

# Traitement des Effets de Bords des Filtrés Linéaires Récursifs par Application des Propriétés des Suites Numériques

Marc-Aurèle NJONKOU FANKAM et Richard LECORDIER

Laboratoire d'Informatique de l'Université du Maine  
Avenue Olivier Messiaen - F72085 Le Mans Cedex 09  
njonkou@lium.univ-lemans.fr

## RÉSUMÉ

Dans ce papier, nous présentons une méthode qui permet de résoudre le problème des effets de bords posé par la mise en œuvre récursive classique des filtres linéaires. Cette méthode est fondée sur l'application des propriétés de convergence des suites réelles récurrentes sur une transformée des systèmes linéaires considérés. Nous avons appliqué cette méthode sur des images réelles. Les résultats obtenus montrent que l'élimination des effets de bords ont un effet bénéfique sur la performance des filtres, aussi bien pour le lissage que pour la détection des contours.

## ABSTRACT

We present in this paper a method of resolving the problem of side picture effects posed by the classical recursive implementation of linear filters. This method is based on the application of the convergence properties of recurrent sequences on a transform of considered linear systems. The method was applied on real images. The obtained results show that the elimination of side picture effects improves filter performances on smoothing as well as on edge detection.

## 1. Introduction

Le filtrage récursif, technique bien connue en traitement du signal, a été introduit en vision artificielle pour la détection des contours. Il permet de mettre en œuvre des filtres de réponse impulsionnelle infinie avec un faible coût.

La mise en œuvre classique des filtres linéaires consiste à tronquer les réponses de manière à ne conserver que les coefficients significatifs (les réponses impulsionnelles des filtres décroissent vers 0 à l'infini). Ensuite on procède par implantation directe d'un produit de convolution. Pour des étendues de filtres importantes on obtient donc des complexités prohibitives et ceci d'autant plus que la taille de l'image est importante. De plus la troncature des réponses nuit à la qualité du filtrage. Une solution pour éviter ce compromis entre taille des masques et la qualité des résultats consiste à utiliser le filtrage récursif.

Cependant, cette mise en œuvre récursive classique des filtres présente des artefacts sur les bords de l'image. Ces effets de bords sont le fait d'une mauvaise définition des conditions initiales des équations aux différences qui permettent de calculer la réponse du filtre à une entrée donnée [3, 4, 5, 8, 10, 11].

Peu de travaux ont été réalisés pour traiter ce problème qui touche pourtant un domaine d'application assez large, de l'acoustique au traitement d'images. Dans le cadre de la détection des contours par la méthode de Deriche [3, 4, 5] (implantation récursive d'ordre 2), des auteurs [6] proposent une approche en trois passes qui s'avère relativement approximative et non généralisable au lissage.

Dans cet article, nous nous attacherons dans un premier temps à présenter les principes de la mise en œuvre récursive, et ensuite dans la troisième section, les effets créés par les bords d'image. Dans la quatrième section, après un bref rappel sur la convergence des suites récurrentes, nous décrivons notre approche pour le traitement des effets de bords. Dans la cinquième section, nous présentons des

résultats obtenus sur des images réelles de la banque SYMPA avec les filtres désormais classiques de Deriche et de Shen [9], aussi bien dans le cadre du lissage que pour la détection des contours. La dernière section servira de conclusion et de synthèse des points essentiels abordés dans cet article.

## 2. Le filtrage récursif

Dans cette section, nous introduisons le problème du filtrage récursif. Considérons la relation qui lie le signal d'entrée à  $N$  échantillons  $x(n)$  au signal de sortie  $y(n)$  pour un système de réponse impulsionnelle  $h(n)$  :

$$y(n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x(i) \cdot h(n-i) \quad (2.1)$$

La fonction de transfert de ce système discret stable, causal et non récursif est donné par :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) \cdot z^{-n} \quad (2.2)$$

Le nombre d'opérations requis pour calculer chaque élément de sortie  $y(n)$  peut être excessif si nous considérons une grande taille  $N$ . Par exemple, un demi filtre gaussien requiert approximativement une valeur de  $4\sigma$  pour  $N$ . Le problème du filtrage linéaire récursif consiste à trouver les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  de la fonction de transfert rationnelle de la forme :

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^r b_i z^{-i}} \quad (2.3)$$

qui caractérise le système récursif d'ordre  $r$  suivant :

$$y(n) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^r b_i y(n-i) \quad (2.4)$$

Cette équation est appelée *équation aux différences* à coefficients constants. Le système est entièrement caractérisé par les coefficients  $(a_i, b_i)_{i \leq r}$ .

La mise en œuvre récursive de ce filtre linéaire revient à décomposer  $h(n)$  en deux composantes [5] : une composante causale  $h_-(n)$  et une anticausale  $h_+(n)$ . On a :

$$h_+(n) = h(n) \quad \text{pour } n \geq 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (2.5)$$

$$h_-(n) = h(-n) \quad \text{pour } n < 0 \text{ et } 0 \text{ sinon} \quad (2.6)$$

$$h(n) = h_-(n) + h_+(n) \quad \text{pour } n = -\infty, \dots, +\infty \quad (2.7)$$

Les équations aux différences correspondantes sont :

$$\begin{cases} y_-(n) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i^- x(n+i) - \sum_{i=1}^r b_i y_-(n+i) \\ \text{pour } n = N-1, \dots, 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

et

$$\begin{cases} y_+(n) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i^+ x(n-i) - \sum_{i=1}^r b_i y_+(n-i) \\ \text{pour } n = 0, \dots, N-1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Les coefficients  $(a_i^-, a_i^+, b_i)_{i \leq r}$  caractérisent les systèmes récursifs d'ordre  $r$  (2.8) et (2.9).

En considérant que le signal original  $x(n)$  est nul pour  $n < 0$  et  $n \geq N$ , on a les conditions aux bords suivantes :

$$\begin{cases} \text{pour } n < 0 & : & x(-1) = \dots = x(-r+1) = 0 \\ & \text{et } & y_+(-1) = \dots = y_+(-r) = 0 \\ \text{pour } n > N-1 & : & x(N) = \dots = x(N+r-2) = 0 \\ & \text{et } & y_-(N) = \dots = y_-(N+r-1) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Finalement, la sortie  $y(n)$  à  $N$  éléments en réponse à l'entrée  $x(n)$  d'un système dont la réponse impulsionnelle est  $h(n)$ , peut être obtenue d'après (2.7), selon :

$$y(n) = y_-(n) + y_+(n) \quad \text{pour } n = 0, \dots, N-1 \quad (2.11)$$

### 3. Les effets de bords

Lorsqu'on réalise la mise en œuvre classique des filtres linéaires à réponse impulsionnelle infinie [5, 8, 10] pour une entrée bornée, par exemple une image de taille  $N$ , la solution des équations (2.8) et (2.9) est déterminée par les  $r$  conditions initiales définies en (2.10). Ces conditions étant nulles, il en résulte les effets de bords tels qu'on peut le voir sur les figures 3.1 et 3.2.

La figure 3.1 illustre un lissage par le filtre de Shen [10] (mise en œuvre récursive d'ordre 1), avec comme paramètre du filtre  $\beta=0.2$ . Ce filtre est appliqué sur une image réelle, *fruits.gdr* (figure 3.1a), de la banque SYMPA. Sur l'image résultat présentée à la figure 3.1b, on observe un effet d'atténuation des niveaux de gris sur les bords.

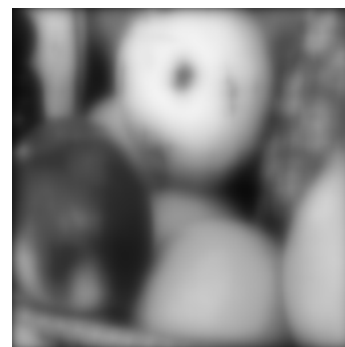
La figure 3.2b présente le résultat de la détection de contours par le filtre récursif dérivateur de Deriche [5] sur l'image réelle *femme.gdr* (figure 3.2a), avec comme paramètre du filtre  $\alpha=0.7$ . Cette image gradient est normalisée à 255. On constate que, du fait que les plus fortes transitions sont détectées sur les bords de l'image, certains points de contours intérieurs sont faiblement détectés. La figure 3.2c présente la superposition des contours binaires obtenus par un seuillage par hystérésis [1] de l'image 3.2b, avec un seuil haut  $Sh=50$  et un seuil bas  $Sb=17$ . On peut noter des fausses détections sur les bords de l'image.

Ce phénomène existe quelque soit le paramètre du filtre, mais la largeur de la zone influencée par le bord diminue lorsque la *taille utile* du filtre diminue. La taille utile étant l'étendue qui contient la totalité de l'énergie du signal dans le domaine spatial [2].

Si on considère un pixel de bord sur les figures 3.1b et 3.2b, l'initialisation à zéro revient à créer un échelon centré sur ce pixel, d'amplitude son niveau de gris. La réponse du filtre à cet échelon est sa réponse impulsionnelle pondérée par la hauteur de l'échelon. On observe donc de chaque côté de l'image une demi-réponse impulsionnelle du filtre (figures 3.1b et 3.2b)



(a) Image fruits.gdr



(b) Traitement par le filtre lisseur de Shen

**Figure 3.1 :** Illustration des effets de bords pour un lissage par filtrage récursif de Shen ( $\beta=0.2$ ) sur l'image fruits.gdr



(a) Image femme.gdr



(b) Image du gradient normalisé de Deriche



(c) Superposition des contours binaires sur l'image originale

**Figure 3.2 :** Illustration des effets de bords en détection de contours par le filtre dérivateur récursif de Deriche ( $\alpha=0.7$ ,  $Sh=50$ ,  $Sb=17$ ) sur l'image femme.gdr.

Pour pallier à cet effet, ces auteurs suppriment généralement, après traitement, les pixels de bords sur un certain nombre de pixels correspondant environ à la moitié de la taille utile du filtre.

#### 4. Traitement des effets de bords

Les signaux discrets se présentent comme des suites de valeurs numériques. Les équations aux différences définissent les relations de récurrences qui lient deux ou plusieurs termes de ces suites. Pour traiter le problème des effets de bords, nous poserons des hypothèses sur les signaux d'entrées qui permettront de définir les conditions aux bords à partir des propriétés des suites réelles récurrentes. Dans cette section, nous présenterons dans un premier temps les propriétés qui nous intéressent pour traiter notre problème, ensuite nous poserons les hypothèses de travail pour définissant les conditions initiales des équations aux différences.

##### 4.1 Rappels sur la convergence des suites récurrentes

Si  $\{u_n\}_{n \in D}$  est une suite récurrente d'ordre  $r$  sur  $D$  (sous-ensemble infini de  $\mathbb{N}$ ), définie par la relation  $\{u_{n+1}\} = \left\{ f\left([u_{n-i}]_{i=0}^{r-1}\right) \right\}$  et si  $\{u_n\}$  est convergente vers une limite  $l$  telle que  $f$  est continue en  $l$ , alors vérifie l'équation [7] :

$$l = f(l) \quad (4.1)$$

##### 4.2 Hypothèses et calcul des conditions aux bords

Dans l'approche que nous proposons, nous supposons d'une part que l'excitation  $x(n)$  est continue sur les bords. C'est dans ce soucis que nous l'étendons à l'infini de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{pour } n < 0 & : x(-1) = \dots = x(-r+1) = x(0) \\ \text{pour } n > N-1 & : x(N) = \dots = x(N+r-2) = x(N-1) \end{cases} \quad (4.2)$$

D'autre part, en observant (2.8) et (2.9),  $y_+(n)$  et  $y_-(n)$  peuvent être considérés comme des suites réelles [7]. Nous considérons que ces suites sont convergentes à l'infini, ainsi pour un bord donné, les conditions initiales (2.10) de  $y_+(n)$  et  $y_-(n)$  correspondent à un régime établi du filtre pour un signal uniforme, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \text{pour } n < 0 & : y_+(-1) = \dots = y_+(-r) = y_G \\ \text{pour } n > N-1 & : y_-(N) = \dots = y_-(N+r-1) = y_D \end{cases} \quad (4.3)$$

$y_G$  et  $y_D$  représentent respectivement les valeurs limites de la sortie  $y(n)$  aux bords gauche et droite de la réponse du filtre au signal  $x(n)$ . Elles prendront les valeurs des limites des suites récurrentes convergentes définies en (2.8) et (2.9) avec :

$$\begin{cases} y_G = \lim_{n \rightarrow -\infty} y_+(n) \\ y_D = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_-(n) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_G = \sum_{i=0}^{r-1} a_i^+ \cdot x(-\infty) - \sum_{i=1}^r b_i \cdot y_G \\ y_D = \sum_{i=0}^{r-1} a_i^- \cdot x(+\infty) - \sum_{i=1}^r b_i \cdot y_D \end{cases} \quad (4.4)$$

à partir des hypothèses (4.2), nous remplaçons  $x(-\infty)$  par  $x(0)$  et  $x(+\infty)$  par  $x(N-1)$ . Finalement, nous avons :

$$\begin{cases} y_G = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} a_i^+ \cdot x(0)}{1 + \sum_{i=1}^r b_i} \\ y_D = \frac{\sum_{i=0}^{r-1} a_i^- \cdot x(N-1)}{1 + \sum_{i=1}^r b_i} \end{cases} \quad (4.5)$$

#### 5. Résultats expérimentaux

Pour le lissage, la figure 5.1 montre le résultat de notre traitement, avec le filtre lisseur de Shen (avec  $\beta=0.2$ ) sur l'image fruits.gdr. On n'observe plus l'effet d'atténuation des niveaux de gris sur les bords comme sur la figure 3.1b, qui semble globalement plus sombre.

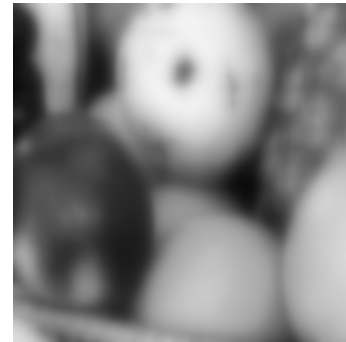
Pour ce qui est de la détection de contours, la figure 5.2 présente les résultats de la détection de contours par le filtre récursif de Deriche avec traitement des bords sur l'image

réelle femme.gdr. Après normalisation à 255, seuillage par hystérésis ( $S_h=50$ ,  $S_b=17$ ) des images gradients, figures 3.2b et 5.2a, et superposition sur l'image originale femme.gdr, on obtient les figures 3.2c et 5.2b respectivement avec et sans effets de bords. Par rapport à l'image 3.2c, on peut noter sur la figure 5.2b, qu'en dehors du fait qu'on n'observe plus de fausse détection sur les bords de l'image, il y a une apparition des points de contours au niveau du menton, du cou et du bracelet de la femme. Ces points n'étaient pas détectés par l'opération de seuillage dans la figure 3.2c car ils étaient fortement atténués par rapport aux fortes transitions que représentaient les effets de bords (figure 3.2b). On constate sur la figure 5.2a que la suppression des effets de bords a donc contribué à les mettre plus en évidence.

## 6. Conclusion

Nous avons présenté une méthode originale de traitement des effets de bords engendrés par le filtrage récursif, fondée sur l'utilisation des propriétés de convergence des suites récurrentes. Nous avons présenté des résultats sur des images réelles, pour le lissage et la détection des contours. Ils montrent que l'élimination des effets des bords a un effet

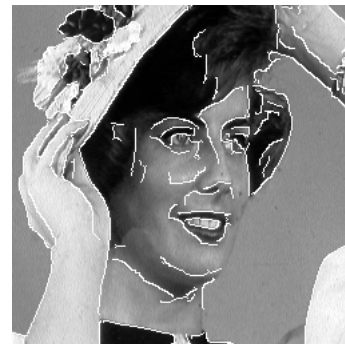
bénéfique sur la performance des filtres. Cette approche peut aussi être appliquée pour le calcul du Laplacien d'une image, et d'une manière générale, à tout filtre linéaire présentant une mise en œuvre récursive.



**Figure 5.1 :** Lissage de l'image fruits.gdr par le filtre de Shen sans effets de bords



(a) Gradient normalisé de Deriche



(b) Superposition des contours sur l'image originale

**Figure 5.2 :** Application du filtre dérivateur de Deriche, avec traitement des bords sur l'image femme.gdr

## 7. Références

- [1] J.F. Canny - *A computational Approach to Edges Detection*, PAMI-8 N°6, pp. 679-698, 1986.
- [2] F. de Coulon - *Théorie et traitement des signaux*, éditions Dunod 1984.
- [3] R. Deriche - *Optimal edge detection using recursive filtering*, ICCV juin 87.
- [4] R. Deriche - *Using Canny's criteria to derive a recursive implemented optimal edge detector*, IJCV-1, pp. 167-187, 1987.
- [5] R. Deriche - *Fast algorithm for low level vision*, PAMI janvier 90.
- [6] D. Demigny, L. Kessal, T. Kamle, J.P. Cocquerez - *Filtre de Deriche : Architectures temps réel pour la segmentation multi-résolution*, colloque GRETSI septembre 93.
- [7] M. Kahn, S. Weber et M.L. Wernet - *Analyse*. Collection de Mathématiques du C.N.E.D. - éditions Foucher, vol. 5, Juillet 1988.
- [8] S. Sarkar, K.L. Boyer - *On optimal infinite impulse response edge detection filters*, PAMI-13 no11 1991.
- [9] J. Shen, S. Castan - *An optimal linear filter for edge detection*, CVPR juin 86.
- [10] J. Shen, S. Castan - *An optimal linear filter for step edge detection*, CVGIP : Image Understanding, vol 54, pp112-133, 1992.
- [11] Mme A. Serir, M.B. Sansal - *Implémentation récursive de détecteurs de contours*, Colloque GRETSI septembre 1991.