

Estimation du nombre de composantes d'un signal à l'aide du critère GDE amélioré

Olivier Caspary et Patrice Nus

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
Université H. Poincaré, Nancy 1
11, rue de l'Université - 88100 Saint-Dié
Tél. : 03.29.51.65.38 - Fax : 03.29.51.65.21
E-mail : ocaspary@cran.iutsd.u-nancy.fr

RÉSUMÉ

Parmi les nombreux critères d'estimation du nombre de sources ou de composantes fréquentielles disponibles dans la littérature, nous nous intéressons au critère GDE qui repose sur l'estimation des rayons des disques de Gerschgorin. Ce critère requiert au préalable la modification de la matrice de covariance à l'aide d'une transformation unitaire, afin de séparer les disques de Gerschgorin en deux jeux distincts, l'un associé aux sources du signal, l'autre associé au bruit. Notre contribution consiste à modifier ce critère en un nouveau critère appelé SGDE utilisant la somme des rayons des disques. De plus, nous proposons d'appliquer une technique de déflation à la matrice de covariance avant l'utilisation de ce nouveau critère, afin de le rendre moins sensible à des sources de puissance différente. Les résultats obtenus montrent que le critère présente de bonnes performances, notamment avec du bruit coloré, des signaux comprenant peu d'échantillons et des sources de puissance différente.

1 Introduction

En analyse spectrale, l'estimation du nombre de sources ou de composantes fréquentielles est un problème crucial car les performances des méthodes d'analyse spectrale dites "haute résolution" dépendent généralement des dimensions des sous-espaces signal et bruit. De nombreux critères sont apparus, parmi lesquels des critères directs utilisant le profil des valeurs propres [1], des critères plus élaborés intégrant les propriétés statistiques du bruit tels que les critères AIC et MDL [2], et plus récemment un critère exploitant le profil des valeurs propres du bruit [3]. Cependant, si le nombre d'échantillons est faible, si le bruit n'est pas un bruit blanc gaussien, si l'écart de puissance entre les composantes est important, alors la plupart de ces critères perdent de leur efficacité ou ne sont plus applicables. Il faut donc disposer d'informations a priori pour pouvoir choisir le ou les critères adaptés. Pour éviter ce cas de figure dans la mesure du possible, nous portons notre intérêt sur un critère récent, le critère GDE (Gerschgorin Disk Estimator), qui utilise les rayons des disques de Gerschgorin. En effet, il est par nature géométrique, contrairement à la nature statistique des critères bien connus AIC et MDL. Par conséquent, les modèles de bruit peuvent être inconnus [4].

ABSTRACT

Among the numerous criteria which are available in literature to estimate the number of sources or of frequential components, we have chosen to examine the GDE criterion. This criterion is based on the estimation of the Gerschgorin disks' radii and can be applied to the estimation mentioned above, provided the covariance matrix has been changed beforehand with a unitary transformation, so as to separate the Gerschgorin disks in two distinct sets : one associated to the signal sources, the other related to the noise. In this paper, we aim at modifying that criterion into a new one called SGDE by using the sum of the disks' radii. Besides, we suggest applying a deflation method to the covariance matrix before using the new criterion, in order to make it less sensitive to sources of different power. The results show that the SGDE criterion can be applied in many situations, particularly in the case of coloured noise, of signals containing few samples or of sources with different power.

Dans la section suivante, nous présentons le théorème de Gerschgorin et une transformation unitaire permettant de l'exploiter avec la matrice de covariance. Les critères GDE et SGDE (Sum of Gerschgorin Disk Estimator) sont décrits dans la section 3. Ensuite, la technique de déflation que nous associons au critère SGDE est présentée dans la section 4. Enfin, la dernière section est consacrée aux simulations que nous avons effectuées dans le but de comparer les performances de notre approche avec le critère GDE.

2 Le théorème de Gerschgorin

Le théorème de Gerschgorin permet de localiser les valeurs propres d'une matrice. Soit une matrice carrée A d'ordre N , alors toutes les valeurs propres λ de A appartiennent à l'union des N disques de Gerschgorin telles que :

$$\lambda \in \bigcup_{k=1}^N D_k \quad (1)$$

où chaque disque de Gerschgorin D_k est défini dans le plan complexe par un rayon r_k de la forme :

$$r_k = \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N |a_{kl}| \tag{2}$$

et un centre $O_k = a_{kk}$.

Cependant, dans la référence [4], les auteurs ont montré que le théorème de Gerschgorin n'est pas applicable sous cette forme pour estimer le nombre de sources, car les disques sont fortement entrelacés et les rayons sont grands au point de ne pouvoir distinguer les sous-espaces signal et bruit. L'exemple suivant illustre cet entrelacement.

Nous considérons un signal $x(t)$ de 20 échantillons comprenant deux sinusoides de même amplitude et de fréquences normalisées $f_1 = 0,20$, $f_2 = 0,25$ noyées dans un bruit blanc gaussien $b(t)$ de variance unitaire, tel que :

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + b(t) \tag{3}$$

où $t = 1, 2, \dots, 20$, $A_1 = A_2 = 4,47$ (10 dB). La matrice de covariance C , de dimension $N = 8$, est estimée sous forme covariance modifiée. L'application directe du théorème de Gerschgorin sur l'estimation de la matrice C donne les résultats de la figure 1.

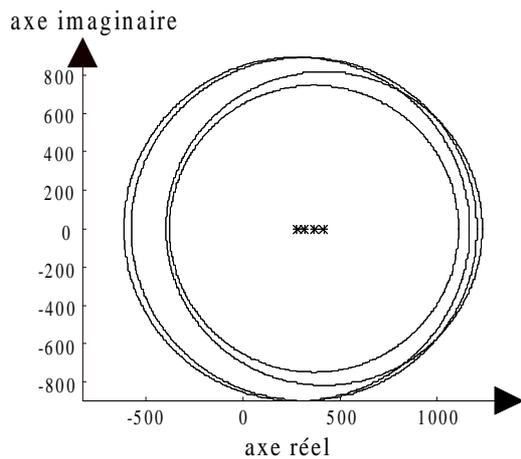


Fig. 1. Disques de Gerschgorin de la matrice de covariance (* : centres des disques).

Le domaine d'appartenance des valeurs propres associées au bruit recoupe le domaine d'appartenance des valeurs propres associées au signal. La distinction en sous-espaces signal et bruit n'est pas réalisable.

Aussi, dans la référence [4], une solution possible nécessitant une transformation unitaire de la matrice de covariance a été proposée. Cette solution ne modifie pas les valeurs propres et se présente succinctement sous la forme suivante :

Soit la matrice de covariance :

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H & c_{NN} \end{pmatrix} \tag{4}$$

alors il existe une matrice unitaire :

$$U = \begin{pmatrix} U_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^H & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

où U_1 est également une matrice unitaire formée des vecteurs propres de C_1 , telle que la matrice de covariance transformée devienne :

$$S = U^H C U = \begin{pmatrix} S_1 & U_1^H \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^H U_1 & c_{NN} \end{pmatrix} \tag{6}$$

La matrice diagonale S_1 contient les valeurs propres λ' , ordonnées dans le sens décroissant, de la sous-matrice C_1 . Comme U est une matrice unitaire formée par les vecteurs propres de C , les valeurs propres de S sont identiques à celles de C , et il a été démontré que les disques de Gerschgorin ont les rayons et centres suivants :

$$r_k = |U_1^H \mathbf{c}|, \quad O_k = \lambda' \tag{7}$$

pour $k = 1, \dots, N-1$.

En théorie, dans le cas d'un nombre infini d'échantillons, les rayons associés au sous-espace bruit sont nuls tandis que ceux associés au sous-espace signal ne le sont pas. Ceci est dû au principe d'orthogonalité entre les vecteurs propres estimés de U_1 et le vecteur \mathbf{c} qui contient les directions des sources du signal. En pratique, comme le nombre d'échantillons est fini et la matrice de covariance estimée, on recherche un ensemble de disques avec de grands rayons, pour le sous-espace signal, distinct d'un second ensemble de disques avec de faibles rayons, pour le sous-espace bruit. Les rayons définis par l'équation (7) sont pratiquement indépendants de la nature du bruit. Ils dépendent cependant de la précision sur l'estimation des vecteurs propres de U_1 , donc de la taille du signal à étudier. Avec la transformation unitaire, la figure 1 de l'exemple précédent devient :

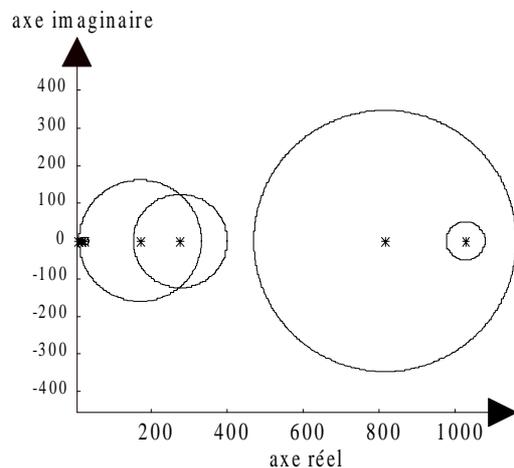


Fig. 2. Disques de Gerschgorin de la matrice de covariance calculés après la transformation unitaire.

D'une part, les centres des disques associés au sous-espace signal sont distincts des autres centres regroupés près de 0, d'autre part, leurs rayons sont bien plus grands. On distingue bien 4 sources complexes, soit un signal contenant 2 sinusoides. Dans la section suivante, nous tentons d'exploiter les résultats obtenus par l'équation (7), et illustrés par la figure 2, à l'aide de critères judicieux.

3 Les critères GDE et SGDE

Les critères heuristiques les plus naturels sont ceux qui reposent uniquement sur les rayons des disques. Il s'agit de distinguer les plus grands rayons des autres pour pouvoir estimer la dimension M du sous-espace signal. A cet égard, on peut faire l'analogie avec les critères simples employant les valeurs propres, facilement applicables et d'un coût de calcul négligeable devant celui de la décomposition en valeurs propres [1]. Ainsi un critère que l'on peut couramment employer consiste à chercher un rayon très grand par rapport au rayon suivant, soit :

$$r_M \gg r_{M+1} \quad (8)$$

En normalisant par le rayon le plus grand, on peut déduire le critère ci-après :

$$\frac{r_M}{r_{MAX}} > \delta > \frac{r_{M+1}}{r_{MAX}} \quad (9)$$

où δ est un seuil arbitraire.

Une autre manière de définir un seuil raisonnable consiste à enlever la moyenne des rayons à chacun d'entre eux, soit le critère GDE décrit par :

$$GDE(k) = r_k - \frac{F(L)}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} r_i \quad (10)$$

avec $k = 1, \dots, N-1$, et $F(L)$ est un facteur ou une fonction ajustable selon le nombre d'échantillons L du signal. Généralement, $F(L) = 1$. Ce critère repose sur l'hypothèse que le nombre de sources M est tel que $M < N-1$. Sous une autre écriture, le critère GDE devient :

$$GDE(k) = r_k - F(L) \bar{r} \quad (11)$$

où le vecteur r est défini par $r = [r_1 \dots r_{N-1}]$ et \bar{r} représente la moyenne de r . Quand la première valeur négative de GDE(k) est atteinte, l'estimation de M est alors $M = k-1$.

Cependant, le critère GDE n'est pas satisfaisant parce que, contrairement aux valeurs propres qui sont ordonnées dans un ordre décroissant lors de la décomposition, les rayons des disques ne le sont pas. Pour une valeur propre significative, nous pouvons avoir un rayon plus faible que ceux correspondant aux autres valeurs propres significatives (voir par exemple la figure 2). Le critère GDE s'arrête donc à la première valeur négative obtenue alors que les valeurs suivantes de ce critère peuvent à nouveau être positives. Pour éviter dans la mesure du possible ce cas de figure, nous proposons le critère SGDE suivant :

$$SGDE(k) = \sum_{i=k}^{N-1} r_i - \frac{F(L)}{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{i=l}^{N-1} r_i \quad (12)$$

dans les mêmes conditions d'utilisation que le critère GDE. Sous une autre écriture, en posant :

$$r_s(k) = \sum_{i=k}^{N-1} r_i \quad (13)$$

pour k variant de 1 à N-1, le critère SGDE devient :

$$SGDE(k) = r_s(k) - F(L) \bar{r}_s \quad (14)$$

où le vecteur r_s est défini par $r_s = [r_{s_1} \dots r_{s_{N-1}}]$ et \bar{r}_s représente la moyenne de r_s .

Le fait d'utiliser les sommes des rayons plutôt que les rayons offre une plus grande robustesse au critère SGDE par rapport au critère GDE. D'autres critères heuristiques peuvent être élaborés, par exemple en combinant à la fois les rayons et les centres des disques.

Sans se limiter à la famille des critères heuristiques, une autre approche présentée dans la référence [4] est l'approche de la fonction de vraisemblance développée à partir de la matrice de covariance transformée. Elle conduit à des critères GAIC et GMDL qui sont à nouveau dépendants des statistiques du bruit.

4 Déflation sur la matrice de covariance

Dans le cas où les sources ont des puissances différentes, les valeurs propres "signal" sont difficilement dissociables des valeurs propres "bruit". En effet, certaines d'entre elles peuvent présenter le même profil que les valeurs propres "bruit" [3]. Les critères heuristiques reposant sur des seuils de valeurs propres sont alors mis en échec.

Pour tenter de remédier à ce problème, une technique de déflation sur la matrice de covariance estimée C peut être mise en place. Elle consiste à enlever le vecteur propre de C correspondant à la valeur propre la plus élevée pour former une matrice de projection P sur le sous-espace bruit supposé, puis nous projetons C dans ce sous-espace. Cette technique est répétée jusqu'au dernier vecteur propre et peut se résumer de la manière suivante :

1. Décomposition de $C(N,N)$ en valeurs propres et en vecteurs propres.

2. Technique de déflation :

Pour $i = 1$ à N

2.1 Matrice de projection $P = U_p U_p^H$ (avec U_p contenant les $N+1-i$ derniers vecteurs propres de U).

2.2 Projection $C_p = P C$.

2.3 Formation de la matrice C_i et du vecteur c .

2.4 Décomposition de C_i en valeurs propres λ' et en vecteurs propres (matrice U_i).

2.5 Calcul des rayons à l'aide de l'équation (7).

2.6 Calcul des variables pour les critères :

- critère GDE : $r_p(i) = r_i$

- critère SGDE : $r_s(i) = \sum_{j=1}^{N-1} r_j$

fin_pour

3. Calcul des critères d'estimation GDE ($r = r_p$) et SGDE.

Cette technique de déflation permet de mieux séparer les valeurs propres "signal" des valeurs propres "bruit". Elle permet également de réduire les rayons des disques associés

au sous-espace bruit, sans conséquence importante sur ceux associés au sous-espace signal. Cependant, son coût de calcul est élevé. La figure 3, qui reprend l'exemple présenté dans la section 2, illustre cette amélioration : 4 disques se détachent nettement des autres.

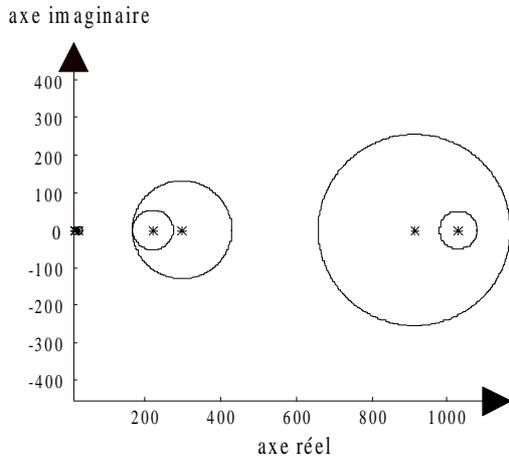


Fig. 3. Disques de Gerschgorin calculés après déflation de la matrice de covariance.

Comme dans le cas de la transformation unitaire, la technique de déflation dépend de la précision sur l'estimation des vecteurs propres de la matrice de covariance C , donc de l'estimation de cette matrice.

5 Résultats

Les performances des critères GDE et SGDE sont illustrées par des résultats de simulation. Lors de ces simulations, le nombre d'échantillons est $L = 32$ et la matrice de covariance estimée C est de dimension $N = 16$ sous la forme covariance modifiée. Pour chaque résultat, 200 simulations de Monte-Carlo sont réalisées. $F(L)$ est fixé à 1.

En premier lieu, nous considérons 2 sinusôides de même amplitude dans un bruit blanc gaussien, soit l'équation (3) avec les paramètres suivants : deux fréquences normalisées $f_1 = 0,25$ et $f_2 = 0,27$ noyées dans un bruit blanc gaussien $b(t)$ de variance unitaire, et des amplitudes $A_1 = A_2$ qui varient de -5 dB à $+20$ dB. Comme le montre la figure 4, le taux de détection du critère SGDE sans déflation est supérieur de 2 à 3 dB à ceux des critères GDE sans déflation et SGDE avec déflation. Le taux de détection du critère GDE avec déflation est faible, en raison de la faible précision sur l'estimation des vecteurs propres.

Nous effectuons de nouvelles simulations en remplaçant uniquement le bruit blanc gaussien $b(t)$ par un bruit coloré. Ce bruit est généré par un filtrage autorégressif du bruit blanc gaussien avec un coefficient de 0,9. Les taux de détection des critères SGDE avec et sans déflation sont supérieurs aux critères GDE (voir figure 5).

A présent, nous nous intéressons aux différences d'amplitude des deux sinusôides en fixant l'amplitude de A_1 à 10 dB et en faisant varier la seconde de 10 dB à 25 dB. Le critère SGDE avec déflation présente un taux de détection de 100 % jusqu'à une différence d'amplitude de 7 dB, soit une amélioration de l'ordre de 4 dB par rapport au critère SGDE

sans déflation, comme le montrent les figures 6 et 7. On peut également remarquer que les performances des critères SGDE sont pratiquement indépendantes de la nature du bruit puisqu'elles sont similaires dans le cas d'un bruit blanc et d'un bruit coloré (cf. figures 6 et 7). Quant aux critères GDE, leurs performances sont bien plus faibles.

Sans déflation : GDE (—○—) et SGDE (—*—)
 Avec déflation : GDE (- - ○ -) et SGDE (- - * -)

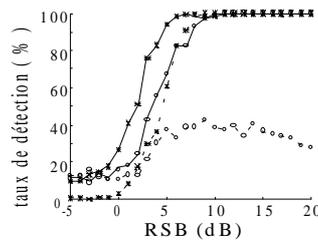


Fig. 4. Performances de GDE et SGDE avec du bruit blanc (amplitudes identiques)

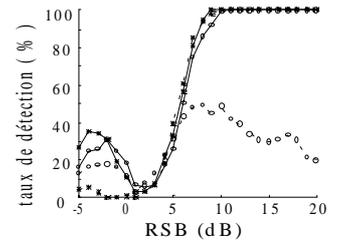


Fig. 5. Performances de GDE et SGDE avec du bruit coloré (amplitudes identiques)

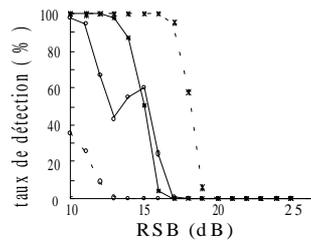


Fig. 6. Performances de GDE et SGDE avec du bruit blanc (amplitudes différentes)

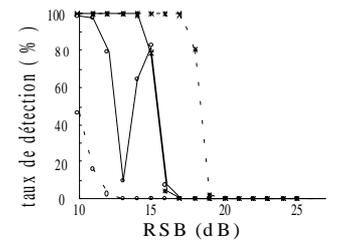


Fig. 7. Performances de GDE et SGDE avec du bruit coloré (amplitudes différentes)

6 Conclusion

Le critère SGDE proposé améliore les performances du critère GDE initial. Cependant, il est utile de lui associer une technique de déflation pour se prémunir des écarts de puissance des composantes du signal. La nature géométrique du critère semble une voie intéressante pour envisager l'élaboration de nouveaux critères encore plus performants, applicables dans de nombreuses situations.

Références

- [1] Konstantinides K., Yao K., "Statistical analysis of effective singular values in matrix rank determination", IEEE Trans. on ASSP, vol. 36, n°5, pp. 757-763, May 1988.
- [2] Wax M., Kailath T., "Detection of signals by information theoretic criteria", IEEE Trans. on ASSP, vol. 33, n°2, pp. 387-392, April 1985.
- [3] Grouffaud J., Larzabal P., Clergeot H., "Some properties of ordered eigenvalues of a Wishart matrix : application in detection test and model order selection", Proc. of ICASSP, Atlanta, 7-9 May 1996.
- [4] Wu H-T, Yang J-F, Chen F-K, "Source number estimators using transformed Gerschgorin radii", IEEE Trans. on SP, vol. 43, n°6, pp. 1325-1333, June 1995.