

# Sur l'estimation autorégressive des processus périodiquement corrélés

Sophie Lambert

Laboratoire LMC-IMAG, UMR CNRS 5523, BP 53

F-38041 Grenoble cedex 9, France

## RÉSUMÉ

La classe des processus périodiquement corrélés est intéressante aussi bien sur le plan pratique que théorique. Nous considérons ici le problème de l'estimation de la structure au second ordre des processus autorégressifs périodiques (*ARP*) en utilisant la paramétrisation par les autocorrélations partielles. Pour cela nous proposons une estimation naturelle de ces paramètres. La comparaison avec les méthodes existantes est effectuée en regroupant certaines d'entre elles dans une même méthodologie mais aussi par simulation. Nous considérons également le rapport entre ces approches et celles liées aux processus vectoriels.

## ABSTRACT

The periodically correlated processes have a practical and theoretical interest. We consider the estimation problem of the second order structure for periodic autoregressive processes by using the parametrization in term of partial autocorrelation coefficients. For this, we propose a natural estimation of these parameters. The comparison with other methods is made by fitting some of them in a general framework and by simulation. We consider also the relation between these approaches and the one associated with the multivariate processes.

## 1 Introduction

Les processus périodiquement corrélés ont été introduits par Gladyshev [8]. On trouve essentiellement trois méthodes pour estimer la structure au second ordre des processus *ARP*. Celle de Pagano [13] constitue une extension de la méthode de Yule-Walker. Celles de Bosnhakov [1] et de Sakai [15] sont deux extensions différentes de la méthode de Burg. Nous proposons d'étendre deux autres méthodes aux processus périodiquement corrélés. La première est celle des autocorrélations partielles empiriques (*ACPE*) introduites par Dégerine dans le cas stationnaire scalaire [3] puis vectoriel [4]. La seconde est celle de Dickinson (*REER*) présentée aussi dans les situations scalaire [6] et vectorielle [7]. Les méthodes de type Burg et *ACPE* sont regroupées dans une même méthodologie permettant ainsi de les comparer facilement.

Les processus périodiquement corrélés sont en correspondance biunivoque avec les processus stationnaires vectoriels (cf. [8]). Ainsi, les méthodes d'estimations du cas scalaire donnent lieu à des méthodes pour la situation vectorielle stationnaire et inversement. Cependant les analogues vectoriels des méthodes [1] et [15] de type Burg, bien que comparables dans leur conception à celle de Nuttall [12] (cf. aussi [16]) et à celle de Morf et coll. [11] respectivement, ne leur sont pas équivalentes. Par contre, cette équivalence est satisfaite pour les méthodes *ACPE* ou *REER* pour certains modèles *ARP*. Ceci est également vrai pour la méthode de type Yule-Walker qui peut être considérée aussi bien d'un point de vue scalaire que vectoriel.

La Section 2 est constituée de rappels sur les modèles *ARP*. Les méthodes d'estimation scalaires et vectorielles sont présentées et comparées dans les deux sections qui suivent.

Dans la Section 5, des résultats de simulation illustreront le comportement des différentes approches scalaires. Des preuves détaillées, plusieurs commentaires et illustrations sont disponibles dans [10].

## 2 Modèle autorégressif périodique

Soit  $X(1), \dots, X(m)$ , une séquence issue d'un modèle *ARP* à valeurs complexes, de période  $T$  et d'ordre  $(p_1, \dots, p_T)$ ,

$$\sum_{k=0}^{p_t} a_t(k)X(t-k) = \varepsilon(t), \quad a_t(0) = 1, \quad (1)$$

où  $\varepsilon(\cdot)$  est le processus d'innovation de variance  $\sigma_t^2$ , avec  $\sigma_{t+T}^2 = \sigma_t^2$ ,  $p_{t+T} = p_t$  et  $a_{t+T}(k) = a_t(k)$ ,  $k = 1, \dots, p_t$ . Utilisant le produit hermitien  $\langle U, V \rangle = E\{U\bar{V}\}$  dans l'espace de Hilbert engendré par  $X(\cdot)$ , la fonction d'autocovariance  $R(\cdot, \cdot)$  est donnée par  $R(t, s) = \langle X(t), X(s) \rangle$ ,  $(t, s) \in \mathbb{Z}^2$ . Pour les processus périodiquement corrélés, la fonction  $R(\cdot, \cdot)$  satisfait  $R(t+T, s+T) = R(t, s)$  [8] et le modèle (1) est caractérisé par les coefficients  $R(t, t-k)$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $0 \leq k \leq p_t$ . Nous préférons retenir la paramétrisation par la fonction d'autocorrélation partielle facilement identifiable par rapport à  $R(\cdot, \cdot)$  qui doit être de type positif. Rappelons la définition de  $\beta(\cdot, \cdot)$  caractérisant la structure au second ordre des processus non stationnaires [5] et qui satisfait  $\beta(t+T, s+T) = \beta(t, s)$  [10] dans le cas périodique. On note  $\varepsilon^f(t; s)$  et  $\varepsilon^b(s; t)$ , les innovations partielles d'ordre  $t-s$  progressive et rétrograde de variances respectives  $\sigma^{f2}(t; s)$  et  $\sigma^{b2}(s; t)$ . Les innovations normalisées associées sont définies par  $(\varepsilon^f(t; t) = \varepsilon^b(t; t) = X(t)) \eta^f(t; s) =$

$\varepsilon^f(t; s)/\sigma^f(t; s)$ ,  $\eta^b(s; t) = \varepsilon^b(s; t)/\sigma^b(s; t)$  avec la convention  $0^{-1} = 0$ . On pose  $\beta(t, t) = R(t, t)$  et pour  $s < t$ ,  $\beta(t, s)$  est la corrélation partielle entre  $X(t)$  et  $X(s)$  dans l'ensemble  $\{X(s), \dots, X(t)\}$ ,

$$\overline{\beta(s, t)} = \beta(t, s) = \langle \eta^f(t; s+1), \eta^b(s; t-1) \rangle. \quad (2)$$

Le module de  $\beta(t, s)$  est généralement plus petit que 1, atteignant 1 pour des singularités d'ordre fini (i.e.  $s$  est le plus grand entier tel que  $X(t) \in L\{X(s), \dots, X(t-1)\}$ ). Ainsi le modèle (1) est caractérisé par  $\beta_t(k) = \beta(t, t-k)$ , avec  $\beta_t(k) = 0$  pour  $k > p_t$  [9]. La correspondance biunivoque entre  $\beta(\cdot, \cdot)$  et  $R(\cdot, \cdot)$  est réalisée par un algorithme de type Levinson-Durbin [15, 14] qui fournit également les paramètres du modèle.

Sur le plan théorique, les processus périodiquement corrélés sont intéressants car intimement liés aux processus vectoriels stationnaires. A chaque processus  $X(\cdot)$  périodiquement corrélé de période  $T$ , correspond un processus  $Y(\cdot)$   $T$ -dimensionnel stationnaire dont la  $j$ -ème composante est donnée par  $Y_j(t) = X(j + T(t-1))$ ,  $j = 1, \dots, T$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , et inversement [8]. De plus  $X(\cdot)$  est  $ARP(p_1, \dots, p_T)$  si et seulement si [13]  $Y(\cdot)$  est autorégressif stationnaire ( $AR$ ) d'ordre  $p$ , avec  $p = \max_j [(p_j - j)/T] + 1$  ( $[x]$  est la partie entière de  $x$ ). Les modèles  $ARP$  semblent plus intéressants que les modèles  $AR$  car ils comportent souvent moins de paramètres. En effet, désignons par  $ARP(p, \max)$ , les modèles  $ARP$  tels que  $p_i = pT + i - 1$ ,  $i = 1, \dots, T$ . Ces modèles sont les seuls pour lesquels le nombre de paramètres est égal à celui du processus vectoriel associé. Pour les autres processus  $ARP$ , le nombre de paramètres est strictement inférieur et cette différence peut être importante.

### 3 Les approches scalaires

La méthode de Pagano [13] consiste à ajuster le modèle  $ARP(p_1, \dots, p_T)$  dont la structure est donnée, pour  $t = 1, \dots, T$ ,  $0 \leq t-s \leq p_t$ , par les autocovariances empiriques biaisées usuelles. Bien que ces quantités soient les premiers coefficients d'une fonction d'autocovariance, l'existence du modèle  $ARP$  n'est pas assurée sauf lorsque  $p_{i+1} \leq p_i + 1$ ,  $i = 1, \dots, T$ . Sinon on peut vérifier de façon algorithmique l'existence d'une solution  $ARP$  et simultanément obtenir les estimations des coefficients d'autocorrélation partielle et des paramètres du modèle lorsqu'il est défini (cf. [10]).

Comme dans le cas stationnaire [3, 4], la méthode  $ACPE$  est basée sur une analyse géométrique naturelle des observations. Les séquences de longueur  $t-s-1$ , considérées de façon périodique, nous amènent à introduire le sous-espace vectoriel de  $C^{m_t+1}$ ,  $m_t = \lfloor \frac{m-t}{T} \rfloor$ , engendré par les vecteurs, définis pour  $u = s, \dots, t$ , par,

$$X_{m_t}(u) = [X(u), X(u+T), \dots, X(u+m_t T)]^T,$$

et muni du produit hermitien

$$\langle X_{m_t}(u), X_{m_t}(v) \rangle_e = \frac{1}{m_t + 1} \sum_{j=0}^{m_t} X(u + jT) \overline{X(v + jT)}.$$

En effet la structure obtenue reproduit, en moyenne, celle de la

séquence  $\{X(s), \dots, X(t)\}$  au sens où  $E\{\langle X_{m_t}(u), X_{m_t}(v) \rangle_e\} = R(u, v)$ . Ainsi, les coefficients  $\hat{\beta}_{acpe}(t, s)$ , sont les "corrélations partielles" entre  $X_{m_t}(s)$  et  $X_{m_t}(t)$  dans l'ensemble  $\{X_{m_t}(s), \dots, X_{m_t}(t)\}$ , selon cette analogie. C'est-à-dire que  $\hat{\beta}_{acpe}(s, s) = \|X_{m_t}(s)\|_e^2$ ,  $s = 1, \dots, T$ , et pour  $0 < t-s \leq p_t \leq m_t$ ,  $\hat{\beta}_{acpe}(t, s)$  est donné par (2) en remplaçant  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$  et les innovations partielles par les erreurs de prédiction obtenues selon le critère des moindres carrés. La mise en oeuvre de cette méthode nécessite a priori autant de décompositions de Cholesky que de coefficients à calculer. Cependant dans le cas  $m = NT$ , on dispose d'un algorithme rapide [14] pour déterminer les quantités  $\hat{\beta}_{acpe}(t, s)$  et celui-ci peut être adapté à la situation générale.

Pour les processus stationnaires [6, 7], la méthode  $RER$  représente une approximation d' $ACPE$ . Par exemple dans le cas scalaire ( $T = 1$ ), les coefficients  $\beta(k) = \beta_t(k)$ ,  $0 \leq k \leq p$ , sont estimés en utilisant le même sous-espace engendré par  $X_{m-p+1}(s)$ ,  $s = 1, \dots, p$ , au lieu des sous-espaces de  $C^{m-k+1}$  successifs. Pour la situation périodique, on introduit les entiers  $t_i$ ,  $i = 1, \dots, T$ , tels que  $t_i = kT + i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et  $0 < t_i - p_i \leq T$ . Alors pour  $i = 1, \dots, T$ ,  $\hat{\beta}_{rer}(t_i, t_i) = \|X_{m_i}(t_i)\|_e^2$ , et pour  $0 < t_i - s \leq p_i \leq m_i$ ,  $\hat{\beta}_{rer}(t_i, s)$ , est la "corrélation partielle" entre  $X_{m_i}(s)$  et  $X_{m_i}(t_i)$  dans l'ensemble  $\{X_{m_i}(s), \dots, X_{m_i}(t_i)\}$ . Les coefficients  $\hat{\beta}_{rer}(t_i, s)$  sont distincts de  $\hat{\beta}_{acpe}(t_i, s)$  excepté pour les  $(T + p_i - t_i + 1)$  derniers. Notons que cette méthode nécessite au plus  $T$  décompositions de Cholesky.

Les méthodes de type Burg sont basées sur le résultat suivant. Pour  $s < t$ ,  $\beta(t, s)$  est la valeur qui réalise le minimum dans,

$$\min_{\beta} \left\{ \|\eta^f - \beta \eta^b\|^2 + \|\eta^b - \overline{\beta} \eta^f\|^2 \right\},$$

où  $\eta^f = \eta^f(t; s+1)$  et  $\eta^b = \eta^b(s; t-1)$ . Sur le plan empirique, ce critère est appliqué de façon récursive sur l'ordre, les quantités  $\hat{\eta}^f$  et  $\hat{\eta}^b$  étant définies à partir des estimations obtenues aux étapes précédentes.

Plus précisément, on regroupe ces deux méthodes avec  $ACPE$  dans une même méthodologie. On pose pour  $t = 1, \dots, T$ ,  $\hat{\beta}(t, t) = \|X_{m_t}(t)\|_e^2$  et pour  $s \in [1, \dots, T]$ ,  $0 < t-s \leq p_t$ ,  $\hat{\beta}(t, s)$  est obtenu par la procédure suivante.

(i) Choisir les coefficients  $\tilde{a}_{m_t}^f(t, s+1, \cdot)$  et  $\tilde{a}_{m_t}^b(s, t-1, \cdot)$  des filtres donnant les erreurs de prédictions d'ordre  $t-s-1$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{m_t}^f(t; s+1) &= \sum_{j=0}^{t-s-1} \tilde{a}_{m_t}^f(t, s+1, j) X_{m_t}(t-j), \\ \tilde{\varepsilon}_{m_t}^b(s; t-1) &= \sum_{j=0}^{t-s-1} \tilde{a}_{m_t}^b(s, t-1, j) X_{m_t}(s+j), \end{aligned}$$

auxquelles on associe les éléments empiriques

$$\tilde{\sigma}_{m_t}^{f2}(t; s+1) = \|\tilde{\varepsilon}_{m_t}^f(t; s+1)\|_e^2,$$

$$\tilde{\sigma}_{m_t}^{b2}(s; t-1) = \|\tilde{\varepsilon}_{m_t}^b(s; t-1)\|_e^2,$$

$$\tilde{\delta}_{m_t}(t, s) = \left\langle \tilde{\varepsilon}_{m_t}^f(t; s+1), \tilde{\varepsilon}_{m_t}^b(s; t-1) \right\rangle_e.$$

(ii) Choisir les estimateurs  $\tilde{\sigma}^{f2}(t; s + 1)$  et  $\tilde{\sigma}^{b2}(s; t - 1)$  des variances résiduelles. Alors  $\hat{\beta}(t, s)$  est défini par

$$\hat{\beta}(t, s) = \frac{2\tilde{\delta}_{m_t}(t, s)}{\tilde{\sigma}_{m_t}^{f2}(t; s + 1) \frac{\tilde{\sigma}^{b(s;t-1)}}{\tilde{\sigma}^{f(t;s+1)}} + \tilde{\sigma}_{m_t}^{b2}(s; t - 1) \frac{\tilde{\sigma}^{f(t;s+1)}}{\tilde{\sigma}^{b(s;t-1)}}}.$$

Les extensions de type Burg prennent à l'étape (i), les filtres associés aux estimateurs  $\hat{\beta}(u, v)$ ,  $s \leq v \leq u \leq t$  avec  $(u, v) \neq (t, s)$ , obtenus aux étapes précédentes. Puis, pour l'étape (ii), [1] utilise les variances résiduelles associées à ces estimateurs alors que [15] retient celles empiriques définies en (i). La méthode *ACPE* consiste à utiliser les filtres donnés par le critère des moindres carrés en (i) et les variances résiduelles empiriques pour (ii).

Ces différentes méthodes sont comparées dans la suite par simulation. On peut déjà noter que les contraintes dans la construction récursive des filtres pour les méthodes de type Burg constituent a priori un handicap. Par ailleurs, les singularités d'ordre fini sont estimées presque sûrement par *ACPE* ou *RER*, ce qui n'est plus vrai pour les autres méthodes. Cependant dans ce cas, les filtres traduisant les singularités ne sont généralement pas cohérents avec  $\hat{\beta}(\cdot, \cdot)$  dont l'estimation devrait être remise en cause. Finalement, contrairement au cas stationnaire, *ACPE* est la seule méthode qui soit, en toute généralité, récursive sur l'ordre du modèle *ARP*.

## 4 Les approches vectorielles

Étant donnée l'association  $\{X(\cdot), Y(\cdot)\}$ , on dispose de la séquence  $Y(1), \dots, Y(N)$ , lorsque le processus  $X(\cdot)$  est observé sur une longueur  $m = NT$ . Ainsi les méthodes d'estimation autorégressives vectorielles donnent lieu à des méthodes d'estimations scalaires et inversement. Soulignons le fait que la structure périodique résultant d'une méthode vectorielle est en général celle d'un processus *ARP*( $p, \max$ ). Dans cette section, nous considérons ces modèles afin de comparer ces deux approches. Dégerine [4] regroupe dans un cadre général la plupart des méthodes d'estimations vectorielles utilisant les matrices d'autocorrélation partielle. On se restreint aux fonctions d'autocorrélation partielle de type triangulaire  $\Pi(\cdot)$  [2, 14] qui apparaissent très naturellement dans la correspondance avec les processus périodiquement corrélés. Le schéma de [4] se réduit alors, comme ci-dessus, au choix des filtres des erreurs de prédiction et à celui des estimateurs des matrices de covariances résiduelles. L'estimateur de  $\Pi(k)$  est donné par une équation de Lyapounov provenant d'un problème de minimisation analogue au cas périodique. Notons que le choix de la normalisation n'a d'influence que pour les estimations de type *ACPE* ou celles de Morf et coll. [11]. Dans l'analogie précédente, la généralisation au cas vectoriel de la technique de Burg, proposée par Nuttall [12] ou Strand [16], correspond à celle de Boshnakov [1] et celle de Morf et coll. à celle de Sakai [15]. Cependant ces méthodes ne sont pas équivalentes. Par contre notre méthode équivaut à celle définie par *ACPE* vectoriel [14, 4] résultant des mêmes types de choix dans les deux étapes. Remarquons que les méthodes de Pagano [13] ou de Dickinson [7] qui peuvent être considérées

	$\beta(\cdot, \cdot)$	$\rho(\cdot, \cdot)$	$R(t, t)$	$a(\cdot)$	$\sigma^2$
biais YW.	0.136	0.080	0.025	0.251	0.172
erreur YW.	0.211	0.171	1.517	0.388	0.261
biais ACPE	0.044	0.054	0.025	0.040	0.034
erreur ACPE	0.161	0.169	1.517	0.261	0.066
$m = 50, n_r = 2000,$					
$\beta(1, \cdot) : 3.00, 0.60, 0.85, -0.55, -0.65,$					
$\beta(2, \cdot) : 2.00, -0.75, 0.60, -0.70, -0.50.$					

TAB. 1 — Comparaison entre Yule-Walker et *ACPE*

aussi bien du point de vue scalaire que vectoriel, n'entrent pas dans le cadre méthodologique précédent. Dans ce cas les deux approches sont également équivalentes.

## 5 Résultats de simulation

Dans cette section, les différentes approches scalaires sont analysées par simulation. Sans perte de généralité, on se place dans le cas réel avec  $m = NT$ . On considère un modèle *ARP*(4, 4) et un modèle *ARP*(6, 6, 6) proche de la singularité (i.e. certaines valeurs de  $\beta(\cdot, \cdot)$  sont proches de  $\pm 1$ ). Les méthodes sont comparées à travers l'estimation des paramètres  $\beta(t, s)$ ,  $\rho(t, s) = R(t, s)/\sqrt{R(t, t)R(s, s)}$ ,  $R(t, t)$ ,  $a_t(\cdot)$ , et  $\sigma_t^2$ ,  $t = 1, \dots, T$ ,  $0 < t - s \leq p_t$ . Les caractéristiques des simulations sont données dans deux tableaux où  $n_r$  est le nombre de répétitions. Pour un paramètre  $\theta(\cdot)$  de dimension  $d$ , le biais et l'écart quadratique moyen (EQM) empiriques des estimateurs de chaque composante sont résumés sur les lignes "biais" et "erreur" par,

$$\left\{ \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d [\text{biais}[\hat{\theta}(k)]]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad \left\{ \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \text{EQM}[\hat{\theta}(k)] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

La méthode *ACPE* est d'abord comparée avec la méthode de type Yule-Walker pour des séries courtes issues du modèle *ARP*(4, 4). Pour cette dernière, on retrouve le défaut classique dû au biais particulièrement sensible pour des séries courtes. Le tableau 1 ci-dessus, montre que les deux méthodes diffèrent peu pour l'estimation de  $\rho(\cdot, \cdot)$  (l'estimateur de  $R(t, t)$  est le même). Sinon la méthode de Yule-Walker fournit de mauvais résultats en particulier pour les paramètres du modèle. Cette différence entre les deux méthodes s'accroît pour un modèle proche de la singularité même pour des séries longues. Pour cet exemple, les autres méthodes conduisent à des résultats comparables à ceux d'*ACPE*.

Ensuite la méthode *ACPE* est comparée avec *RER* et les deux extensions de type Burg. On observe essentiellement les mêmes phénomènes que pour le cas stationnaire (cf. [3]). Les facteurs déterminants sont la proximité du modèle à la singularité, la longueur de la séquence et le type de paramètres étudiés. Les extensions de type Burg se comportent de façon analogue et la méthode *RER* constitue une bonne approximation d'*ACPE*. Le tableau 2 donne les résultats pour des séries courtes issues du modèle *ARP*(6, 6, 6) proche

	$\beta(\cdot, \cdot)$	$\rho(\cdot, \cdot)$	$R(t, t)$	$a(\cdot)$	$\sigma^2 10^2$
biais SA.	0.124	0.118	0.040	0.523	4.098
erreur SA.	0.208	0.235	5.288	0.738	6.097
biais BO.	0.125	0.118	0.040	0.531	4.153
erreur BO.	0.208	0.235	5.288	0.747	6.164
biais RER	0.066	0.119	0.039	0.017	0.499
erreur RER	0.156	0.238	5.333	0.251	0.799
biais ACPE	0.065	0.118	0.040	0.017	0.475
erreur ACPE	0.154	0.235	5.288	0.256	0.799

$m = 105, n_r = 2000,$   
 $\beta(1, \cdot) : 7.60, -0.80, -0.30, 0.85, -0.95, 0.80, 0.25,$   
 $\beta(2, \cdot) : 2.00, 0.50, 0.90, -0.90, 0.70, -0.60, 0.45,$   
 $\beta(3, \cdot) : 4.50, 0.00, -0.90, 0.30, -0.80, 0.55, -0.90.$

TAB. 2 — Comparaison entre Burg, RER et ACPE

de la singularité. On constate que les quatre méthodes sont équivalentes pour l'estimation de  $\rho(\cdot, \cdot)$  alors que pour les autres paramètres, les extensions de type Burg sont bien moins bonnes. Ces mauvais résultats sont dus aux contraintes dans la construction récursive des filtres. Ceci apparaît clairement dans le cas de  $\sigma^2$  où le biais correspond à une surestimation des variances résiduelles de chaque période. Ce défaut de conception influe sur les résultats d'autant plus que l'ordre du modèle est grand.

## 6 Conclusion

Les méthodes ACPE et RER ont été étendues aux processus périodiquement corrélés. Nous les avons comparées avec la méthode de type Yule-Walker et deux extensions de type Burg. Les résultats de simulation ont montré qu'elles éliminent certains défauts des autres méthodes. Par ailleurs, nous avons également considéré le rapport entre ces différentes méthodes scalaires et celles liées aux processus vectoriels stationnaires. L'avantage des approches scalaires est qu'elles évitent la manipulation de matrices et permettent d'estimer des modèles autorégressifs de n'importe quel ordre.

## Références

[1] G. Boshnakov. *Periodically correlated sequences : some properties and recursions*. Research Report 1, Division of Quality Technology and Statistics, Luleo University, Sweden, 1994.

[2] S. Dégerine. *Canonical partial autocorrelation function of a multivariate time series*. Annals of Statistics, **18**(2) :961-971, 1990.

[3] S. Dégerine. *Sample partial autocorrelation function*. IEEE Transactions on Signal Processing, **41**(1) :403-407, 1993.

[4] S. Dégerine. *Sample partial autocorrelation function of a multivariate time series*. Journal of Multivariate Analysis, **50**(2) :294-313, 1994.

[5] S. Dégerine, S. Lambert. *Evolutionary instantaneous spectrum associated with partial autocorrelation function for nonstationary time series*. Proceeding TFTS-96 :457-460, 1996.

[6] B. W. Dickinson. *Autoregressive estimation using residual energies ratios*. IEEE Transactions on Information Theory **24**(2) : 503-506, 1978.

[7] B. W. Dickinson. *Estimation of partial correlation matrices using Cholesky decomposition*. IEEE Transactions on Automatic Control, **24**(2) :302-305, 1979.

[8] E. G. Gladyshev. *Periodically random sequences*. Soviet Mathematics, **2** :385-388, 1961.

[9] S. Lambert. *Extension of autocovariance coefficients sequence for periodically correlated random processes by using the partial autocorrelation function*. Proceeding EUSIPCO 96 :503-506, 1996.

[10] S. Lambert. *Fonction d'autocorrélation partielle empirique des processus périodiquement corrélés*. Rapport de Recherche, à paraître, 1997.

[11] M. Morf, A. Vieira, D. Lee, T. Kailath. *Recursive multichannel maximum entropy spectral estimation*. IEEE Transactions on Geoscience Electronics, **16**(2) :85-94, 1978.

[12] A. H. Nutall. *Positive definite spectral estimate and stable correlation recursion for multivariate linear predictive spectral analysis*. NUSC Tech. Doc. 5729, Naval Underwater System Center, New London, CT, Nov. 14, 1976.

[13] M. Pagano. *On periodic and multiple autoregressions*. Annals of Statistics, **6**(6) :1310-1317, 1978.

[14] D. T. Pham. *Fast scalar algorithms for multivariate partial correlations and their empirical counterparts*. Rapport de Recherche, LMC (URA 397), RR 903-M-, 1992.

[15] H. Sakai. *Circular lattice filtering using Pagano's method*. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing **30**(2) :279-287, 1982.

[16] O. N. Strand. *Multichannel complex maximum entropy (autoregressive) analysis*. IEEE Transactions on Automatic Control, **22**(4) :634-640, 1977.