

Détection de Processus Spectralement Equivalents à l'aide des Statistiques d'Ordre Supérieur

Martial COULON et Jean-Yves TOURNERET

Institut National Polytechnique de Toulouse, LEN7-GAPSE

2 rue Camichel, BP 7122, 31071 Toulouse Cedex 7

e-mail : coulou@len7.enseeiht.fr tournere@len7.enseeiht.fr

RÉSUMÉ

Cet article est consacré au problème de la détection de processus à spectres équivalents. Ces processus sont modélisés par deux modèles paramétriques : le modèle AR bruité et le modèle ARMA. Deux détecteurs basés sur la singularité de la matrice des équations de Yule-Walker d'ordre supérieur sont développés, l'un en mode supervisé, l'autre en mode non-supervisé. L'effet d'une surestimation de l'ordre des modèles sur ces détecteurs est ensuite étudié.

ABSTRACT

The detection of Spectrally Equivalent (SE) processes is studied. The SE processes are modeled by two SE parametric models: the noisy AR model and the ARMA model. Two detectors based on the Higher-Order Yule-Walker matrix singularity are developed, in supervised learning and in unsupervised learning, respectively. The model order mismatch is then investigated.

1 Introduction

On étudie dans cet article la détection de processus spectralement équivalents (SE). Ce problème peut survenir dans le traitement de signaux à spectres étalés qui est nécessaire dans de nombreuses applications, civiles ou militaires, comme les systèmes de communication mobile, la localisation de véhicules, la sécurité des communications dans un environnement militaire,...[4] La détection de processus SE est également d'un grand intérêt en imagerie SAR : la détection de non-linéarités contenues dans de telles images par des méthodes basées sur les modèles de Volterra peut se ramener à la comparaison de signaux ayant le même spectre [3]. Ces différents problèmes de détection de processus SE se prêtent difficilement aux techniques fondées sur les statistiques du second ordre. Cet article montre que statistiques d'ordre supérieur sont un outil indispensable pour la détection de spectres SE.

On se propose de modéliser les processus SE par deux modèles paramétriques SE : le modèle AR bruité et le modèle ARMA. On montre que ces processus paramétriques ne peuvent avoir les mêmes statistiques d'ordre supérieur [7]. On se place dans un premier temps dans la situation où les paramètres de ces modèles sont connus (cas du mode supervisé). Un détecteur basé sur les Equations de Yule-Walker d'Ordre Supérieur (EYWOS) est alors élaboré. Plus précisément, la singularité (ou la régularité) de la matrice des EYWOS s'avère être un outil efficace pour la détection. Le cas du mode non-supervisé est ensuite étudié. A l'aide d'une segmentation du signal, un détecteur s'affranchissant de l'estimation des paramètres des modèles est étudié. Dans une dernière partie nous montrons qu'une surestimation de

l'ordre des modèles SE ne détériore pas les performances du détecteur, mais au contraire peut les améliorer.

2 Formulation du Problème

L'étude développée dans cet article se restreint aux processus stationnaires, ergodiques, dont la densité spectrale de puissance est symétrique et continue. Le choix de modéliser les signaux SE par des processus AR bruité et ARMA peut se justifier par le théorème suivant :

Si S est une fonction positive, symétrique et continue, il existe un processus $AR(p)$, un processus $MA(q)$ et un processus $ARMA(p, q)$ dont le spectre approche S avec une précision aussi fine que souhaitée ([1], p. 132).

Soit un processus aléatoire $\{y(n)\}_{n=0, \dots, N-1}$ stationnaire et ergodique. Considérons les deux modèles paramétriques suivants :

- Un processus $AR(p)$ noté $x(n)$, d'entrée $e(n)$, noyé dans un bruit additif blanc gaussien $b(n)$:

$$y_0(n) = x(n) + b(n) \text{ avec } x(n) = - \sum_{j=1}^p a_j x(n-j) + e(n)$$

$e(n)$ et $b(n)$ sont supposés indépendants, identiquement distribués (i.i.d.) et mutuellement indépendants.

- Un processus $ARMA(p, p)$ **non gaussien** $y_1(n)$, d'entrée $g(n)$ i.i.d., de même moyenne et de même densité spectrale que $y_0(n)$ (sachant que le spectre d'un processus $AR(p)$ bruité est le spectre d'un processus $ARMA(p, p)$ [2]), défini par :

$$y_1(n) = - \sum_{j=1}^p \tilde{a}_j y_1(n-j) + \sum_{j=0}^p b_j g(n-j)$$

L'équivalence spectrale entre $y_0(n)$ et $y_1(n)$ implique que les paramètres des modèles *AR* bruité et *ARMA* sont liés par une transformation bijective (en supposant que les modèles considérés sont stables) [2].

3 Détection en Mode Supervisé (Décteur "MS")

Le problème de détection peut s'énoncer comme un test d'hypothèses simples :

$$\begin{aligned} H_0 : & \begin{pmatrix} \text{processus} \\ \text{AR bruité} \end{pmatrix} & y(n) = y_0(n), n = 0, \dots, N-1 \\ H_1 : & \begin{pmatrix} \text{processus} \\ \text{ARMA} \end{pmatrix} & y(n) = y_1(n), n = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

Pour des processus *AR* et *ARMA* non gaussiens, le test optimal de Neyman-Pearson (NP) associé au problème précédent ne peut s'exprimer simplement car les lois de $y_0(n)$ et de $y_1(n)$ sont difficiles voire impossibles à déterminer. On est donc amené à considérer des détecteurs sous-optimaux. Dans ce but, on se propose d'utiliser les Equations de Yule-Walker d'Ordre Supérieur (EYWOS) pour effectuer la détection. Soit k un entier tel que le spectre d'ordre k du processus non gaussien $y_1(n)$ soit non-nul ($k > 2$). On sait qu'un processus *AR*(p) vérifie les EYWOS suivantes [5] :

$$\sum_{j=0}^p a_j C_k^x(m-j, 0, \dots, 0) = 0, \forall m > 0 \quad (1)$$

où $C_k^x(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$ représente le cumulante d'ordre k du processus *AR* $x(n)$ calculé au point $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{k-1})$. Puisque $b(n)$ est gaussien et indépendant de $x(n)$, $C_k^x(\tau) = C_k^{y_0}(\tau) \forall \tau \in \mathbb{R}^{k-1}, \forall k > 2$. Soit $\Delta_p(\xi) = \det(\mathbf{R}_p(\xi))$, avec :

$$\mathbf{R}_p(\xi) = \begin{bmatrix} \xi_{p+1} & \xi_p & \dots & \xi_1 \\ \xi_{p+2} & \ddots & \ddots & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & \xi_p \\ \xi_{2p+1} & \dots & \dots & \xi_{p+1} \end{bmatrix}$$

et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{2p+1}) \in \mathbb{R}^{2p+1}$. Posons :

$$\mathbf{C}_k^0 = (C_k^{y_0}(1-p, 0, \dots, 0), \dots, C_k^{y_0}(1+p, 0, \dots, 0))^T \quad (2)$$

Pour $m \in \{1, \dots, p+1\}$, l'équation (1) donne :

$$\mathbf{R}_p(\mathbf{C}_k^0)(1, a_1, \dots, a_p)^T = 0$$

d'où :

$$\Delta_k^0 \triangleq \Delta_p(\mathbf{C}_k^0) = 0$$

D'autre part, pour un processus *ARMA*(p, p) non gaussien, (1) est valide pour $m > p$, mais pas pour $m \in \{1, \dots, p\}$. Il est alors légitime de supposer que

$$\Delta_k^1 \triangleq \Delta_p(\mathbf{C}_k^1) \neq 0,$$

où \mathbf{C}_k^1 est défini comme dans (2) avec les cumulants du processus *ARMA* (cette hypothèse a toujours été confirmée lors des simulations). On obtient ainsi le test suivant :

$$\begin{aligned} H_0 : & \text{processus AR bruité} & \Delta_k = \Delta_k^0 = 0 \\ H_1 : & \text{processus ARMA} & \Delta_k = \Delta_k^1 \neq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Soit $\widehat{\mathbf{C}}_k$ le vecteur obtenu en remplaçant les vrais cumulants dans (2) par leurs estimés usuels, et soit $\widehat{\Delta}_k \triangleq \Delta_p(\widehat{\mathbf{C}}_k)$. Le vecteur $\widehat{\mathbf{C}}_k$ est asymptotiquement sans biais, gaussien, et tel que $\lim_{N \rightarrow +\infty} NE[(\widehat{\mathbf{C}}_k - \mathbf{C}_k^i)(\widehat{\mathbf{C}}_k - \mathbf{C}_k^i)^T / H_i] = \Sigma_k^i$ [5]. D'après ([1], p. 211), cette propriété implique que le déterminant estimé $\widehat{\Delta}_k$ est asymptotiquement sans biais et gaussien, avec :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} NE[(\widehat{\Delta}_k - \Delta_k^i)^2 / H_i] = D_k^{iT} \Sigma_k^i D_k^i \triangleq \sigma_i^2 \quad (4)$$

Dans (4), D_k^i est un vecteur dont le $j^{\text{ème}}$ élément est $D_k^i(j) = (\partial \Delta(\xi) / \partial \xi_j)(\mathbf{C}_k^i)$. On montre alors facilement que

$$D_k^i(j) = \sum_{m=1}^{|\xi_j|} (\text{Cof}(\mathbf{R}_p(\mathbf{C}_k^i)))_m$$

où $|\xi_j|$ est le nombre de ξ_j dans $\mathbf{R}_p(\xi)$ et $(\text{Cof}(\mathbf{R}_p(\cdot)))_m$ la matrice des cofacteurs de $\mathbf{R}_p(\cdot)$ calculée à la $m^{\text{ème}}$ occurrence de ξ_j . Le comportement asymptotique de $\widehat{\Delta}_k$ est alors, sous chacune des deux hypothèses :

$$\begin{aligned} H_0 : & \text{processus AR bruité} & \sqrt{N} \widehat{\Delta}_k \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} N(0, \sigma_0^2) \\ H_1 : & \text{processus ARMA} & \sqrt{N} \widehat{\Delta}_k \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} N(\Delta_k^1, \sigma_1^2) \end{aligned}$$

Le test NP associé à ces deux hypothèses s'écrit alors :

$$H_0 \text{ rejetée si } T \triangleq \frac{N \widehat{\Delta}_k^2}{\sigma_0^2} - \frac{N(\widehat{\Delta}_k - \Delta_k^1)^2}{\sigma_1^2} > k_1 \quad (5)$$

Dans (5), k_1 est un seuil dépendant de la Probabilité de Fausse Alarme (PFA). Sous chaque hypothèse H_i , $i \in \{0, 1\}$, T peut s'écrire : $T = \lambda_i \widetilde{T}_i + \mu_i$ où \widetilde{T}_i suit une loi du χ^2 décentré à 1 degré de liberté et de paramètre de non-centralité $v_i = \sigma_i^2 \Delta_i^2 / (\sigma_0^2 - \sigma_1^2)^2$. Pour une PFA donnée, la Probabilité de Détection (PD) est alors donnée par :

- Premier cas : $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$,

$$PD = 1 - \chi_d^2[v_1] (\{\lambda_0 \chi_d^2[v_0]^{-1} (1 - FAP) + \mu_0 - \mu_1\} / \lambda_1)$$

- Second cas : $\sigma_0^2 > \sigma_1^2$,

$$PD = \chi_d^2[v_1] (\{\lambda_0 \chi_d^2[v_0]^{-1} (FAP) + \mu_0 - \mu_1\} / \lambda_1)$$

où $\chi_d^2[v](\cdot)$ et $\chi_d^2[v]^{-1}(\cdot)$ représentent respectivement la fonction de répartition et la fonction de répartition inverse d'une loi du χ^2 décentré à d degrés de liberté et de paramètre de non-centralité v .

4 Détection en Mode Non-Supervisé (Décteur "MNS")

On s'intéresse dans cette section au problème de détection de processus SE en mode non-supervisé. Les paramètres des deux modèles sont donc inconnus. Cependant, on suppose dans un premier temps que l'ordre p des processus *AR* et *ARMA* est connu. L'étude du cas où cet ordre est estimé sera exposée dans la section suivante. Considérons une segmentation du signal en M tranches de taille K . Sur chacune de ces tranches, on calcule le déterminant estimé comme précédemment, ce qui donne M réalisations $(\widehat{\Delta}_{k,j})_{j=1, \dots, M}$ de $\widehat{\Delta}_k$. La

segmentation doit être effectuée de façon à ce que les déterminants $(\widehat{\Delta}_{k,j})_{j=1,\dots,M}$ soient indépendants et gaussiens. Supposons donc que les deux hypothèses suivantes soient vérifiées :

(H1) La taille K de chaque segment est assez grande pour que chaque déterminant $\widehat{\Delta}_{k,j}$ suive approximativement une loi normale ;

(H2) Les segments ne sont pas adjacents mais sont séparés par un “espace” suffisant pour que les $(\widehat{\Delta}_{k,j})_{j=1,\dots,M}$ soient approximativement indépendants.

On obtient alors une séquence $(\widehat{\Delta}_{k,j})_{j=1,\dots,M}$ de M variables i.i.d. approximativement gaussiennes. Notons que les hypothèses (H1) et (H2) nécessitent d’avoir des signaux de grande taille. Posons :

$$T_2 \triangleq \frac{\sqrt{M-1} \cdot \bar{\Delta}_k}{\sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M (\widehat{\Delta}_{k,j} - \bar{\Delta}_k)^2}} \text{ avec } \bar{\Delta}_k = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \widehat{\Delta}_{k,j}$$

Sous l’hypothèse H_0 , on a : $\sqrt{K} \widehat{\Delta}_{k,j} \sim N(0, \sigma_0^2) \forall j \in \{1, \dots, M\}$. On en déduit alors que [6] :

T_2 suit sous H_0 une loi de Student à $M - 1$ degrés de liberté

Ainsi, on connaît la loi de la statistique de test T_2 sous H_0 , ce qui permet de déterminer un seuil k_2 en fonction de la PFA . Ce seuil est indépendant des paramètres des modèles AR bruité et $ARMA$. Ces paramètres n’interviennent dans le test que pour le calcul de la loi de T_2 sous H_1 , c’est-à-dire pour le calcul de la probabilité de détection (PD). La loi de T_2 sous H_1 n’ayant de forme simple, on est amené à déterminer la Probabilité de Détection en fonction du seuil k_2 à l’aide de simulations de Monte-Carlo.

On peut vérifier que le test du rapport de vraisemblance généralisé associé aux observations $(\widehat{\Delta}_{k,j})_{j=1,\dots,M}$ conduit à la même statistique de test T_2 .

5 Surestimation de l’Ordre des Modèles

Supposons que l’ordre p des modèles AR et $ARMA$ est surestimé. L’équation peut s’écrire :

$$\sum_{j=0}^{p'} a'_j C_k^x(m-j, 0, \dots, 0) = 0, \forall m > 0 \quad (6)$$

avec :

$$\begin{cases} a'_j = a_j & \forall j \in \{1, \dots, p\} \\ a'_j = 0 & \forall j \in \{p+1, \dots, p'\} \end{cases}$$

p' est l’ordre surestimé ($p' > p$). Notons $C_k^{0'}$ le vecteur obtenu en remplaçant p par p' dans (2). L’équation (6) donne alors :

$$\Delta_{p'}(C_k^{0'}) = \det(\mathbf{R}_{p'}(C_k^{0'})) = 0$$

De plus, il est encore légitime de supposer que $\Delta_{p'}(C_k^{1'}) \neq 0$. Ainsi, le test est exactement le même que pour (3), à ceci près

qu’il y a maintenant davantage de cumulants mis en jeu. Par conséquent, la procédure à adopter est la suivante :

1) dans un premier temps, on estime l’ordre par les techniques conventionnelles (Akaike,...) ;

2) on surestime l’ordre issu de 1) afin d’éviter une sous-estimation de l’ordre des modèles.

6 Simulations et Résultats

De nombreuses simulations ont été effectuées pour déterminer les performances des détecteurs précédents. Dans cet article sont présentés les résultats obtenus avec un processus $AR(1)$ de paramètres $[1; -0.5]$ généré par une entrée i.i.d. de loi exponentielle, de moyenne nulle, et de variance $\sigma_e^2 = 1$. D’autres ordres et paramètres ont été testés et ont conduit à des performances similaires. En faisant varier le Rapport Signal sur Bruit ($RSB = \sigma_e^2/\sigma_b^2$), on fait varier les paramètres du modèle $ARMA$. Celui-ci est également généré par une entrée i.i.d. de moyenne nulle et de loi exponentielle. Les résultats numériques ont été obtenus au moyen de 2000 simulations de Monte-Carlo.

La figure 1 présente les Courbes Opérationnelles du Récepteur (COR) du détecteur MS pour différentes valeurs du RSB . Dans ce cas, le test s’améliore quand le RSB décroît. En effet, pour un RSB faible ($\sigma_e^2 \ll \sigma_b^2$), le processus AR bruité est quasiment gaussien, alors que le processus $ARMA$ ne l’est pas, ce qui facilite grandement la détection. Les figures 2 et 3 permettent de comparer les détecteurs MS et MNS en fonction du nombre d’échantillons N , pour $RSB = 8dB$. Les performances des deux détecteurs sont très similaires. La figure 4 montre que le détecteur MNS s’améliore lorsque l’ordre des modèles est surestimé. Ceci n’est pas surprenant : en effet, le nombre de cumulants utilisés dans la fonction test croît avec p' . Par conséquent, la quantité d’informations concernant la structure du processus augmente lorsque l’ordre p' augmente.

7 Conclusion

Les statistiques d’ordre supérieur s’avèrent être un outil efficace pour la détection des processus spectralement équivalents (SE). Les équations de Yule-Walker d’ordre supérieur ont permis l’élaboration de deux détecteurs, respectivement en mode supervisé et en mode non-supervisé. Pour la détection de processus SE, l’idée de base de ces détecteurs est de tester la singularité des matrices formées par les équations susmentionnées. Les résultats de simulations ont montré que les performances des deux détecteurs sont très proches. De plus, le détecteur en mode non-supervisé se révèle robuste vis-à-vis de la surestimation de l’ordre des modèles.

Cette étude peut s’étendre à la détection de signaux à spectre approximativement équivalents, pour laquelle les techniques du second ordre ne sont guère efficaces. D’autre part, ce papier s’intéresse aux processus modélisables par des processus linéaires. La détection de processus spectralement équivalents non-linéaires est en cours d’étude.

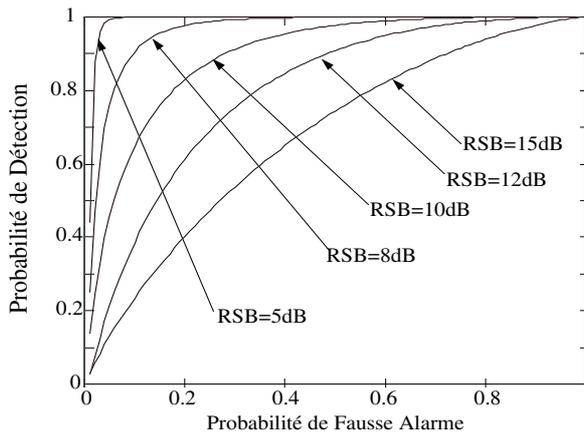


FIG. 1 — Figure 1 : COR du Détecteur MS en fonction du Rapport Signal sur Bruit ($N = 10000$).

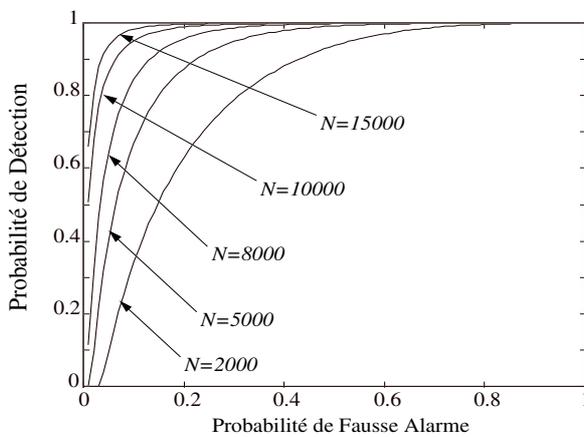


FIG. 2 — Figure 2 : COR du Détecteur MS en fonction du nombre d'échantillons N ($RSB = 8dB$)

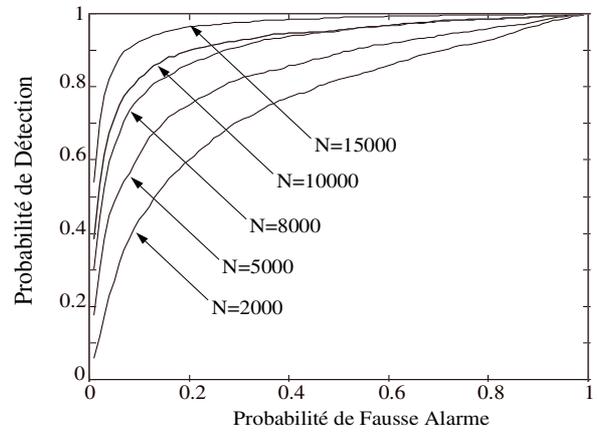


FIG. 3 — Figure 3 : COR du Détecteur MNS en fonction du nombre d'échantillons N ($RSB = 8dB$)

Références

- [1] P.J. Brockwell and R.A. Davis, "Time Series : theory and methods", Springer Verlag, 2nd Edition, 1990.
- [2] S.M. Kay, "Modern Spectral Estimation : Theory and Application", Prentice Hall, 1988.
- [3] J.-M. Le Caillec, "Etude et Traitement des Images SAR grâce aux Moments d'Ordres Supérieurs," *Thèse de Doctorat*, Université de Rennes I, 1997.
- [4] R.L. Peterson, R.E. Ziemer, D.E. Borth, *Introduction to Spread Spectrum Communications*, Prentice Hall, 1995.
- [5] B. Porat, "Digital Processing of Random Signals : Theory and Methods", Prentice-Hall, 1994.
- [6] G. Saporta, "Probabilités, Analyse de Données et Statistique", Editions Technip, Paris, 1990.
- [7] J.Y. Tourneret, K. Vareille, M. Coulon. "Detection and Classification of Noisy AR and ARMA Processes.", *Proc. of EUSIPCO 96, Trieste, Italy*, pp 1421-1424, Sept 1996.

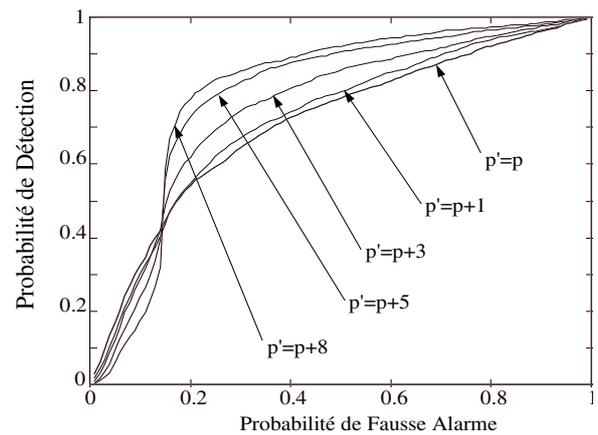


FIG. 4 — Figure 4 : COR du Détecteur MNS pour différentes valeurs de l'ordre surestimé p' ($SNR = 8dB$, $N = 500$).