

Reconstruction d'images dégradées par la turbulence atmosphérique en utilisant les statistiques d'ordre supérieur

Cécile HUET, Yann FUSELIER et Joël LE ROUX

I3S, Université de Nice Sophia Antipolis - CNRS
250 rue Albert Einstein Sophia Antipolis 06560 Valbonne FRANCE
Tel: 04.92.94.26.82; fax: 04.92.94.28.96
huet@alto.unice.fr - leroux@alto.unice.fr

RÉSUMÉ

Cet article présente quelques résultats concernant le problème de la reconstruction d'images lorsque celles-ci sont brouillées lors de leur observation à travers un milieu fluctuant. Nous précisons les conditions dans lesquelles les algorithmes fondés sur la théorie des statistiques d'ordre supérieur peuvent être utilisés à bon escient ou non. Ceci se traduit par une contrainte de factorisabilité sur les spectres d'ordre supérieur des signaux étudiés, contrainte exprimant la linéarité de l'effet du processus perturbateur. A la lumière de cette considération nous proposons un critère permettant de vérifier si la déformation subie par l'image est une déformation linéaire ou si au contraire elle présente des nonlinéarités significatives. Nous proposons aussi un algorithme résistant bien au bruit d'estimation des spectres dans le cas où l'hypothèse de linéarité est suffisamment bien vérifiée.

ABSTRACT

This paper presents some results concerning the problem of images reconstruction when they are blurred by the observation through a fluctuating medium. We specify the conditions under which the algorithms based on Higher Order Statistics can be used judiciously. These conditions are expressed as a factorisability constraint on the higher order spectra of the analysed signals. This constraint expresses the linearity of the perturbing process effects. In the light of this remark, we propose a criterion in order to check whether the image distortion is linear or if it presents significant nonlinearities. We also propose an algorithm resisting correctly in the presence of estimation noise when the linearity hypothesis is sufficiently satisfied.

1 Introduction

Depuis maintenant une dizaine d'années, grâce en particulier au travail de Lohmann, Weigelt et de de Wirmitzer [4], l'utilisation des spectres d'ordre supérieur permet en principe de résoudre le problème de la perturbation des images astronomiques lors de l'observation à travers les couches mouvantes de l'atmosphère. L'hypothèse implicite fondamentale justifiant l'application de ces méthodes est que la déformation de l'image par le milieu est une déformation linéaire statistiquement invariante dans l'espace. Cela veut dire que les conditions d'application du théorème de Zernike-VanCittert [6] doivent être suffisamment bien vérifiées. En particulier, une fonction sinusoidale bidimensionnelle, une "tôle ondulée" de fréquence et d'orientation données, doit conserver sa fréquence et son orientation, et n'être déformée que par translation(déphasage) ou amplification. Il est intéressant de noter que la validité de cette hypothèse peut être testée a posteriori sur les spectres d'ordre supérieur des signaux mesurés. Ce test de linéarité est une extension de la technique proposée par Marron, Sanchez et Sullivan [8] et se traduit par le théorème suivant. Soit un spectre de cumulants d'ordre N pair calculé comme une moyenne de produits de transformées de Fourier dont on retranchera les termes appropriés pour passer des moments aux cumulants.

$$S_N(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}) = \quad (1)$$

$$E \left\{ \left[\prod_{p=1}^{N/2} X(\omega_p) \right] \left[\prod_{q=\frac{N}{2}+1}^{N-1} X^*(-\omega_q) \right] X^* \left(\sum_{r=1}^{N-1} \omega_r \right) \right\}$$

Le cas où N est impair s'obtient en forçant une des variables à zéro dans la formule précédente. On supposera que le nombre de mesures est suffisant pour que la moyenne soit obtenue avec précision. L'hypothèse de linéarité de l'effet de la perturbation se traduit par la factorisation suivante du spectre.

$$S_N(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1}) = \quad (2)$$

$$\left[\prod_{p=1}^{N/2} H(\omega_p) \right] \left[\prod_{q=\frac{N}{2}+1}^{N-1} H^*(-\omega_q) \right] H^* \left(\sum_{r=1}^{N-1} \omega_r \right)$$

On peut montrer que cette factorisation est possible [7], c'est à dire que le spectre d'ordre N est compatible avec l'hypothèse de linéarité si et seulement si $S_N(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{N-1})$ vérifie les symétries spectrales d'ordre supérieur, ce qui est en général le cas par construction ainsi que la condition suivante :

$$\frac{S_N(u + \sum_{p=1}^{N-2} \omega_p, v_1, \dots, v_{N-2}) S_N(u, \omega_1, \dots, \omega_{N-2})}{S_2(u + \sum_{p=1}^{N-2} \omega_p)} = \frac{S_N(u + \sum_{p=1}^{N-2} \omega_1, \dots, \omega_{N-2}) S_N(u, v_1, \dots, v_{N-2})}{S_2(u + \sum_{p=1}^{N-2} v_p)} \quad (3)$$

pour une valeur arbitraire du vecteur (v_1, \dots, v_{N-2}) dont le choix nécessite cependant quelques précautions. Dans cette équation, $S_2(u)$ est le spectre d'ordre 2. Notons que cette identité ne suppose pas de déroulement préalable de la phase. Si cette identité est satisfaite, n'importe quel algorithme de reconstruction spectrale d'ordre supérieur comme celui de Lohmann permet de retrouver la transformée de Fourier de l'image. Ces algorithmes résistent plus ou moins bien aux erreurs d'estimation du spectre d'ordre supérieur. Dans la suite nous en proposons un qui est significativement moins sensible au bruit que celui de Lonmann et qui a, tout comme ce dernier, l'intérêt de ne pas poser de problèmes de déroulement de phase. Il est important de noter que la contrainte de factorisabilité est une contrainte assez forte et qu'en présence de bruit de mesure, une approche prometteuse est de rechercher le spectre d'ordre supérieur vérifiant les conditions de factorisabilité qui est le plus proche du spectre mesuré. Nous suggérons la méthode suivante qui semble fonctionner en pratique mais qui ne garantit pas l'obtention d'un minimum absolu de la distance entre le trispectre mesuré et le trispectre estimé. Le risque d'obtention d'un minimum local n'est pas nul. On s'intéresse en pratique aux phases des spectres d'ordre quatre. Pour toutes les valeurs du vecteur $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, on remplace la phase du trispectre par une moyenne calculée au sens des phaseurs de telle sorte que la nouvelle estimation des phases du trispectre soit plus proche d'une phase de trispectre factorisable :

$$\psi_4^{(k+1)}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \arg \left(\sum_{v_1=0}^{N-1} \sum_{v_2=0}^{N-1} \left[e^{j\psi_4^{(k)}(\omega_1, v_1, v_2)} e^{j\psi_4^{(k)}(\omega_1+v_1+v_2, \omega_2, \omega_3)} e^{-j\psi_4^{(k)}(\omega_1+\omega_2+\omega_3, v_1, v_2)} \right] \right) \quad (4)$$

où ψ_4 est la phase du trispectre.

Cette opération est répétée jusqu'à ce que les valeurs de phases se stabilisent et on applique au résultat une méthode de factorisation comme celle du paragraphe suivant.

2 Algorithmes

Dans cette section, nous décrivons les algorithmes de reconstruction de la phase du signal, $\varphi(\omega)$, à partir de la phase du bispectre ($\Psi_3(\omega_1, \omega_2)$) ou du trispectre ($\Psi_4(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$) mesurée.

2.1 Statistiques d'ordre 3

- Algorithme de reconstruction "multirésolution"

Dans le cas monodimensionnel, cet algorithme s'écrit :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0;$$

(à la fréquence d'échantillonnage et ses multiples),

Pour $n = 1, \dots, \log_2 N$,

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} \left[\Psi_3(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}) + \varphi(\frac{1}{2^{n-1}}) \right]; \\ \text{Pour } k = 1, \dots, 2^{n-1} - 1, \\ \varphi(\frac{2k+1}{2^n}) = -\Psi_3(\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}) + \varphi(\frac{k}{2^{n-1}}) + \varphi(\frac{1}{2^n}). \end{array} \right.$$

Comparativement à l'algorithme classique de Lohmann, Weigelt et Wirtzner [4], l'erreur accumulée au cours des

itérations est réduite [2]. L'extension dans le cas bidimensionnel est directe [5]. Notons que cet algorithme ne nécessite pas de déroulement de phase [2][3].

2.2 Statistiques d'ordre 4

Nous décrivons dans ce paragraphe l'extension à l'ordre quatre de l'algorithme de reconstruction "multirésolution". Les méthodes de reconstruction des images dégradées par la turbulence atmosphérique utilisent les statistiques d'ordre trois, nous avons ici développé une méthode de reconstruction utilisant l'ordre quatre pour la raison suivante : les statistiques d'ordre trois d'un signal s'annulent si la densité de probabilité associée à ce signal est symétrique, alors que les statistiques d'ordre quatre d'un tel signal ne sont pas nulles. Toutefois, toute l'information contenue dans le bispectre (spectre d'ordre 3) est incluse dans le trispectre (spectre d'ordre 4) ; cependant, l'estimation du trispectre nécessite plus de données que l'estimation du bispectre. Dans le cas monodimensionnel, l'algorithme de la multirésolution à l'ordre quatre s'écrit [1] :

$$\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$$

(à la fréquence d'échantillonnage et ses multiples),

Pour $n = 1, \dots, \log_2 N$,

$$\left| \begin{array}{l} \varphi(\frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2} \left[\Psi_4(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}) + \varphi(\frac{-1}{2^{n-1}}) + \varphi(\frac{1}{2^{n-2}}) \right]; \\ \text{Pour } k = 0, \dots, 2^{n-1} - 2, \\ \varphi(\frac{2k+3}{2^n}) = -\Psi_4(\frac{k}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}}) \\ \quad + \varphi(\frac{k}{2^{n-1}}) + \varphi(\frac{1}{2^n}) - \varphi(\frac{-1}{2^{n-1}}). \end{array} \right.$$

De même qu'à l'ordre trois, cet algorithme ne nécessite pas de déroulement de phase. Pour le cas bidimensionnel, l'algorithme est décrit en annexe.

3 Résultats de simulation

Nous montrons dans ce paragraphe les résultats de reconstruction d'images observées à travers une surface d'eau en mouvement. Notre expérience se base sur l'analogie existant entre d'une part les déviations aléatoires subies par les rayons lumineux traversant une surface d'eau en mouvement et d'autre part celles subies par des rayons lumineux traversant l'atmosphère. Nous présentons tout d'abord les résultats obtenus dans le cas monodimensionnel. Pour ce faire, nous appliquons l'algorithme de reconstruction sur les projections des images bidimensionnelle. La figure (1) illustre de telles projections à partir desquelles on reconstruit le signal représenté à la figure (2) en utilisant l'algorithme de la multirésolution monodimensionnel. La figure (3) illustre l'évolution de la convergence du trispectre vers un trispectre factorisable en fonction du nombre d'images utilisées pour calculer ce trispectre. Nous présentons ensuite les résultats obtenus dans le cas bidimensionnel : la figure (4) représente l'image non bruitée, la figure (5) représente une image bruitée, et finalement, l'image reconstruite en utilisant l'algorithme de multirésolution bidimensionnel est illustré figure (6). Les résultats, tant dans le cas monodimensionnel que dans le cas bidimensionnel, sont obtenus à partir de 1000 images bruitées.

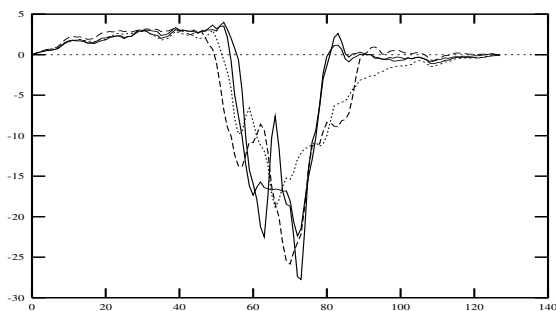


FIG. 1 — Projections bruitées.

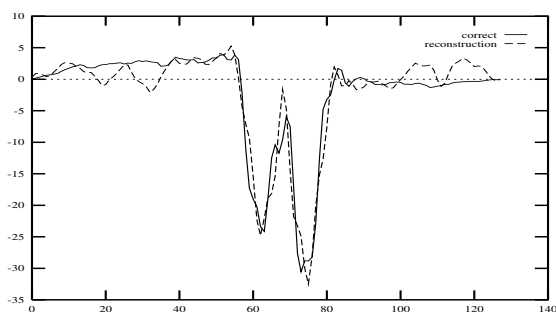


FIG. 2 — Reconstruction de la projection à l'ordre 4.



FIG. 4 — Image correcte.

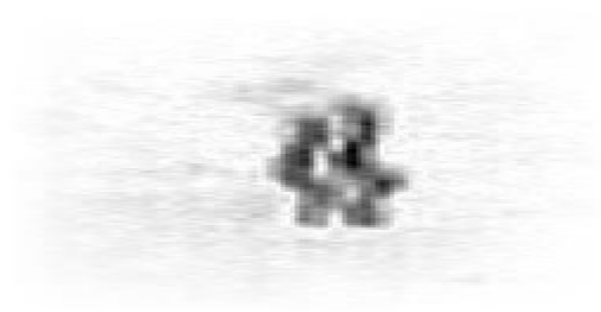


FIG. 5 — Image bruitée.

Références

- [1] **C. Huet and J. Le Roux(1996)** : “Some properties and algorithms for fourth order spectral analysis of complex signals,” *Proceedings of EUSIPCO-96*, pages 1441–1444, Trieste, Italy, September 1996.
- [2] **J. Le Roux, D. Rossille and C.Huet(1995)** : “A multiresolution extension of Lohman Weigelt and Wirmitzer recursion for computing a Fourier transform phase from the third order spectrum phase,” *IEEE Signal Processing ATHOS Workshop on HOS*, pages 315–319, Begur, Spain, June 1995.
- [3] **J. Le Roux, D. Rossille, C. Huet et J.L. Peyre(1995)** : “Prise en compte de la stationnarité dans les algorithmes d’analyse spectrale et d’identification fondés sur la mesure des corrélations et des spectres d’ordre supérieur,” *Quinzième colloque GRETSI*, pages 81–84, Juan-Les-Pins, France, 14-21 Septembre 1995.
- [4] **A.W. Lohmann, G.P. Weigelt and B. Wirmitzer(1983)** : “Speckle masking in astronomy - triple correlation theory and applications,” *Appl. Opt. Vol.22*, pages 4028–4037, December 1983.
- [5] **D. Rossille, J. Le Roux, F. Germain and O. Jourdan(1994)** : “Speckle masling in the frequency domain : comparison of several algorithms on actual astrophysical data,” *Proceedings of EUSIPCO-94*, pages 458–461, Edinburgh, Scotland, UK, September 1994.
- [6] **P. Lena(1986)** : “Méthodes physiques de l’observation,” *InterEditions - Editions du CNRS*, 1986.
- [7] **J. Le Roux and C. Huet (1997)** : “Factorizability of complex signals higher (even) order spectra : a necessary and sufficient condition,” *IEEE Signal Processing ATHOS Workshop on HOS*, Banff, Canada, July 1997.
- [8] **J.C. Marron , P.P. Sanchez and R.C. Sullivan (1990)** : “Unwrapping algorithm for least-squares phase recovery from the modulo 2π bispectrum phase,” *J.Opt.Soc.Am. A/Vol.7*, pages 14–20, January 1990.

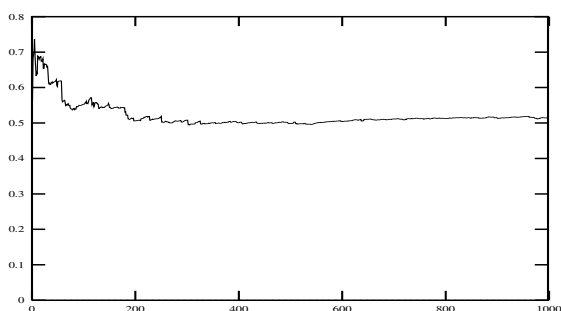


FIG. 3 — Evolution en fonction du nombre d’images de l’écart (en radian) par rapport à la condition de factorisabilité. (La factorisabilité est garantie si le critère est proche de zéro.

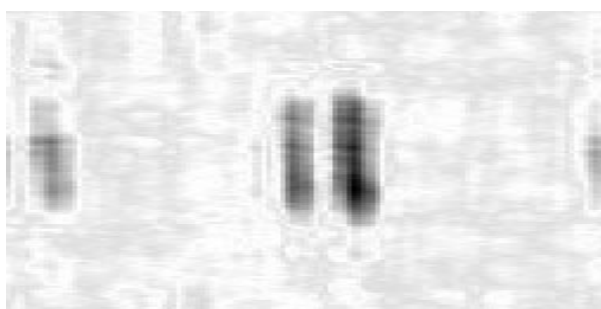


FIG. 6 — Reconstruction à l'ordre 4.

4 Annexe

L'algorithme de multirésolution à l'ordre 4 s'écrit dans le cas bidimensionnel :

$$\varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \text{ (à la fréquence d'échantillonnage et ses multiples)}$$

Pour $n = 1, \dots, \log_2 N$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left[\Psi_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{2^{n-2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left[\Psi_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^{n-2}} \end{pmatrix} \right] \end{aligned} \right\}$$

Pour $r = 0, \dots, 2^{n-1} - 2$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \begin{pmatrix} \frac{2r+3}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} &= -\Psi_4 \begin{pmatrix} \frac{r}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{r}{2^{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} \frac{-1}{2^{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2r+3}{2^n} \end{pmatrix} &= -\Psi_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{r}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-1}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$

Pour $r = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$

Pour $s = 0, \dots, 2^{n-1} - 1$

$$\left. \begin{aligned} \varphi \begin{pmatrix} \frac{2r+1}{2^n} \\ \frac{2s}{2^n} \end{pmatrix} &= -\Psi_4 \begin{pmatrix} \frac{r}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{r}{2^{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-s}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \\ \varphi \begin{pmatrix} \frac{2s}{2^n} \\ \frac{2r+1}{2^n} \end{pmatrix} &= -\Psi_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{s}{2^{n-1}} \\ \frac{r}{2^{n-1}} & \frac{1}{2^n} & 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{r}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} \frac{-s}{2^{n-1}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi \begin{pmatrix} \frac{2s+1}{2^n} \\ \frac{2r+1}{2^n} \end{pmatrix} &= -\Psi_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & 0 & \frac{s}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{r}{2^{n-1}} \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} \\ 0 \end{pmatrix} + \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix} - \varphi \begin{pmatrix} \frac{-s}{2^{n-1}} \\ \frac{-r}{2^{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\}$$