

# Résultats nouveaux en analyse spectrale de signaux aléatoirement échantillonnés

A. Ouahabi \*, C. Depollier \*\*, L. Simon \*\*, C. Guetbi \*, J.P. Chemla \*, D. Kouamé\*

\* LUSSI/GIP ULTRASON, E.I.T.  
7 Avenue Marcel DASSAULT  
BP 407,37204 TOURS Cedex 3  
Tel : (02) 47 71 12 26 - Fax: (02) 47 27 95 33  
E-mail : ouahabi@univ-tours.fr

\*\* LAUM  
Avenue O. MESSIAEN  
BP 535, 72017 LE MANS Cedex  
Tel : (02) 43 83 32 70 Fax: (02) 43 83 35 20  
E-mail : depol@laum.univ-lemans.fr

## RÉSUMÉ

Dans cet article, nous proposons une nouvelle méthode d'estimation spectrale de signaux échantillonnés selon une loi de Poisson. Notre approche est fondée sur une interpolation polygonale du signal échantillonné (aléatoirement) suivie par un rééchantillonnage (régulier) et d'une transformation de Fourier rapide usuelle. Cette étude compare les performances des interpolateurs d'ordre zéro, exponentiel et polygonal, détermine les paramètres optimaux de chaque interpolateur, et montre comment compenser le biais spectral introduit par l'interpolation polygonale. A titre d'illustration, le processus échantillonné est supposé être soit un bruit blanc (à bande limitée), soit un processus Markovien (à spectre Lorentzien).

## 1 Introduction

Habituellement, l'analyse spectrale numérique est fondée sur le principe d'un échantillonnage périodique. Toutefois, certains signaux sont générés naturellement à partir de données espacées (dans le temps) de façon aléatoire, comme c'est le cas en vélocimétrie laser (Laser Doppler Velocimetry : LDV). L'échantillonnage aléatoire peut être également volontaire en vue d'une compression de l'information. Dans une telle situation, des précautions particulières sont nécessaires en vue d'un traitement efficace.

Bien que l'échantillonnage aléatoire paraît plus naturel ou plus efficace que l'échantillonnage périodique, son utilisation a été très restreinte pour différentes raisons. La principale raison réside dans le fait que la théorie de l'échantillonnage non uniforme n'est pas aisée et qu'il n'existait pas de méthode de reconstruction simple et pratique ; il s'en suivait que généralement les données étaient supposées périodiquement échantillonnées ou étaient prétraitées de façon à aboutir à des signaux échantillonnés périodiquement.

## ABSTRACT

We propose a new method for spectral estimation of Poisson-sampled processes. Our approach is based on a polygonal interpolation from the sampled signal followed by resampling and usual fast Fourier transform.

In this study, we compare the performances of three interpolation schemes : the zero-order (sample-and-hold), the exponential hold and the polygonal interpolation procedure. The paper analyses their mean-square performances and presents spectral estimations of a band-limited white noise and a Lorentzian spectrum process.

Récemment [1], [2], la densité spectrale de signaux LDV a été estimée à partir de données aléatoirement échantillonnées où chaque valeur est maintenue constante jusqu'au prochain échantillon (correspondant à l'arrivée aléatoire de particules dans le volume de mesure). Malheureusement, le spectre mesuré est filtré (passe-bas) à la fréquence d'échantillonnage moyenne et contient le spectre d'un bruit blanc filtré introduit par les sauts de l'interpolation d'ordre zéro. Notre but est de réduire l'effet de ce bruit, spécialement aux hautes fréquences, en utilisant une simple interpolation polygonale.

Nous présentons dans ce travail une analyse comparative des performances de trois interpolateurs récemment introduits : l'interpolateur d'ordre-zéro [1], [2], l'interpolateur exponentiel [3] et l'interpolateur polygonal [4], [5], [6].

## 2 Hypothèses

Soit  $x(t)$  un processus aléatoire stationnaire. Le problème pratique qui nous intéresse est l'estimation de la densité spectrale  $S_x(f)$  du signal  $x(t)$ , et cela à partir de la séquence

$\{x(t_n)\}$  de ses échantillons délivrés aux instants aléatoires  $t_n$  tels que :

$$t_n = t_{n-1} + a_n \quad n = 0, \pm 1, \dots \quad (1)$$

où  $\{a_n\}$  sont des variables aléatoires positives et indépendantes de distribution commune

$$F(a) = 1 - \exp\{-\lambda a\} \quad (2)$$

$\lambda$  étant la fréquence moyenne d'échantillonnage. Les instants d'échantillonnage  $\{t_n\}$  sont supposés indépendants du processus  $x$ .

L'interpolation optimale consiste à déterminer une opération  $F_{t, \{m\}}$  [4], [6] de façon que

$$y(t) = F_{t, \{m\}}[\{x(t_n)\}] \quad (3)$$

soit le plus proche de  $x(t)$  pour tout  $t$ .

L'interpolateur d'ordre zéro est défini par

$$y_0(t) = x(t_n) \quad t_n < t < t_{n+1} \quad (4)$$

L'interpolateur exponentiel est défini par

$$y_e(t) = x(t_n)e^{-b(t-t_n)} \quad t_n < t < t_{n+1} \quad (5)$$

L'interpolateur polygonal définit la fonction d'approximation  $y_l(t)$  par

$$y_l(t) = \frac{(t-t_n)x(t_{n+1}) + (t_{n+1}-t)x(t_n)}{t_{n+1}-t_n}, \quad t_n < t \leq t_{n+1} \quad (6)$$

L'erreur quadratique moyenne due à l'interpolation est définie par :

$$\overline{\varepsilon^2} = E\{(x(t) - y(t))^2\} \quad (7)$$

où  $E$  désigne l'opérateur espérance mathématique,  $x(t)$  est le signal continu original et  $y(t)$  est le signal interpolé.

Dans les calculs qui suivent, le signal  $x(t)$  sera considéré d'abord comme un bruit «blanc» à bande limitée puis comme un processus à spectre Lorentzien.

### 3 Comparaison en moyenne quadratique

Dans ce paragraphe nous allons exprimer analytiquement l'erreur quadratique moyenne d'interpolation en fonction de la fréquence d'échantillonnage moyenne réduite  $u$ .

#### 3.1 $x(t)$ est un bruit blanc à bande limitée

$$S_x(f) = \frac{1}{B} \prod_B(f) = \begin{cases} \frac{1}{B} & \text{si } |f| < \frac{B}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

L'erreur quadratique moyenne introduite par l'interpolateur d'ordre zéro(sample-and-hold) est [6] :

$$\overline{\varepsilon_0^2} = 2 \left( 1 - \frac{u}{\pi} \arctan\left(\frac{u}{\pi}\right) \right) \quad (8)$$

L'erreur moyenne quadratique moyenne de reconstruction dans le cas de l'interpolation exponentielle est [7] :

$$\overline{\varepsilon_e^2} = 1 + \frac{u}{u+2d} - 2 \frac{u}{\pi} \arctan\left(\frac{u}{u+d}\right) \quad (9)$$

avec  $d = b/B$ .

La figure 1 représente  $\overline{\varepsilon_e^2}$  (cas de l'interpolateur exponentiel) pour différentes valeurs du paramètre  $d$ . Le paramètre qui minimise cette erreur quadratique moyenne est donnée (Fig. 2) par  $d_{opt} = \frac{1}{3}(\sqrt{u^2 + 3\pi^2} - u)$ , est à

la fréquence de Shannon, il vaut  $d_{opt} = 1.51$ .

L'interpolation polygonale introduit une erreur quadratique moyenne [5] égale à

$$\overline{\varepsilon_l^2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \frac{u^2}{\pi^2 + u^2} + 2 \left(\frac{u}{\pi}\right)^2 \text{Ln}\left(\frac{\pi^2 + u^2}{u^2}\right) - 4 \left(\frac{u}{\pi}\right) \arctan\left(\frac{u}{\pi}\right) \quad (10)$$

où  $u = \frac{\lambda}{B}$  est la fréquence moyenne d'échantillonnage réduite.

Il est intéressant de noter que pour les basses fréquences d'échantillonnage ( $u \rightarrow 0$ ) :

$$\overline{\varepsilon_0^2} = 2 > \overline{\varepsilon_l^2} = 1.66 > \overline{\varepsilon_e^2} = 1$$

et pour les hautes fréquences d'échantillonnage ( $u \rightarrow \infty$ ) :

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \overline{\varepsilon_l^2} = \overline{\varepsilon_e^2} = 0$$

Remarquons que  $u = 1$  définit la fréquence de Shannon ; à cette valeur

$$\overline{\varepsilon_0^2} \approx 1.20 > \overline{\varepsilon_e^2} \approx 0.68 > \overline{\varepsilon_l^2} \approx 0.57$$

En comparant ces interpolateurs (Fig. 3), nous pouvons conclure que l'interpolateur polygonal se comporte de façon nettement plus avantageuse que le «sample and hold». De plus, pour des fréquences d'échantillonnage supérieures à  $u = 0.74$ , le polygonal est plus performant que l'interpolateur exponentiel «optimal».

#### 3.2 $x(t)$ est un processus de Markov

$$S_x(f) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2}$$

L'erreur quadratique moyenne pour chaque interpolateur :

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \frac{2}{1+u} \quad (11)$$

$$\overline{\varepsilon_e^2} = 1 + \frac{u}{u+2d} - \frac{2u}{u+1+d} \quad (12)$$

avec  $d = b/\alpha$

La figure 4 représentant cette erreur quadratique moyenne pour différentes valeurs du paramètre  $d$ , montre qu'il existe une valeur optimale  $d = 1$ , d'où  $\varepsilon_{e, opt.}^2 = \frac{2}{2+u}$

$$\overline{\varepsilon_1^2} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} \frac{u^2}{(1+u)^2} + 4u^2 \text{Ln}\left(\frac{1+u}{u}\right) - 4u \quad (13)$$

où  $u = \frac{\lambda}{\alpha}$  est la fréquence moyenne d'échantillonnage réduite.

Il est facile de vérifier que les relations entre ces trois erreurs aux basses ( $u \rightarrow 0$ ) et hautes ( $u \rightarrow \infty$ ) fréquences d'échantillonnage sont identiques à celles obtenues dans le cas du bruit à bande limitée.

Par ailleurs, pour le signal à spectre Lorentzien, nous pouvons définir une fréquence de Shannon approximative correspondant à une bande de -40 dB et égale à  $u = 3.16$ ; à cette valeur  $\varepsilon_0^2 \approx 0.48 > \varepsilon_e^2 \approx 0.39 > \varepsilon_1^2 \approx 0.31$ .

En comparant ces interpolateurs (Fig. 5), nous pouvons conclure que l'interpolateur polygonal se comporte, cette fois-ci aussi, de façon nettement plus avantageuse que le «sample and hold». De plus, pour des fréquences d'échantillonnage supérieures à  $u = 0.59$ , le polygonal est plus performant que l'interpolateur exponentiel «optimal».

## 4 Estimation spectrale<sup>1</sup>

Supposons que la sortie de tout interpolateur d'un signal stationnaire peut être exprimée par

$$y(t) = h(t) * [x(t) + n(t)] \quad (14)$$

où  $h(t)$  est la réponse impulsionnelle d'un filtre passe-bas,  $x(t)$  est le signal original et  $n(t)$  est un bruit résultant successivement de l'opération d'échantillonnage aléatoire et de l'interpolation ( $x(t)$  et  $n(t)$  sont supposés indépendants). Nous pouvons alors conclure que la densité spectrale de puissance du signal interpolé est

$$S_y(f) = |H(f)|^2 (S_x(f) + S_n(f)) \quad (15)$$

où  $H(f)$  est la fonction de transfert du filtre passe-bas reliée à  $h(t)$  par transformation de Fourier, et  $S_n(f)$  est la densité spectrale de  $n(t)$ . Boyer et al. [2] ainsi que Adrian et al. [1] ont calculé le spectre du signal issu de l'interpolation d'ordre-zéro d'un signal échantillonné aléatoirement et confirmé notre formulation générale donnée en (14). Ces

auteurs ont montré que le signal interpolé est égal à la filtrée passe-bas (avec pour fréquence de coupure  $\lambda$ ) du signal original et que le terme additif représente un bruit blanc filtré par le même filtre : le filtrage passe-bas est causé par la perte d'information qui survient durant les instants de maintien (hold) de chaque échantillon et le bruit blanc est créé par les sauts aléatoires qui interviennent à chaque nouvel échantillon.

Récemment, Host-Madsen et al. [4] ont montré que l'effet de l'interpolation exponentielle aboutit au même résultat que précédemment mais la fréquence de coupure du filtre passe-bas est, cette fois-ci, égale à  $\lambda + b$ , où  $b$  est le paramètre de l'interpolateur exponentiel.

Notons que pour  $b = 0$ , nous retrouvons bien l'interpolateur exponentiel.

Nous montrons en [7] que dans le cas de l'interpolateur polygonal, l'expression (14) est encore vérifiée et comme prévu le filtrage est également passe-bas mais le terme additif  $n(t)$  n'est plus un bruit blanc mais un bruit filtré passe-bas (filtrage passe-bas d'ordre supérieur).

Il est aisé de vérifier que la connaissance de la fréquence moyenne d'échantillonnage est suffisante pour restorer ou compenser le spectre interpolé en le multipliant par l'inverse de l'enveloppe Lorentzienne  $|H(f)|^2$ .

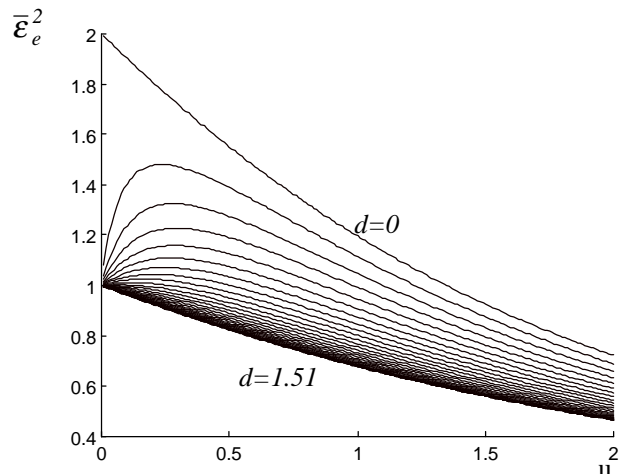


Fig.1 Erreur quadratique moyenne de l'interpolation exponentielle pour différentes valeurs du paramètre  $d$ : bruit blanc à bande limitée

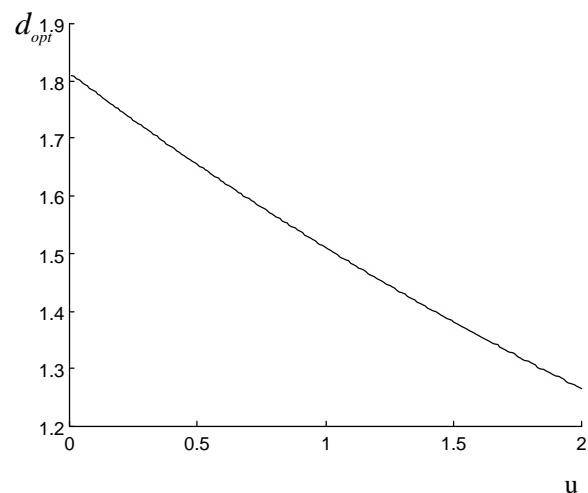


Fig.2. Paramètre  $d$  de l'interpolateur exponentiel en fonction de la fréquence moyenne d'échantillonnage.

<sup>1</sup> Les résultats présentés ont été confirmés expérimentalement dans [6] et [7] où la partie estimation spectrale est détaillée.<sup>1</sup>

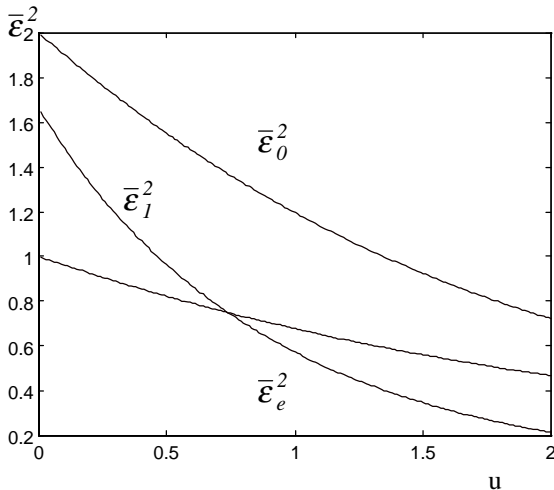


Fig. 3. Comparaison de l'erreur quadratique moyenne : cas d'un bruit blanc à bande limitée

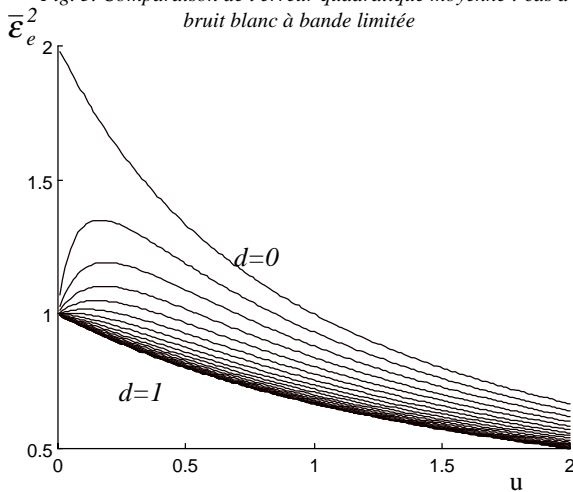


Fig.4 Erreur quadratique moyenne de l'interpolation exponentielle pour différentes valeurs de: bruit Lorentzien.

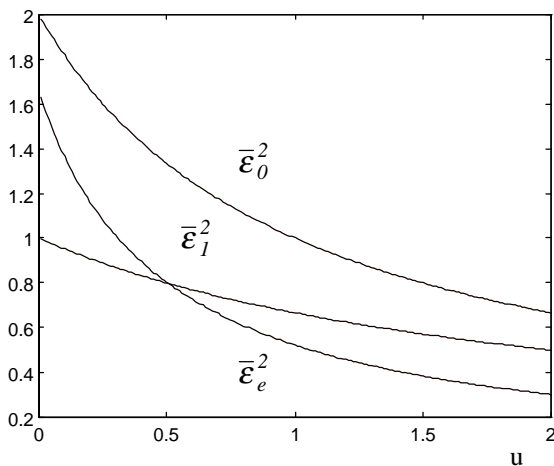


Fig. 5. Comparaison de l'erreur quadratique moyenne : cas d'un bruit Markovien (à spectre Lorentzien)

## 5 Conclusions

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'interpolation de signaux échantillonnés aléatoirement et obtenus des résultats analytiques sous l'hypothèse que l'échantillonnage obéit à une loi de Poisson. Nous avons

montré que l'effet du bruit additif est réduit de façon significative par simple interpolation polygonale, particulièrement aux hautes fréquences du spectre mesuré où la distorsion est nettement plus faible que dans le cas des interpolateurs d'ordre-zéro et exponentiel.

Bien que cette étude soit motivée initialement par les besoins de l'analyse spectrale de signaux L.D.V., les idées qui en découlent sont fondamentales dans diverses applications, notamment en instrumentation, communication, control, biomédical, radio-astronomy, géophysique,...

## 6 Références

- [1] R. J. Adrian and C. S. Yao, "Power spectra of fluid velocities measured by laser Doppler velocimetry," *Exp. in Fluids*, vol. 5, pp. 17-28, 1987.
- [2] L. Boyer and G. Serby, "Random sampling: distortion and reconstruction of velocity spectra from fast Fourier transform analysis of the analog signal of laser Doppler processor," *J. Appl. Phys.*, vol. 60, n° 8, pp. 2699-2707, 1986.
- [3] A. Host-Madsen and C. Caspersen, "Spectral estimation for random sampling using interpolation," *Signal Processing*, 46, 297-313, 1995.
- [4] A. Ouahabi, C. Depollier, L. Simon, D. Kouamé and M. Lethiecq, "Random sampling: spectrum of fluid measured by Doppler velocimetry," *Proc. IEEE Instrumentation and Measurement*, 1996.
- [5] A. Ouahabi, C. Depollier, L. Simon, D. Kouamé, J. F. Roux and F. Patat, "Spectral analysis of randomly sampled processes," *EUSIPCO*, 1996.
- [6] A. Ouahabi, C. Depollier, L. Simon, D. Kouamé and M. Lethiecq, "Spectrum estimation from randomly velocity data," à paraître (juillet 1997) *Trans. IEEE Instrumentation & Measurement*.
- [7] A. Ouahabi, C. Depollier, L. Simon, "New results in spectral estimation of randomly sampled", *EURASIP/IEEE (International Workshop on Sampling Theory & Applications, Aveiro, 1977)*.