

# La méthode ACM-MUSIC généralisée sans estimation du nombre de composantes sinusoïdales

Olivier Caspary et Patrice Nus

Centre de recherche en Automatique de Nancy  
Université H. Poincaré, Nancy 1  
11, rue de l'Université - 88100 Saint-Dié  
Tél. : 03.29.51.65.38 - Fax : 03.29.51.65.21  
E-mail : ocaspary@cran.iutsd.u-nancy.fr

## RÉSUMÉ

La famille des estimateurs fréquentiels MUSIC est souvent utilisée dans le cadre de l'analyse spectrale de signaux sinusoïdaux. L'un de ces estimateurs, appelé ACM-MUSIC, repose sur l'estimation directe des vecteurs formant les sous-espaces signal et bruit à partir de la matrice d'autocorrélation. Nous proposons d'employer la méthode de la puissance itérée pour améliorer l'estimation de ces vecteurs. De plus, au lieu d'estimer le nombre de composantes du signal à l'aide de critères tels que les critères AIC et MDL, nous utilisons une pondération judicieuse permettant d'effectuer la séparation des sous-espaces signal et bruit. Les résultats montrent des spectres fréquentiels proches de ceux obtenus par l'estimateur MUSIC auquel on a associé la décomposition en valeurs propres de la matrice d'autocorrélation. Cependant, la complexité numérique de la méthode proposée est moindre, et le choix du nombre de composantes sinusoïdales peut être évité. L'approche proposée s'applique également à l'estimateur ROOT-ACM-MUSIC qui est une extension directe de ACM-MUSIC.

## 1 Introduction

Parmi les estimateurs fréquentiels haute résolution appartenant à la famille de l'estimateur MUSIC, notre intérêt se porte sur l'estimateur ACM-MUSIC, connu notamment pour être plus robuste que l'estimateur MUSIC dans le cas d'une surestimation du nombre de composantes du signal noyées dans du bruit blanc gaussien [1]. ACM-MUSIC fait partie des méthodes dont l'estimation des vecteurs propres et des valeurs propres ne s'effectue pas à l'aide d'une technique numérique de décomposition. La technique employée consiste à chercher des approximations des sous-espaces signal et bruit. Ces derniers sont directement ou indirectement construits à partir de la matrice d'autocorrélation estimée, généralement mise sous forme de covariance modifiée pour obtenir une meilleure résolution fréquentielle. Certaines méthodes préconisent la formation d'une matrice de projection  $P$  appropriée [2], d'autres préconisent le partitionnement de la matrice d'autocorrélation pour ensuite former la matrice  $P$ , ou bien s'inspirent du principe de la prédiction linéaire [3].

Dans cet article, nous proposons d'améliorer l'estimation directe des vecteurs propres à l'aide de la

## ABSTRACT

The family of MUSIC frequential estimators is often used in the case of the spectral analysis of sinusoidal signals. One of those estimators, called ACM-MUSIC, is based on the direct estimation of the vectors which constitute the signal and noise subspaces thanks to the autocorrelation matrix. In this paper, we suggest using the iterated power method in order to improve the estimation of those vectors. Besides, instead of estimating the number of signal components with criteria such as AIC and MDL, we resort to a judicious weighting which enables us to separate the signal and noise subspaces. The results show frequential spectra close to those obtained by the MUSIC estimator to which has been associated the decomposition of the autocorrelation matrix into eigenvalues. However, the numerical calculation of the proposed method can be lower, and the choice of the number of sinusoidal components can be avoided. That approach can also be applied to the ROOT-ACM-MUSIC estimator, which is a direct extension of the ACM-MUSIC.

méthode de la puissance itérée, afin de construire une base vectorielle plus précise [4]. De plus, à la base vectorielle, nous appliquons une pondération qui permet d'éviter l'estimation du nombre de composantes sinusoïdales [5]. Cette pondération repose sur une combinaison des pondérations de Silverstein et Choi et nous permet d'atteindre des résultats comparables à ceux obtenus par l'estimateur MUSIC quand ce dernier est utilisé avec le nombre exact de composantes.

La section 2 présente la méthode ACM-MUSIC que nous généralisons dans la section 3 et dont nous étendons le principe à la méthode ROOT-MUSIC [6] dans la section 4. La dernière section fournit les performances obtenues avec ces différentes méthodes.

## 2 La méthode ACM-MUSIC

La méthode ACM-MUSIC repose sur l'estimation du sous-espace signal effectuée à partir de la matrice d'autocorrélation estimée  $\hat{R}$  de dimension  $(N,N)$ . Elle constitue un compromis entre la résolution, le coût de calcul et la simplicité de mise en oeuvre par rapport à la méthode DFT-MUSIC (voir référence [1]) ou d'autres techniques

d'approximation. Ainsi, les vecteurs propres  $\mathbf{v}_i$  sont directement estimés par :

$$\mathbf{v}_i = \hat{R} \mathbf{w}(f_i) \quad (1)$$

pour  $i = 1, \dots, N$  et où  $\mathbf{w}$  représente une transformation orthogonale quelconque et  $\mathbf{w}(f_i)$  les vecteurs de direction de  $\mathbf{w}$ . Pour un signal réel, la transformation retenue est la Transformée en Cosinus Discrète (TCD) et, pour un signal complexe, la Transformée de Fourier. Les  $N$  fréquences  $f_i$  sont linéairement espacées avec un écart de  $1/N$  sur l'intervalle des fréquences normalisées. La matrice  $E$  contenant les vecteurs colonnes  $\mathbf{v}_i$  est définie par :

$$E = [\mathbf{v}_1 \quad \dots \quad \mathbf{v}_N] \quad (2)$$

et le sous-espace signal estimé  $E_s$  correspond aux  $M$  vecteurs  $\mathbf{v}_i$  dont les normes au carré sont les plus grandes, classées selon leur valeur décroissante. Cela correspond à maximiser la fonction suivante :

$$P(f_i) = \mathbf{w}^H(f_i) \hat{R}^2 \mathbf{w}(f_i) \quad (3)$$

ce qui n'est possible que dans les conditions suivantes : des vecteurs  $\mathbf{v}_i$  similaires aux vecteurs signaux  $\mathbf{s}_i$  de la matrice d'autocorrélation théorique, définis par :

$$\mathbf{s}_i = [1 \quad e^{j2\pi f_i} \quad \dots \quad e^{j2\pi f_i(N-1)}]^T \quad (4)$$

et des vecteurs  $\mathbf{v}_i$  choisis mutuellement orthogonaux. Les maxima de  $P(f_i)$  sont alors similaires au carré des plus grandes valeurs propres de  $\hat{R}$ . D'une manière équivalente, on considère les valeurs  $\|\mathbf{v}_i\|^2$  maximales. Les vecteurs signaux  $\mathbf{s}_i$  sont liés aux vecteurs  $\mathbf{v}_i$  par des combinaisons linéaires telles que :

$$\mathbf{s}_m = \sum_{i=1}^M \alpha_{mi} \mathbf{v}_i + \mathbf{n}_m \quad (5)$$

où  $\mathbf{n}_m$  représente le vecteur d'erreur et  $m = 1, \dots, M$ .

Pour déterminer les coefficients  $\alpha_{mi}$ ,  $\mathbf{n}_m$  est minimisé au sens des moindres carrés. Par définition, la matrice de projection  $P$  de dimension  $(N,N)$  sur le sous-espace signal  $E_s$  étant de la forme :

$$P = E_s (E_s^H E_s)^{-1} E_s^H \quad (6)$$

nous obtenons l'expression suivante de  $\mathbf{n}_m$  :

$$\mathbf{n}_m = (I - P) \mathbf{s}_m \quad (7)$$

où  $I$  est la matrice identité de dimension  $(N,N)$  et où  $I-P$  représente une projection orthogonale à  $P$ . La norme au carré de  $\mathbf{n}_m$  à minimiser est alors décrite par l'équation suivante :

$$\|\mathbf{n}_m\|^2 = \mathbf{s}_m^H (I - P) \mathbf{s}_m = N - \mathbf{s}_m^H P \mathbf{s}_m \quad (8)$$

Pour simplifier l'expression de  $P$ , on orthonormalise  $E_s$ , qui devient  $O_s$  tel que  $O_s = [\mathbf{o}_1 \quad \dots \quad \mathbf{o}_M]$  avec la propriété  $O_s^H O_s = I$ . La procédure d'orthonormalisation importe

peu. En général, il s'agit de la procédure de Gram-Schmidt modifiée ou bien de la factorisation QR. Finalement, l'équation précédente devient :

$$\|\mathbf{n}_m\|^2 = N - \sum_{i=1}^M |\mathbf{s}_m^H \mathbf{o}_i|^2 \quad (9)$$

et représente le dénominateur de l'estimateur MUSIC quand les vecteurs signaux sont tels que  $\mathbf{s}_m = \mathbf{w}(f_m)$ . Comme le montre l'équation (9), la méthode ACM-MUSIC consiste à remplacer, dans l'estimateur fréquentiel MUSIC, les vecteurs propres estimés par décomposition numérique par ceux estimés à partir de la matrice d'autocorrélation.

### 3 Généralisation de ACM-MUSIC

Les performances de la méthode ACM-MUSIC dépendent de l'estimation de la matrice d'autocorrélation, donc du nombre d'échantillons du signal. Elles dépendent également du choix initial des vecteurs  $\mathbf{w}(f)$  (voir équation (1)). C'est pourquoi, pour réduire l'influence de ce choix et améliorer l'estimation de la base vectorielle, nous proposons d'employer la méthode de la puissance itérée. En effet, avec cette méthode, si le nombre d'itérations tend vers l'infini et si les dimensions des sous-espaces sont connues exactement, les vecteurs obtenus sont alors égaux aux vecteurs propres. Dans notre cas, le nombre d'itérations est déterminé à l'aide de l'angle formé entre l'ancienne base vectorielle et la nouvelle car il permet de mesurer la quantité d'information apportée par cette nouvelle base. Pour réduire les coûts de calcul, nous supposons que la quantité d'information nouvelle est identique pour chaque vecteur constituant la base. Ainsi, un seul vecteur de la base est nécessaire pour le calcul de l'angle.

La méthode ACM-MUSIC généralisée, que nous appelons G-ACM-MUSIC, se décompose de la manière suivante :

1. Calcul de la base vectorielle à l'aide de la méthode de la puissance itérée :

Initialisation :  $\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{w}(f_i) \quad j = 0, i = 1 \dots N$

Généralisation :  $\mathbf{v}_i^j = \hat{R} \mathbf{v}_i^{j-1} \quad j = 1 \dots J, i = 1 \dots N$

où les vecteurs  $\mathbf{w}(f_i)$  sont définis par :

$$\mathbf{w}(f_i) = [1 \quad \dots \quad \cos(\pi f_i(N-1))]^T \quad (10)$$

Ces vecteurs sont pris comme vecteurs initiaux car ils permettent de balayer uniformément le spectre dans l'intervalle  $[0; 0,5]$  pour des signaux réels. La matrice d'autocorrélation estimée (ACM)  $\hat{R}$ , de dimension  $(N,N)$ , est sous la forme covariance modifiée.

Pour déterminer le nombre d'itérations  $J$ , nous calculons à chaque itération l'angle entre les vecteurs  $\mathbf{v}_i^j$  et  $\mathbf{v}_i^{j-1}$ , par exemple en choisissant  $i=1$ . Si cet angle (ou son cosinus) est sous un seuil préalablement choisi, alors la procédure d'itération est arrêtée et nous déduisons  $J$ . A noter que  $J=1$  correspond à la méthode ACM-MUSIC.

2. Calcul du carré des normes  $\|\mathbf{v}_i^J\|^2$  des  $\mathbf{v}_i^J$  vecteurs. Ces normes au carré jouent le même rôle que celui des valeurs propres. Au lieu de choisir les vecteurs ayant les normes les plus grandes pour définir le sous-espace signal, nous préférons appliquer une pondération adéquate évitant l'estimation du nombre de composantes (voir réf. [5]). Cette pondération est la suivante :

$$\alpha_i = \left(l_i/l_p\right)^n + \beta \left(\bar{l}/l_p\right)^n \quad (\alpha_i : \text{pseudo-valeurs propres})$$

où  $l_i = \|\mathbf{v}_i^J\|^2$ ,  $\bar{l}$  est la moyenne des  $l_i$ ,

$$\beta = \frac{C_i^n - C_f}{(C_f - 1)(\bar{l}/l_N)^n} \text{ avec le conditionnement initial}$$

$C_i = l_i/l_N$  et le conditionnement final  $C_f = \alpha_1/\alpha_N$  qui dépend de la précision de la machine. Dans notre cas, nous choisissons  $C_f = 10^{13}$  comme valeur constante. En pratique, n est limité à une valeur raisonnable ( $n < 10$ ) pour ne pas augmenter l'écart entre les pseudo-valeurs propres d'une manière inconsidérée, parce que la plus petite pseudo-valeur propre supposée être associée au sous-espace signal, peut alors être considérée comme étant associée au sous-espace bruit.

3. Orthonormalisation des vecteurs  $\mathbf{v}_i^J$  pour produire une base orthonormale  $\mathbf{O} = [\mathbf{o}_1 \ \dots \ \mathbf{o}_N]$ . Si le nombre de composantes est connu précisément, ce qui est rarement le cas en pratique, uniquement un nombre équivalent de vecteurs ayant les normes les plus grandes sont orthonormalisés afin de réduire le coût de calcul.

4. Calcul de l'estimateur fréquentiel MUSIC pondéré  $S_{MUP}$  par les pseudo-valeurs propres, soit :

$$S_{MUP}(f_m) = \frac{1}{\mathbf{w}^H(f_m) \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{o}_i \mathbf{o}_i^H \right) \mathbf{w}(f_m)} \quad (11)$$

l'estimateur donne théoriquement une valeur infinie quand  $\mathbf{w}(f_m) = \mathbf{o}_i$ . En pratique, il présente des pics fréquentiels.

La pondération utilisée permet de ne pas effectuer de choix a priori du nombre de composantes. Cependant, elle a pour conséquence une augmentation du coût de calcul de la méthode G-ACM-MUSIC car l'orthonormalisation doit s'effectuer sur l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{v}_i^J$  et non plus seulement sur ceux associés aux normes les plus grandes.

## 4 La méthode G-ROOT-ACM-MUSIC

De même que pour l'estimateur MUSIC il existe la version bien connue ROOT-MUSIC, nous avons pour ACM-MUSIC, la version ROOT-ACM-MUSIC. Cette version utilise le fait que le dénominateur de l'équation (11) tend vers zéro quand  $z = e^{j\omega_i}$  avec  $i = 1, \dots, M$ , ce qui

correspond à M racines sur le cercle unité aux fréquences du signal, les autres racines étant erronées. Elle repose sur la définition d'un filtre  $f_i(z)$  dont les coefficients sont les composantes du vecteur  $\mathbf{o}_i$ , soit :

$$f_i(z) = \mathbf{o}_i(0) + \dots + \dots + \mathbf{o}_i(N-1) z^{-(N-1)} \quad (12)$$

Le dénominateur de l'équation (11) prend alors la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} \mathbf{w}^H(f_m) \mathbf{o}_i \mathbf{o}_i^H \mathbf{w}(f_m) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\alpha_i} f_i(z) f_i^*(z) \quad (13)$$

avec l'égalité  $f_i^*(z) = f_i^*(1/z^*)$ .

Le dénominateur a bien M racines sur le cercle unité qui sont en réalité des racines doubles. Pour la généralisation de la méthode ROOT-ACM-MUSIC, les vecteurs  $\mathbf{o}_i$  employés sont ceux obtenus après l'orthonormalisation des vecteurs  $\mathbf{v}_i^J$ . Cette méthode est appelée G-ROOT-ACM-MUSIC, par analogie à la méthode G-ACM-MUSIC.

## 5 Résultats

Pour illustrer l'intérêt de cette approche, nous choisissons un exemple représentatif de deux composantes sinusoïdales noyées dans un bruit blanc gaussien  $\mathbf{b}$  de variance unitaire, avec deux rapports signal sur bruit (RSB) différents. Le signal simulé est décrit par l'équation suivante :

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + b(t) \quad (14)$$

où  $t=1, \dots, 64$ ,  $A_1=14,14$  (20 dB),  $A_2=4,47$  (10 dB) et  $f_1=0,25$ ,  $f_2=0,26$  sont les fréquences normalisées. Le sous-espace signal est de dimension  $M=4$ . L'estimateur ACM-MUSIC ( $J=1$ ) ne distingue pas les deux composantes de fréquences proches, comparé à la méthode de référence qui est MUSIC (voir figure 1) avec M supposé connu.

Echelle verticale : amplitudes relatives en dB.

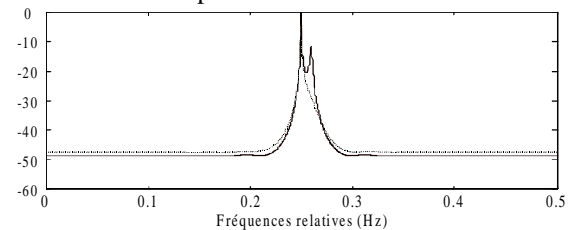


Fig. 1. Estimateurs MUSIC ( $M=4$ ) (-) et ACM-MUSIC ( $M=4, J=1$ ) (--).

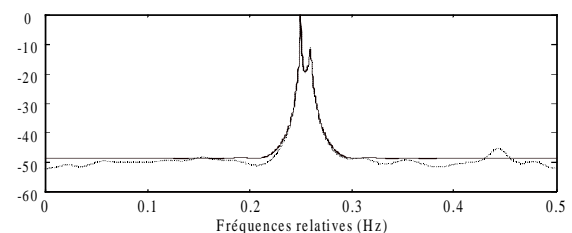


Fig. 2. Estimateurs G-ACM-MUSIC ( $M=4, J=2$ ) (-) et G-ACM-MUSIC pondéré ( $n=6, J=2$ ) (--).

En appliquant la méthode G-ACM-MUSIC avec  $J=2$  (voir figure 2), l'estimateur fréquentiel obtenu est similaire à

l'estimateur MUSIC de la figure 1. Associé à notre pondération, G-ACM-MUSIC permet d'étendre la gamme des valeurs de  $n$  de 3 à 8, tout en distinguant les deux composantes fréquentielles.

Les figures suivantes (figures 3 à 9) montrent les résultats obtenus à partir du signal de l'équation (14) par la méthode ROOT-MUSIC et sa version G-ROOT-ACM-MUSIC avec et sans pondération. La représentation polaire est réalisée à partir des racines du polynôme obtenu après sommation dans l'équation (13). Quand  $M$  est exactement connu ( $M=4$ ), la méthode ROOT-MUSIC distingue parfaitement les deux composantes du signal qui correspondent aux zéros placés sur le cercle unité (voir figure 3), tandis que ROOT-ACM-MUSIC ne présente pas un pouvoir de résolution suffisant (voir figure 4). La généralisation de ROOT-ACM-MUSIC, illustrée par la figure 5, permet d'obtenir des performances équivalentes à ROOT-MUSIC. La pondération associée à cette généralisation, qui s'affranchit de l'estimation du nombre de composantes, permet de trouver les deux composantes, mais les zéros liés au bruit sont plus proches de la valeur unitaire. Dans le cas d'une surestimation de  $M$ , en prenant  $M=8$ , la méthode ROOT-MUSIC présente des zéros liés au bruit sur le cercle unité venant s'ajouter à ceux associés aux fréquences du signal (voir figure 7). Comme précédemment, la méthode ROOT-ACM-MUSIC a un pouvoir de résolution insuffisant (voir figure 8) tandis que sa généralisation présente un bon compromis entre les deux méthodes précédentes, car les zéros dus au bruit sont éloignés de la valeur unitaire et ceux dus aux composantes sont sur le cercle unité.

## 6 Conclusion

Bien qu'offrant des performances comparables aux méthodes MUSIC et ROOT-MUSIC, les complexités numériques des méthodes G-ACM-MUSIC et G-ROOT-ACM-MUSIC sont très élevées dès que  $J$  est supérieur à 2. C'est pourquoi nous nous limitons au choix  $J=2$  qui s'avère suffisant dans la plupart des cas, car les vecteurs initiaux choisis sont proches des vecteurs propres. De plus, il est rarement nécessaire d'effectuer une analyse spectrale sur toute la bande. En utilisant de l'information a priori, apportée par exemple par le périodogramme, on peut sélectionner quelques vecteurs initiaux correspondant aux maxima du périodogramme pour construire le sous-espace signal estimé. Cette démarche permet de réduire considérablement les calculs, sans perte de performances en terme de séparation de fréquences.

La méthode G-ACM-MUSIC pondérée donne des résultats comparables à la méthode MUSIC pour des rapports signal sur bruit moyens et forts si, dans le cas de MUSIC, le nombre de composantes est connu précisément. Il en est de même dans le cas d'une représentation polaire, avec une méthode que nous appelons G-ROOT-ACM-MUSIC et la méthode ROOT-MUSIC. De plus, G-ACM-MUSIC et G-ROOT-ACM-MUSIC offrent une plus large gamme de valeurs de  $n$  pour la pondération et sont plus robustes quand le nombre de composantes est surestimé.

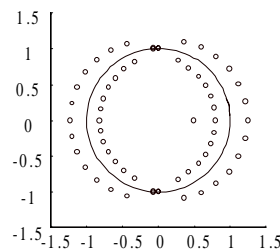


Fig. 3. ROOT-MUSIC ( $M=4$ ).

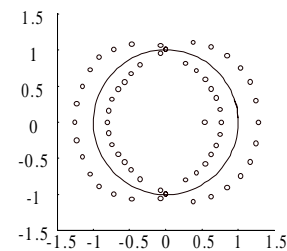


Fig. 4. ROOT-ACM-MUSIC ( $M=4, J=1$ ).

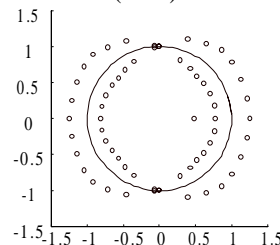


Fig. 5. G-ROOT-ACM-MUSIC ( $M=4, J=2$ ).

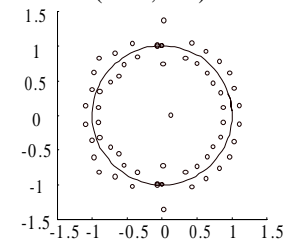


Fig. 6. G-ROOT-ACM-MUSIC (pondération :  $n=6, J=2$ ).

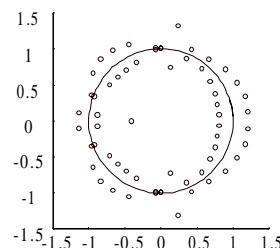


Fig. 7. ROOT-MUSIC ( $M=8$ ).

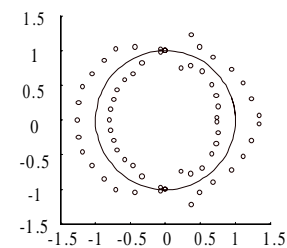


Fig. 8. ROOT-ACM-MUSIC ( $M=8, J=1$ ).

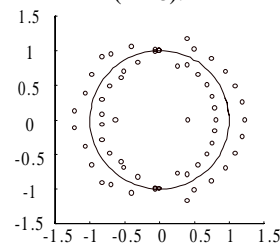


Fig. 9. G-ROOT-ACM-MUSIC ( $M=8, J=2$ ).

## Références

- [1] Karhunen J., Joutsensalo J., "Sinusoidal frequency estimation by signal subspace approximation", IEEE Trans. on SP, vol. 40, n°12, pp. 2961-2972, December 1992.
- [2] Yeh C., "Simple computation of projection matrix for bearing estimations", IEE Proc., Part F, vol. 134, n°2, pp. 146-150, April 1987.
- [3] Davila C. E., Azmoodeh M., "Efficient estimation of the signal subspace without eigendecomposition", IEEE Trans. on SP, vol. 42, n°1, pp. 236-239, January 1994.
- [4] Golub G. H., Van Loan C. F., "Matrix computations", 2° ed., Johnss Hopkins University Press, Baltimore, 1989.
- [5] Caspary O., Dalponte D., Tomczak M., Brie D., "Analyse spectrale haute résolution sans estimation du nombre de composantes sinusoidales", Actes du quinzième colloque GRETSI, Juan-les-Pins, pp. 41-44, septembre 1995.
- [6] Barabell A. J., "Improving the resolution ...", Proc. of ICASSP, pp. 336-339, Boston, Massachusetts, 1983.