme visualisée pour les premiers cas, soit dans les traits perceptibles dans l'image matérialisant des portions de trajectoire pour les images de PSV.

## 2 L'équation du mouvement

Nous posons que le champ de vitesse instantané induit par le modèle de mouvement 2D doit être tangent à la forme observée, c'est à dire orthogonal au champ des gradients spatiaux de l'intensité avec l'hypothèse que les contours des

formes perçues sont des isophotes. Si l'on suppose que le mouvement correspond exactement à un modèle affine et qu'il y a une absence de bruit sur les données,  $\nabla I(X)^T = (I_x, I_y)$  exprimant le gradient spatial de l'intensité au point  $X^T = (x, y)$  de l'image, nous pouvons alors écrire l'équation suivante :

$$\nabla I^T(X) \dot{X}_\Theta = \nabla I^T(X)(AX + B) = \Gamma_X^T \Theta = 0 \quad (1)$$

où  $\Theta^T = (b_1, a_1, a_2, b_2, a_3, a_4)$  si  $B^T = (b_1, b_2)$  et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, \text{ et } \Gamma_X^T = (I_x, I_x x, I_x y, I_y, I_y x, I_y y).$$

L'équation (1) doit être vérifiée pour tous les points qui correspondent soit à un point du contour de la forme pour les images de filets d'émission, soit à un point des traits pour les images de PSV. Cette équation doit être en pratique vérifiée pour tous les points  $X$  dont le gradient spatial d'intensité est assez grand, c'est à dire tel que  $\|\nabla I(X)\| \geq \mathcal{L}$ , où  $\mathcal{L}$  est un seuil fixé par l'utilisateur.

### 3 Estimation par moindres carrés

La valeur optimale des paramètres de mouvement, notée  $\hat{\Theta}$ , doit vérifier, sur un support d'estimation  $F$  correctement choisi, la relation suivante :

$$\sum_{X \in F} \Gamma_X \Gamma_X^T \hat{\Theta} = M_F^{(1)} \hat{\Theta} = 0_{\mathcal{R}^6} \quad (2)$$

$0_{\mathcal{R}^6}$  est le vecteur de coordonnées nulles de  $\mathcal{R}^6$ .

Nous cherchons en fait la valeur propre minimale de la matrice  $M_F^{(1)}$ . Le modèle de mouvement recherché correspondra alors au vecteur propre de norme unitaire associé à cette valeur propre.

Cette première approche ne fournit un estimé de bonne qualité que si les points considérés pour l'estimation sont tous des points du contour de la forme. Le seuil  $\mathcal{L}$ , qui permet d'accepter ou non un point, doit donc être adéquatement choisi. De plus la fenêtre étudiée doit contenir le moins possible de points parasites. Enfin, les gradients spatiaux de l'intensité que nous calculons à l'aide de masques [5] sont considérés comme étant les vraies valeurs de ces gradients, or ce ne sont que des approximations.

Aussi, pour ne pas être trop pénalisés par quelques points aberrants ou des mesures trop bruitées du gradient spatial de l'intensité, nous avons développé trois autres techniques d'estimation : une estimation pondérée, une technique multi-échelle, une version avec estimation du bruit de mesure sur les gradients de l'intensité.

### 4 Un estimateur pondéré

L'équation (1) de contrainte d'orthogonalité doit être vérifiée pour tous les points qui correspondent soit à un point du contour de la forme pour les images de filets d'émission, soit à un point des traits pour les images de PSV. Pour éliminer les points de gradient spatial d'intensité important, mais situés

à l'intérieur de la forme visualisée, et amoindrir les erreurs dues à une mauvaise estimation du gradient spatial de l'intensité dans l'image, nous proposons d'effectuer une pondération de ces gradients. Ainsi, les points où l'équation (1) est mal vérifiée verront leur influence amoindrie dans le schéma d'estimation. Nous avons construit un schéma itératif d'estimation des paramètres de mouvement. À l'itération  $i$ , le vecteur de paramètres de mouvement  $\hat{\Theta}_i$  est estimé à l'aide de la matrice définie par l'équation (3) :

$$M_F^{(2)} = \sum_{X \in F} w_X^i \Gamma_X \Gamma_X^T \quad (3)$$

où  $w_X^1 = 1$  et  $w_X^i = 1 / ((\Gamma_X^T \hat{\Theta}_{i-1})^2 + 1)$  pour  $i > 1$  (nous rajoutons 1 à l'erreur pour n'avoir aucun dénominateur nul). La convergence a lieu lorsque le vecteur de paramètres de mouvement estimé reste stable d'une itération à l'autre.

## 5 Une estimation multi-échelle

Certains phénomènes liés aux conditions d'acquisition des images pour des expériences réelles peuvent affecter le calcul du champ de gradient spatial de l'intensité, et ainsi engendrer des erreurs sur l'estimation du modèle de mouvement. Par exemple, l'illumination de la scène peut ne pas être uniforme, ou les filets d'émission peuvent ne pas être d'intensité lumineuse homogène à cause de la dissipation de la fumée. Pour atténuer ces phénomènes, nous utilisons une version multi-échelle de l'estimateur. Nous considérons plusieurs versions lissées de l'image, ces images étant obtenues à l'aide de filtres passe-bas gaussiens de variance croissante. L'intérêt de cette approche est de faire implicitement ressortir la forme principale à l'échelle la plus grossière, et ainsi d'avoir une première estimation rudimentaire mais robuste du modèle de mouvement. Cette première estimation est alors affinée à travers les échelles plus fines. L'estimation déterminée à l'échelle précédente est utilisée pour initialiser l'estimation du mouvement à l'échelle suivante (plus fine) dans le schéma itératif décrit plus haut.

L'estimateur multi-échelle ne sera appliqué qu'à des images de filets d'émission. En effet, l'épaisseur des traits présents dans les images de PSV est trop faible pour que l'on puisse appliquer efficacement cette seconde méthode.

## 6 Estimation conjointe du mouvement et des gradients d'intensité

Nous voyons dans l'équation (2) que de petites perturbations sur la valeur du gradient de l'intensité peuvent avoir un impact sur l'estimation du modèle de mouvement. Ces gradients étant estimés, il existe donc des erreurs sur leur mesures que nous allons explicitement prendre en compte. Nous proposons d'estimer ces erreurs conjointement au modèle de mouvement, et par contre coup d'améliorer l'estimation de ce dernier.

Soit  $\Theta^*$  le vrai modèle de mouvement, et  $\Gamma_X^*$  la valeur de  $\Gamma_X$  au point  $X$  pour les vraies valeurs du gradient de

l'intensité. Nous pouvons alors décomposer  $\Gamma_X^*$  en une partie orthogonale à  $\Theta^*$ , que nous noterons  $O_{\Theta^*}$ , et en un bruit additif parallèle à  $\Theta^*$  d'amplitude  $\varepsilon_{m,X}$  qui est le bruit de modèle :

$$\Gamma_X^* = O_{\Theta^*} + \varepsilon_{m,X} \Theta^*. \quad (4)$$

$\Gamma_X$  est une valeur bruitée de  $\Gamma_X^*$ . Le bruit est dû à un calcul approché de la valeur des gradients spatiaux de l'intensité.  $\Gamma_X$  peut alors s'écrire :

$$\Gamma_X = \Gamma_X^* + \varepsilon_{1,X} G_{1,X} + \varepsilon_{2,X} G_{2,X}. \quad (5)$$

où  $\varepsilon_{1,X}$  représente le bruit sur la coordonnée en  $x$  du gradient spatial de l'intensité au point  $X = (x, y)^T$ , et  $\varepsilon_{2,X}$  le bruit sur la coordonnée en  $y$ ,  $G_{1,X}^T = (1, x, y, 0, 0, 0)$  et  $G_{2,X}^T = (0, 0, 0, 1, x, y)$ .

L'estimation de la valeur optimale du modèle de mouvement  $\Theta^*$  et de la valeur du gradient d'intensité  $\Gamma_X^*$  sont liées. Aussi sont ils estimés à l'aide d'une technique de minimisation itérative alternée. Si  $\Theta^*$  est connu, le résultat de la minimisation conjointe des trois bruits  $\varepsilon_{1,X}$ ,  $\varepsilon_{2,X}$  et  $\varepsilon_{m,X}$ , de variances respectives  $\sigma_1^2$ ,  $\sigma_2^2$ ,  $\sigma_m^2$ , est le suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{k,X} &= \frac{\Gamma_X^T \Theta^* G_{k,X}^T \Theta^* \sigma_k^2}{\sigma_1^2 (G_{1,X}^T \Theta^*)^2 + \sigma_2^2 (G_{2,X}^T \Theta^*)^2 + \sigma_m^2} \quad k = 1, 2 \\ \varepsilon_{m,X} &= (\Gamma_X - \varepsilon_{1,X} G_{1,X} - \varepsilon_{2,X} G_{2,X}) \Theta^{*T} \end{aligned} \quad (6)$$

Dans le processus itératif, le calcul de ces bruits se fera à l'aide de l'estimée courante du modèle de mouvement. Le processus est initialisé par l'estimation d'un premier vecteur de paramètres de mouvement  $\hat{\Theta}_1$  à l'aide de la matrice  $\sum_{X \in F} \Gamma_X \Gamma_X^T$ . La première minimisation du bruit de mesure sur le gradient spatial de l'intensité est effectuée à partir de cette première estimation, et nous estimons  $\varepsilon_{1,X}^1$ ,  $\varepsilon_{2,X}^1$ ,  $\varepsilon_{m,X}^1$  pour tous les points de la fenêtre d'estimation (éq. 6 en remplaçant  $\Theta^*$  par  $\hat{\Theta}_1$ ). À l'itération  $i + 1$ ,  $\hat{\Theta}_{i+1}$  est calculé à l'aide de la matrice

$$M_F^{(3)} = \sum_{X \in F} \hat{\Gamma}_X^i (\hat{\Gamma}_X^i)^T \quad (7)$$

où  $\hat{\Gamma}_X^i = \Gamma_X - \varepsilon_{1,X}^i G_{1,X} - \varepsilon_{2,X}^i G_{2,X}$ . La nouvelle valeur du modèle de mouvement permet de ré-estimer les nouvelles valeurs des bruits de mesure :  $\varepsilon_{1,X}^{i+1}$ ,  $\varepsilon_{2,X}^{i+1}$ ,  $\varepsilon_{m,X}^{i+1}$ . Nous ré-itérons le processus jusqu'à obtenir la convergence (lorsque les paramètres estimés du mouvement restent stables).

## 7 Calcul de l'incertitude sur l'estimation du mouvement

De façon générale, nous notons  $M_F$  la matrice introduite pour estimer le mouvement. Selon le schéma d'estimation utilisé,  $M_F$  sera égale à  $M_F^{(1)}$ ,  $M_F^{(2)}$ , ou  $M_F^{(3)}$  (éq. 2, 3, 7). Une valeur propre minimale de la matrice  $M_F$  proche mais différente de 0 implique des erreurs sur les paramètres de mouvement estimés. À partir de cette erreur  $\Delta \hat{\Theta}$  nous pouvons dériver une approximation de l'incertitude sur la position du point singulier, position déduite de l'estimation du modèle de mouvement dans la fenêtre d'estimation courante. Cette dernière incertitude est utilisée dans l'algorithme du choix de la taille

de la fenêtre d'estimation comme décrit dans [3].

$\hat{\Theta}$  est le vecteur propre associé à la plus petite valeur propre  $\lambda_{min}$  de  $M_F$  nous avons donc la relation :

$$\lambda_{min} \hat{\Theta} = M_F \hat{\Theta}. \quad (8)$$

Cette équation nous permet d'obtenir la valeur de l'erreur commise sur les paramètres de mouvement :

$$\Delta \hat{\Theta} = (M_F - \lambda_{min} I_6)^+ (\Delta \lambda_{min} I_6 + \Delta M_F) |\hat{\Theta}|_6 \quad (9)$$

où  $I_6$  est la matrice identité  $6 \times 6$ ,  $(M_F - \lambda_{min} I_6)^+$  est la pseudo-inverse de la matrice  $M_F - \lambda_{min} I_6$ , celle-ci étant singulière. La notation  $|\cdot|_6$  pour un vecteur signifie que les coordonnées de ce vecteur ne sont pas signées.

Si l'on n'estime pas le bruit sur la mesure des gradients, alors l'erreur sur  $M_F$  est nulle. Dans le cas contraire,  $\Delta M_F$  s'exprime de manière simple en fonction de  $X$  et des différents bruits estimés. De plus  $\Delta \lambda_{min}$  est égal à la valeur absolue de  $\lambda_{min}$  car sa valeur optimale est zéro.

## 8 Localisation et suivi des points singuliers

Le point singulier correspondant au mouvement affine vérifie  $\dot{X} = -A^{-1}B$ , c'est le point où la vitesse est nulle. Nous avons conçu une méthode performante, basée sur une approche statistique et adaptative, permettant de localiser, caractériser (en terme de centre, nœud spiralé, point de selle, etc...) et suivre ces points singuliers dans une séquence d'images [3]. La méthode statistique définie permet de localiser les points singuliers en adaptant convenablement et itérativement la position et la taille de la fenêtre d'estimation  $F$  en fonction des erreurs faites sur la localisation du point singulier. Ces erreurs sont calculées à partir des erreurs  $\Delta \hat{\Theta}$  faites sur l'estimation  $\hat{\Theta}$  du modèle de mouvement pour l'itération courante de l'algorithme de recherche des points singuliers.

Un critère de type biais-variance sur la position du point singulier est introduit. L'algorithme évolue de manière itérative : à chaque étape, on détermine, tour à tour, la nouvelle position, puis, la taille de la fenêtre de calcul. L'estimation optimale est atteinte lorsque le centre de la fenêtre se trouve le plus proche possible du point critique à estimer, la fenêtre englobant la plus grande partie possible du champ des vitesses pouvant être considérée comme linéaire. Cette méthode de localisation permet également de suivre ces points singuliers au cours du temps dans une séquence d'images. Les fenêtres initiales d'estimation utilisées pour suivre les points singuliers à l'instant  $t + 1$  sont les fenêtres finales d'estimation validées à l'instant  $t$ .

## 9 Résultats

La méthode présentée dans cet article ne demande pas le calcul d'un champ dense de vecteurs de vitesse. Le mouvement, à un instant donné, est directement estimé à l'aide des valeurs de l'intensité dans l'image étudiée. Les différents

schémas d'estimation du mouvement ont été validés sur des séquences d'images réelles d'écoulement de fluides fournies par le Laboratoire d'Études Aérodynamiques de Poitiers (voir les figures). Nous présentons des résultats sur les deux types d'images étudiées.

Les séquences d'images représentent la naissance d'un écoulement en aval d'un cylindre. Les images de filets d'émission (Fig.1a) sont acquises à l'aide d'un banc expérimental qui permet de visualiser, à l'aide d'un éclairage par un plan laser, les filets d'émission de fumée créés par l'écoulement d'un fluide (les deux points d'émission sont situés de part et d'autre du cylindre). Sur ces images de filets d'émission, la forme perçue rend compte du mouvement sous-jacent du fluide. Elle matérialise les chemins suivis par les fumées dans le fluide. Dans les images de PSV [6] (Fig.2a), les traits visibles dans l'image correspondent à des portions des trajectoires des particules placées dans le fluide en mouvement, la longueur des traits dépend du temps d'exposition du film et de la vitesse de l'écoulement étudié. Nous présentons ici des résultats obtenus à l'aide de l'estimation conjointe du mouvement et des gradients d'intensité. Le choix du schéma d'estimation dépend de la qualité des images étudiées, de la précision de l'estimation demandée, ainsi que d'une éventuelle contrainte sur le temps de calcul.

## Références

- [1] R.M. Ford, R.N. Strickland and B.A. Thomas, Image models for 2-D flow visualization and compression. *CVGIP : Graphical Models and Image Processing*, Vol.56, No.1, jan., pp 75-93, 1994.
- [2] C. Shu and R.C. Jain, Direct estimation and error analysis for oriented patterns, *CVGIP : Image Understanding*, Vol.58, No.3, pp.383-398, 1993.
- [3] M. Maurizot, P. Boutheymy, B. Delyon, A. Iouditski, J-M. Odobez, Determination of singular points in 2D deformable flow fields, *2<sup>nd</sup> IEEE Int. Conf. on Image Processing*, Washington, vol.III, pp. 488-491, oct. 1995.
- [4] J.M. Odobez and P. Boutheymy, Robust multiresolution estimation of parametric motion models *J. of Visual Communication and Image Representation*, Vol.6, No.4 pp. 348-365, dec. 1995.
- [5] T. Vieville, O. Faugeras, Robust and fast computation of unbiased intensity derivatives in images. *2<sup>nd</sup> Euro. Conf. on Computer Vision*, S.Margherita, pp. 203-212, mai 1992.
- [6] L. David, A. Texier, Application of a particle streak velocimetry technique to unsteady flow study. *FLUMECOM'94 (4th Int. Symp. on Fluid Control, Measurement, Mechanics, Visualization, Fluidics)*, Toulouse, Vol.I, pp. 515-519, août 1994.

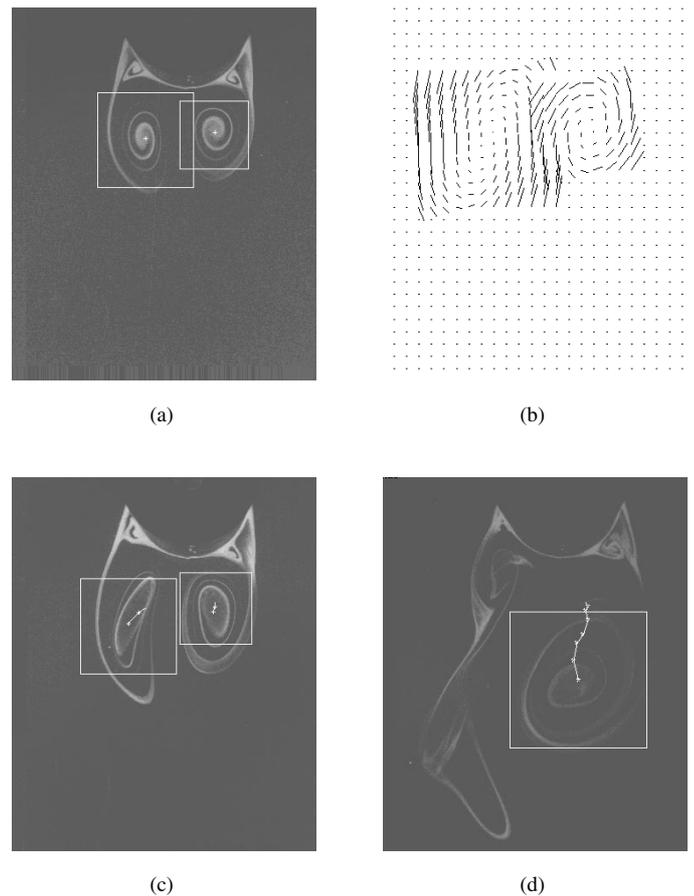


FIG. 1 — (a) Une image de filets d'émission, la 1<sup>ère</sup> image de la séquence, sur laquelle nous avons tracé les fenêtres finales d'estimation et les points critiques correspondants. (b) Les sous-champs associés aux modèles de mouvement affine estimés sur l'image pour les deux points détectés. (c) La 3<sup>ème</sup> image de la séquence sur laquelle nous avons tracé les trajectoires estimées des deux points critiques suivis au cours du temps, et les fenêtres finales d'estimation définies à cet instant. (d) Mêmes résultats qu'en (c), mais pour la 8<sup>ème</sup> image de la séquence. On constate qu'un seul point singulier a été suivi, l'autre s'étant "défait" (phénomène de "lâchage").

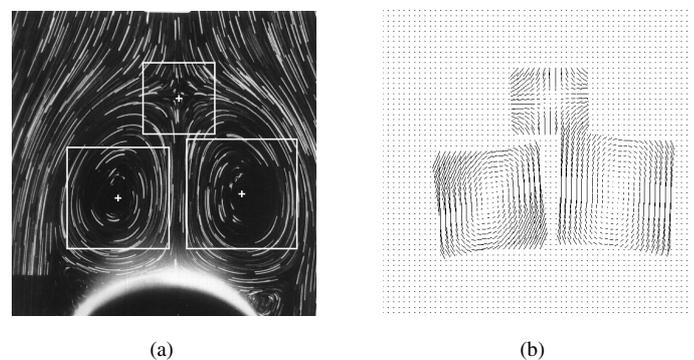


FIG. 2 — (a) Une image de PSV, sur laquelle ont été tracées les fenêtres finales d'estimation et les points singuliers estimés associés (les croix). (b) Les sous-champs correspondant aux modèles de mouvement affine estimés pour les trois points détectés.